201
37 I
9

Digitized by Google

Digitized by Google

OPERUM NEWTONI

TOMUS SECUNDUS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

ISAACI NEWTONI

OPERA

QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

LONDINI:

EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXIX.

IN HOC TOMO CONTINENTUR

Principiorum Libri Priores duo, De Motu Corporum.

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

SECULI GENTISQUE NOSTRÆ DECUS EGREGIUM.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Jam patet, horrificis quæ ſit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena aſtri.
Diſcimus hinc tandem quâ cauſâ argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis graditur; cur ſubdita nulli
Hactenus Aſtronomo numerorum fræna recuſet;
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.
Diſcimus & quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.
Quæ toties animos veterum torſere ſophorum,
Quæque ſcholas fruſtra rauco certamine vexant,

Obvia conſpicimus, nubem pellente Matheſi.
Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
Queis ſuperûm penetrare domos, atque ardua cæli
Scandere, ſublimis genii conceſſit acumen.
   Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires dignoſcite mentis,
A pecudum vitâ longe lateque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab uvâ;
Vel qui Niliacâ monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere voces;
Humanam ſortem minus extulit: utpote pauca
Reſpiciens miſeræ tantùm ſolamina vitæ.
Jam verò ſuperis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.
   Talia monſtrantem mecum celebrate camænis,
Vos ô cælicolûm gaudentes nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

AUCTORIS

AUCTORIS PRÆFATIO

AD

LECTOREM.

CUM Veteres Mechanicam *(uti auctor eſt* Pappus) *in rerum naturalium inveſtigatione maximi fecerint*; *& Recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggreſſi ſint: Viſum eſt in hoc tractatu* Matheſin *excolere, quatenus ea ad* Philoſophiam *ſpectat.* Mechanicam *verò duplicem Veteres conſtituerunt:* rationalem, *quæ per demonſtrationes accuratè procedit, &* practicam. *Ad* practicam *ſpectant artes omnes manuales, à quibus utique* Mechanica *nomen mutuata eſt. Cùm autem artifices parùm accuratè operari ſoleant, fit ut* Mechanica *omnis à* Geometriâ *ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad* Geometriam *referatur, quicquid minùs accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non ſunt artis, ſed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior eſt Mechanicus, & ſi quis accuratiſſimè operari poſſet, hic foret Mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam & linearum rectarum & circulorum deſcriptiones, in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas deſcribere* Geometria *non docet, ſed poſtulat. Poſtulat enim ut tiro eaſdem accuratè deſcribere priùs didicerit, quàm limen attingat* Geometriæ; *dein, quomodo per has operationes Problemata ſolvantur, docet; rectas & circulos deſcribere Problemata ſunt, ſed non Geometrica. Ex* Mechanicâ *poſtulatur horum ſolutio, in* Geometriâ *docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur* Geometria *quòd tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur* Geometria *in praxi mechanicâ, & nihil aliud eſt quàm* Mechanicæ univerſalis *pars illa, quæ artem menſurandi accuratè proponit ac demonſtrat. Cùm autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè verſentur, fit* *ut*

ut Geometria *ad Magnitudinem*, Mechanica *ad Motum vulgò referatur. Quo ſenſu* Mechanica Rationalis *erit ſcientia Motuum, qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & Virium quæ ad motus quoſcunque requiruntur, accuratè propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* Mechanicæ *à Veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cùm potentia manualis non ſit) vix aliter quàm in ponderibus per potentias illas movendis conſiderârunt. Nos autem non Artibus ſed Philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maximè tractamus, quæ ad Gravitatem, Levitatem, vim Elaſticam, Reſiſtentiam Fluidorum, & ejuſmodi vires, ſeu attractivas, ſeu impulſivas, ſpectant: et ea propter, hæc noſtra tanquam* Philoſophiæ Principia Mathematica *proponimus. Omnis enim Philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut à phænomenis motuum inveſtigemus vires Naturæ, deinde ab vis viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant Propoſitiones generales, quas libro primo & ſecundo pertractivamus. In libro autem tertio exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem Syſtematis Mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœleſtibus, per Propoſitiones in libris prioribus mathematicè demonſtratis, derivantur vires Gravitatis, quibus corpora ad Solem & Planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propoſitiones etiam Mathematicas, deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis mechanicis, eodem argumentandi generè, derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil ſuſpicer ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ, per cauſas nondum cognitas, vel in ſe mutuò impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philoſophi hactenus Naturam fruſtra tentârunt. Spero autem quòd vel huic philoſophandi modo, vel veriori alicui, principia hic poſita lucem aliquam præbebunt.*

In his edendis, vir acutiſſimus & in omni Literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum typothetarum ſphalmata correxit, & ſchemata incidi curavit, ſed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cùm demonſtratam à me figuram Orbium Cœleſtium impetraverat, rogare non deſtitit, ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, quæ deinde*

 hortatibus

hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At poſtquam motuum Lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cœpiſſem, quæ ad leges & menſuras Gravitatis & aliarum virium, & figuras à corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in Mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus Mediorum, ad orbes Cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & unà in publicum darem. Quæ ad motus Lunares ſpectant (imperfecta cùm ſint) in Corollariis Propoſitionis LXVI. *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quàm pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum Propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſerò inventa locis minùs idoneis inſerere malui, quàm numerum Propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur, & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendantur, quàm novis lectorum conatibus inveſtigentur, & benignè ſuppleantur, enixè rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, è Collegio
S. Trinitatis, Maii 8, 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

IN hâc ſecundâ Principiorum editione multa ſparſim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In Libri Primi Sectione II. *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In Libri Secundi Sectione* VII. *Theoria Reſiſtentiæ Fluidorum accuratiùs inveſtigatur, & novis experimentis confirmatur. In Libro Tertio Theoria Lunæ & Præceſſio Æquinoctiorum ex principiis ſuis pleniùs deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratiùs ccmputatis orbium exemplis comfirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28, 1713.

IS. NEWTON.

COTESII

COTESII PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ Philoſophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque deſideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philoſophiæ.

Quæ Phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus Qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ Scholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ. Affirmant utique ſingulos effectus ex corporum ſingularibus naturis oriri; at unde ſint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cúmque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; ſermonem quendam philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, Philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperârunt, rejectâ vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam univerſam Homogeneam eſſe, omnem verò Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidam progreſſio inſtituitur à ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipſa tribuit Natura. Verùm ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertoſque ſitus & motus: quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omnipotente prædita ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglectâ rerum conſtitutione verâ: quæ ſanè fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cùm vix etiam per certiſſimas obſervationes inveſtigari.

gari poſſit. Qui ſpeculationum ſuarum fundamentum deſumunt ab Hypotheſibus; etiamſi deinde ſecundum leges Mechanicas accuratiſſime procedant; fabulam quidem, elegantem forte & venuſtam, fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Reliquitur adeo tertium genus, qui Philoſophiam ſcilicet Experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem Principii loco aſſumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in Phyſicam recipiunt, niſi ut quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque methodo incedunt, Analyticâ & Syntheticâ. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam phænomenis per analyſin deducunt, ex quibus deinde per ſyntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt philoſophandi ratio longè optima, quam præ cæteris merito amplectendam cenſuit celeberrimus Auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit exemplum, Mundani nempe Syſtematis explicationem è Theoriâ Gravitatis feliciſſimè deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus ille & ſolus ex apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: tibi potius, benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti ſumatur exordium à ſimpliciſſimis & proximis; diſpiciamus paulisper qualis ſit in Terreſtribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Celæſtia, longiſſimè à ſedibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in Terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas Relativa, non eſt vera Levitas, ſed apparens ſolummodò; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora univerſa gravitent in Terram, ita Terra viciſſim in corpora æqualitater gravitat; gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur Terræ totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro Terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires

vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam verò corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quòd in Vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublatâ ſcilicet Aëris reſiſtentiâ: accuratiùs autem comprobatur per experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cùm corpora in Terram & Terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; Terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis quâ corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis quâ corpus unumquodque Terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem auctâ vel diminutâ mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium actionibus conflari cenſenda erit; atque adeo corpora omnia Terreſtria ſe mutuò trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ trahentis. Hæc eſt natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis ſit in Cælis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; Naturæ lex eſt ab omnibus recepta Philoſophis. Inde verò ſequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus neceſſariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indeſinenter à Tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod mathematicis rationibus colligitur & certiſſimè demonſtratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, quæque radio ducto ad punctum, vel quieſcens vel utcunque motum, deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cùm igitur in confeſſo ſit apud Aſtronomos, Planetas primarios circum Solem, ſecundarios verò circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut vis illa, quâ perpetuo detorquentur à Tangentibus rectilineis, & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur, quæ ſita ſunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, Centripeta; reſpectu autem corporis centralis, Attractiva; à quâcunque demum cauſâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & mathematicè demonſtrantur: ſi corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum à centro communi; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in orbitis quæ ſunt Circulis finitimæ, & quieſcant orbitarum Apſides; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata

drata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in Planetis univerſis conſentiunt Aſtronomi. Itaque vires centripetæ Planetarum omnium ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat Planetarum, & Lunæ præſertim, Apſides non penitus quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe, quòd vis centripetæ proportio aberret aliquantum à duplicatâ, aberrationem illam per computum mathematicum inveniri poſſe & planè inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc verò ſexaginta ferè vicibus propius accedet quàm ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc Apſidum progreſſionem, non ex aberratione à duplicatâ proportione, ſed ex aliâ prorſus diverſâ cauſâ oriri, quemadmodum egregiè commonſtratur in hâc Philoſophiâ. Reſtat ergo ut vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt verſus Solem & ſecundarii verſus primarios ſuos, ſint accuratè ut quadrata diſtantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat Planetas in orbitis ſuis retineri per vim aliquam in ipſos perpetuò agentem: conſtat vim illam dirigi ſemper verſus orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ab eodem: & augeri quidem in eâdem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eâdem proportione quâ diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtitutâ inter Planetarum vires centripetas & vim Gravitatis, annon ejuſdem fortè ſint generis. Ejuſdem verò generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima eſt, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motûs initio deſcribuntur, ubi à viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: hoc utique conſequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripetæ Lunæ in orbitâ ſuâ revolvens, ad vim Gravitatis in ſuperficie Terræ, ut ſpatium, quod tempore quàm minimo deſcriberet Luna, deſcendendo per vim centripetam verſus Terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur, ad ſpatium, quod eodem tempore quàm minimo deſcribet grave corpus in viciniâ Terræ, per vim Gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcûs, à Lunâ per idem tempus deſcripti, ſinui verſo; quippe qui Lunæ tranſlationem de Tangente, factam à vi centripetâ, metitur; atque adeo computari poteſt ex datis tum Lunæ tempore periodico, tum diſtantiâ ejus à centro Terræ. Spatium poſterius invenitur per experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta Lunæ, in orbitâ ſuâ revolventis, ad vim Gravitatis in ſuperficie Terræ, erit ut quadratum ſemidiametri Terræ ad orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperius oſtenduntur, vis centripeta Lunæ, in orbitâ ſuâ revolventis, ad vim Lunæ centripetam prope Terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ ſuperficiem æqualis eſt vi Gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una

atque

atque eadem: ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quàm ex vi ſolâ Gravitatis. Conſtat igitur vim illam centripetam, quâ Luna perpetuò de Tangente vel trahitur vel impellitur, & in orbitâ retinetur, ipſam eſſe vim Gravitatis terreſtris ad Lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt, ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe virtus extendat, cùm nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutuâ, Terra viciſſim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hâc Philoſophiâ, ubi agitur de Maris Æſtu & Æquinoctorum Præceſſione, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirum lege vis Gravitatis decreſcat in majoribus à Tellure diſtantiis. Nam cùm Gravitatis non diverſa ſit à vi centripetâ Lunari, hæc verò ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & Gravitas in eâdem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & ſecundariorum circa Jovem & Saturnum ſunt phænomena generis ejuſdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi verſus centrum Solis, ſecundariorum verſus centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta verſus Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centris, quemadmodum vis Lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ à Terræ: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra viciſſim in Lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim in ſecundarios; ſic & omnes primarii in Solem, & Sol viciſſim in primarios.

Igitur Sol in Planetas univerſos gravitat, & univerſi in Solem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur interea circum Solem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipſos. Secundarios verò Planetas in Solem gravitare, abunde inſuper conſtat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratiſſimam Theoriam, admirandâ ſagacitate patefactam, in Tertio hujus Operis Libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſimè colligi poteſt ex motu Cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipſum proximè accedunt, ut globum ejus, in periheliis ſuis verſantes, tantùm non contingere videantur. Horum Theoriam, ab Aſtronomis antehac fruſtra quæſitam, noſtro tandem ſeculo feliciter inventam & per obſervationes certiſſimè demonſtratam præſtantiſſimo noſtro Auctori debemus. Patet igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Ex hiſce verò phænomenis manifeſtum eſt & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis ſuis, reſpicere Solem, &

eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantùm ad corpora Planetarum, in datis diſtantiis, & in eodem ferè plano collocata, ſed etiam ad Cometas, in diverſiſſimis cælorum regionibus & in diverſiſſimis diſtantiis poſitos, pertingit. Hæc igitur eſt natura corporum gravitantium, ut vires ſuas edant ad omnes diſtantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò ſequitur, Planetas & Cometas univerſos ſe mutuò trahere, & in ſe mutuò graves eſſe: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Aſtronomis non incognitâ, & ab actionibus horum Planetarum in ſe invicem oriundâ; quin & ex motu illo lentiſſimo Apſidum, qui ſuprà memoratus eſt, quique à cauſâ conſimili proficiſcitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum ſit, & Terram & Solem & corpora omnia cæleſtia, quæ Solem comitantur, ſe mutuò attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires ſuas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum ſuprà de Terreſtribus oſtenſum eſt. In diverſis autem diſtantiis, erunt & harum vires in duplicatâ ratione diſtantiarum reciprocè: nam ex particulis hâc lege trahentibus componi debere globos eâdem lege trahentes, mathematicè demonſtratur.

Concluſiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur Philoſophis; Effectuum ſcilicet ejuſdem generis, quorum nempe quæ cognoſcuntur proprietates eædem ſunt, eaſdem eſſe Cauſas, & eaſdem eſſe proprietates quæ nondum cognoſcuntur. Quis enim dubitat, ſi Gravitas ſit cauſa deſcenſûs lapidis in *Europâ*, quin eadem ſit cauſa deſcenſûs in *Americâ*? Si Gravitas mutua fuerit inter lapidem & Terram in *Europâ*; quis negabit mutuam eſſe in *Americâ*? Si vis attractiva lapidis & Terræ componatur, in *Europâ*, ex viribus attractivis partium; quis negabit ſimilem eſſe compoſitionem in *Americâ*? Si attractio Terræ ad omnia corporum genera, & ad omnes diſtantias, propagetur in *Europâ*; quidni pariter propagari dicamus in *Americâ*? In hâc Regulâ fundatur omnis Philoſophia: quippe quâ ſublatâ nihil affirmare poſſimus de univerſis. Conſtitutio rerum ſingularum innoteſcit per Obſervationes & Experimenta: inde verò non niſi per hanc Regulam de rerum univerſarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia ſint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Cælis reperiuntur, de quibus experimenta vel obſervationes inſtituere licet; omnino dicendum erit, Gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint Extenſa, Mobilia & Impenetrabilia; ita nulla concipe debere, quæ non ſint Gravia. Corporum Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non niſi per experimenta innoteſcunt: eodem planè modo Gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus obſervationes habemus, Extenſa ſunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, Extenſa eſſe & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt

(⁴) Profecto ſi illud velit Coteſius, Gravitatem naturali quâdam neceſſitate corporibus omnibus quâ corpora ſunt ineſſe, ſicut horum quidque, extendi, moveri poſſe, penetrari (ut plerique exiſtimant)

ſunt Gravia, de quibus obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, Gravia eſſe. Si quis dicat corpora ſtellarum inerrantium non eſſe gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit neque extenſa eſſe, nec mobilia, nec impenetrabilia, cùm hæ Fixarum affectiones nondum ſint obſervatæ. Quid opus eſt viribus? inter primarias qualitates corporum univerſorum vel Gravitas habebit locum; vel Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt.. Et Natura Rerum vel rectè explicabitur per corporum Gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum Extenſionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem ([a]).

Audio nonnullos hanc improbare concluſionem, & de occultis qualitatibus neſcio quid muſſitare. Gravitatem ſcilicet Occultum eſſe quid, perpetuò argutari ſolent; occultas verò cauſas procul eſſe ablegandas à Philoſophiâ. His autem facilè reſpondetur; occultas eſſe cauſas, non illas quidem quarum exiſtentia per obſervationes clariſſimè demonſtratur, ſed his ſolùm quarum occulta eſt & ficta exiſtentia, nondum verò comprobata. Gravitas ergo non erit occulta cauſa motuum cæleſtium; ſiquidem ex phænomenis oſtenſum eſt, hanc virtutem reverâ exiſtere. Hi potius ad occultas fugiunt cauſas; qui neſcio quos Vortices, materiæ cujuſdam prorſus fictitiæ & ſenſibus omnino ignotæ, motibus iiſdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravitas occulta cauſa dicetur, eoque nomine rejicietur è Philoſophiâ, quòd cauſa ipſius Gravitatis occulta eſt & nondum inventa? Qui ſic ſtatuunt, videant nequid ſtatuant abſurdi, unde totius tandem Philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent à compoſitis ad ſimpliciora; ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio: ſi daretur enim, cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes, & quæ ab illis porro pendent, uſque dum à cauſis omnibus vacua fuerit & probè purgata Philoſophia.

Sunt qui Gravitatem præter naturam eſſe dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cùm in Phyſicâ præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorſus objectioni diluendæ, quæ & ipſa Philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim Gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt, quod tamen dici non poteſt: vel eo nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus, atque adeo ex cauſis Mechanicis, originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis ſit deinde futura Philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota Phyſica celeſtis vel ideo minùs placet,

exiſtimant) non poſſe naturali neceſſitate, quâ corpora, illis ineſt, illud vult quod à mente Newtoni alieniſſimum eſt. (Vide Præfationem in Editionem Opticès Secundam. *To ſhew that I do not take Gravity for an eſſential Property of Bodies, I have added one Queſtion concerning its Cauſe.)*

quòd

quòd cum *Carteſii* dogmatibus pugnare, & vix conciliari poſſe videatur. His ſuâ licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem, quam ſibi concedi poſtulant. NEWTONIANAM itaque Philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per phænomena comprobatas, potius quàm fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis verè exiſtentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit ſummus Opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut à pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex quâ verè atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in Philoſophia verâ. In Horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenſo Pondere, vel ab intus concluſo Elatere, oriri poteſt. Quòd ſi oblatum Horologium reverâ ſit inſtructum Pondere; ridebitur qui finget Elaterem, & ex hypotheſi ſic præproperè confictâ motum indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitius perſcrutari, ut ita motûs propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile feretur judicium de Philoſophis illis, qui materiâ quâdam ſubtiliſſimâ cælos eſſe repletos, hanc autem in Vortices indeſinenter agi voluerunt. Nam ſi Phænomenis vel accuratiſſimè ſatisfacere poſſent ex hypotheſibus ſuis; veram tamen Philoſophiam tradidiſſe, & veras cauſas motuum cæleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has reverâ exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum Attractionem habere verum locum in Rerum Naturâ; quinetiam oſtenſum fuerit, quâ ratione motus omnes cæleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, ſi quis dixerit eoſdem motus per Vortices explicari debere, etiamſi id fieri poſſe vel maximè conceſſerimus. Non autem concedimus. Nequeunt enim ullo pacto Phænomena per Vortices explicari; quod ab Auctore noſtro abunde quidem & clariſſimis rationibus evincitur; ut ſomnis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptiſſimo figmento reſarciendo, noviſque porro commentis ornando, infelicem operam addicunt.

Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eâdem velocitate, eâdemque curſûs determinatione moveri, & eandem habere denſitatem, vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Conſtat verò Planetas & Cometas, dum verſantur in iiſdem regionibus cælorum, velocitatibus variis variâque curſûs determinatione moveri. Neceſſario itaque ſequitur, ut Fluidi cæleſtis partes illæ, quæ ſunt ad eaſdem diſtantias à Sole, revolvantur eodem tempore in plagas diverſas, cum diverſis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut tranſire poſſint Planetæ; aliâ, ut tranſire poſſint Cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, univerſa corpora cæleſtia non deferri à materiâ vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos eſſe non ab uno eodemque vortice, ſed à pluribus, qui ab invicem diverſi ſint, idemque ſpatium Soli circumjectum pervadant.

Si

Si plures Vortices in eodem ſpatio contineri, & ſeſe mutuò penetrare, motibuſque diverſis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent eſſe conformes delatorum corporum motibus, qui ſunt ſummè regulares, & peraguntur in Sectionibus Conicis nunc valde eccentricis, nunc ad Circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, quî fieri poſſit, ut iidem integri conſerventur, nec ab actionibus materiæ occurſantis per tot ſecula quicquam perturbentur. Sane ſi motus hi fictitii ſunt magis compoſiti & difficiliùs explicantur, quàm veri illi motus Planetarum & Cometarum; fruſtra mihi videntur in Philoſophiam recipi: omnis enim cauſa debet eſſe effectu ſuo ſimplicior. Conceſſâ fabularum licentiâ, affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmoſphæris, adinſtar Telluris noſtræ; quæ quidem hypotheſis rationi magis conſentanea videbitur, quàm hypotheſis Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmoſphæras, ex naturâ ſuâ, circa Solem moveri & Sectiones conicas deſcribere; qui ſane motus multo faciliùs concipi poteſt, quàm conſimilis motus vorticum ſe invicem permeantium. Denique Planetas ipſos & Cometas circa Solem deferri ab Atmoſphæris ſuis credendum eſſe ſtatuat, &, ob repertas motuum cæleſtium cauſas, triumphum agat. Quiſquis autem hanc fabulam rejiciendam eſſe putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non eſt ovo ſimilius, quàm hypotheſis Atmoſphærarum hypotheſi Vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti, & in Parabolâ moti, deflexionem à curſu rectilineo oriri à Gravitate lapidis in Terram, ab occultâ ſcilicet qualitate. Fieri tamen poteſt ut alius aliquis, naſi acutioris, Philoſophus cauſam aliam comminiſcatur. Finget igitur ille materiam quandam ſubtilem, quæ nec viſu, nec tactu, neque ullo ſenſu percipitur, verſari in regionibus, quæ proximè contingunt Telluris ſuperficiem. Hanc autem materiam, in diverſas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas Parabolicas deſcribere contendet. Deinde verò lapidis deflexionem pulchrè ſic expediet, & vulgi plauſum merebitur. Lapis, inquiet, in Fluido illo ſubtili natat, & curſui ejus obſequendo, non poteſt non eandem unà ſemitam deſcribere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis; ergo lapidem in Parabolà moveri neceſſe eſt. Quis nunc non mirabitur acutiſſimum hujuſce Philoſophi ingenium, ex cauſis Mechanicis, materiâ ſcilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclarè deducentis? Quis verò non ſubſannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è Philoſophiâ feliciter excluſas, denuo revocare ſuſtinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: Cometarum ingens eſt numerus; motus eorum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant. Moventur in orbibus Conicis; hi orbes ſunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cælorum partes, & Planetarum regiones liberrimè pertranſeunt, & ſæpe contra ſignorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certiſſimè confirmantur ex Obſervationibus Aſtronomicis: & per Vortices nequeunt explicari. Imo, ne quidem cum vorticibus Planetarum conſiſtere poſſunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; niſi materia illa fictitia penitus è cælis amoveatur.

Si enim Planetæ circum Solem à Vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque Planetam, ejuſdem denſitatis erunt ac Planeta; uti ſuprà dictum eſt. Itaque materia illa omnis, quæ contigua eſt orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus denſitatem: quæ verò jacet intra orbem magnum atque orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut conſtitutio vorticis permanere poſſit, debent partes minùs denſæ centrum occupare, magis denſæ longius à centro abire. Cùm enim Planetarum tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à Sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem ſervare. Inde verò ſequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Quæ igitur majore intervallo diſtant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde ſi minùs denſæ fuerint, neceſſe eſt ut cedant vi majori, quâ partes centro propiores aſcendere conantur. Aſcendent ergo denſiores, deſcendent minùs denſæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit diſpoſita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquieſcere jam poſſit in æquilibrio conſtituta. Si bina Fluida, quorum diverſa eſt denſitas, in eodem vaſe continentur; utique futurum eſt ut Fluidum, cujus major eſt denſitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non abſimili omnino dicendum eſt, denſiores vorticis partes, majore vi centrifugâ, petere ſupremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, denſitatem habebit, atque adeo vim inertiæ, pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm denſitas & vis inertiæ Telluris: inde verò Cometis trajectis orietur ingens reſiſtentia, & valdè admodum ſenſibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus ſiſtere atque abſorbere poſſe merito videatur. Conſtat autem ex motu Cometarum prorſus regulari, nullam ipſos reſiſtentiam pati, quæ vel minimum ſentiri poteſt; atque adeo neutiquam in materiam ullam incurſare, cujus aliqua ſit vis reſiſtendi, vel proinde cujus aliqua ſit denſitas ſeu vis inertiæ. Nam reſiſtentia Mediorum oritur vel ab inertià materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua eſt; & ſane vix obſervari poteſt in Fluidis vulgo notis, niſi valde tenacia fuerint adinſtar Olei & Mellis. Reſiſtentia quæ ſentitur in Aëre, Aquâ, Hydrargyro, & hujuſmodi Fluidis non tenacibus, ferè tota eſt prioris generis; & minui non poteſt per ulteriorem quemcunque gradum ſubtilitatis, manente Fluidi denſitate vel vi inertiæ, cui ſemper proportionalis eſt hæc reſiſtentia; quemadmodum clariſſimè demonſtratum eſt ab Auctore noſtro in peregregiâ Reſiſtentiarum Theoriâ, quæ paulo nunc accuratiùs exponitur, hâc ſecundâ vice, & per Experimenta corporum cadentium pleniùs confirmatur.

Corpora progrediendo motum ſuum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Eſt itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus verò communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, eſt ut Fluidi denſitas; ergo retardatio, ſeu Reſiſtentia, erit ut eadem Fluidi denſitas; neque ullo pacto tolli poteſt, niſi à Fluido, ad partes corporis poſticas recurrente, reſtituatur motus amiſſus. Hoc autem dici non poterit, niſi impreſſio Fluidi

4 in

in corpus ad partes poſticas æqualis fuerit impreſſioni corporis in Fluidum ad partes anticas; hoc eſt, niſi velocitas relativa, quâ Fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in Fluidum; id eſt, niſi velocitas abſoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit, quàm velocitas abſoluta Fluidi propulſi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli poteſt Fluidorum reſiſtentia, quæ oritur ex eorundem denſitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; Fluidi cæleſtis nullam eſſe vim inertiæ, cùm nulla ſit vis reſiſtendi: nullam eſſe vim quâ motus communicetur, cùm nulla ſit vis inertiæ: nullam eſſe vim quâ mutatio quælibet vel corporibus ſingulis, vel pluribus, inducatur, cùm nulla ſit vis quâ motus communicetur; nullam eſſe omnino efficaciam, cùm nulla ſit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypotheſin, quæ fundamento plane deſtituitur, quæque Naturæ Rerum explicandæ ne minimum quidem inſervit, ineptiſſimam vocare liceat, & Philoſopho prorſus indignam. Qui cælos materiâ fluidâ repletos eſſe volunt, hanc verò non inertem eſſe ſtatuunt; hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cùm hujuſmodi materia fluida ratione nullâ ſecerni poſſit ab inani ſpatio; diſputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quòd ſi aliqui ſint adeo uſque dediti materiæ, ut ſpatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quò tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate Dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus naturæ ſubſidium præſens haberi poſſet ab Æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex Cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus Ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa Mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant Fato univerſa regi, non Providentiâ; materiam ex neceſſitate ſuâ ſemper & ubique extitiſſe, infinitam eſſe & æternam. Quibus poſitis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinatâ aliquâ velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſâ velocitate; in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrimâ formarum & motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanârunt illæ omnes quæ dicuntur Naturæ leges: in quibus multa ſane ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed obſervando atque experiendo addiſcere debemus. Qui veræ Phyſicæ principia legeſque rerum, ſolâ mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet vel ſtatuere Mundum ex neceſſitate fuiſſe, Legeſque

propoſitas ex eâdem neceſſitate ſequi; vel ſi per voluntatem Dei conſtitutus ſit ordo Naturæ, ſe tamen, homuncionem miſellum, quid optimum factu ſit perſpectum habere. Sana omnis & vera Philoſophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ ſi nos vel invitos & reluctantes ad hujuſmodi principia deducunt, in quibus clariſſimè cernuntur conſilium optimum & dominium ſummum ſapientiſſimi & potentiſſimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibuſdam forſan hominibus minùs grata ſint futura. His vel Miracula vel Qualitates Occultæ dicantur, quæ diſplicent: verùm nomina malitioſè indita non ſunt ipſis rebus vitio vertenda; niſi illud fateri tandem velint, utique debere Philoſophiam in Atheiſmo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda Philoſophia, ſiquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præſtantiſſima philoſophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Obſervationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro illuſtriſſimi noſtri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis, ad quæ nec ſpes erat humanam mentem aſſurgere potuiſſe, merito admirantur & ſuſpiciunt quicunque paulo profundiùs in hiſce rebus verſati ſunt. Clauſtris ergo reſeratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum myſteria. Syſtematis Mundani compagem elegantiſſimam ita tandem patefecit, & penitius perſpectandam dedit; ut nec ipſe, ſi nunc reviviſceret, Rex *Alphonſus* vel ſimplicitatem vel harmoniæ gratiam in eâ deſideraret. Itaque Naturæ majeſtatem propiùs jam licet intueri, & dulciſſimâ contemplatione frui; Conditorem verò ac Dominum univerſorum impenſiùs colere & venerari, qui fructus eſt Philoſophiæ multo uberrimus. Cæcum eſſe oportet, qui ex optimis & ſapientiſſimis rerum ſtructuris non ſtatim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam ſapientiam & bonitatem: inſanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium Newtoni Opus adverſus Atheorum impetus munitiſſimum præſidium: neque enim alicunde feliciùs, quàm ex hâc pharetrâ, contra impiam catervam tela deprompſeris. Hoc ſenſit pridem, & in pereruditis concionibus anglicè latinéque editis, primus egregiè demonſtravit Vir in omni Literarum genere præclarus, idemque bonarum Artium fautor eximius Richardus Bentleius, Sæculi ſui & Academiæ noſtræ magnum ornamentum, Collegii noſtri *S. Trinitatis* Magiſter digniſſimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obſtrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cùm à longo tempore celeberrimi Auctoris amicitiâ intimâ frueretur (quâ etiam apud Poſteros cenſeri non minoris æſtimat, quàm propriis ſcriptis quæ literato orbi in deliciis ſunt inclareſcere) amici ſimul famæ & ſcientiarum incremento conſuluit. Itaque cùm exemplaria prioris Editionis rariſſima admodum & immani pretio coëmenda ſupereſſent; ſuaſit ille crebris efflagitationibus, & tantùm non objurgando perpulit denique Virum præſtantiſſimum, nec modeſtiâ minùs quàm eruditione ſummâ inſignem,

nem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis inſuper acceſſionibus ditatam, ſuis ſumptibus & auſpiciis prodire pateretur. Mihi verò, pro jure ſuo, penſum non ingratum demandavit, ut quàm poſſet emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12, 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Aſtronomiæ & Philoſophiæ Experimentalis
Profeſſor *Plumianus*.

AUCTORIS

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM TERTIAM.

IN *Editione hâcce Tertiâ, quam* Henricus Pemberton, M. D. *vir harum rerum peritiſſimus curavit, nonnulla in Libro Secundo de Reſiſtentiâ Mediorum paulò fuſiùs explicantur quàm antea, & adduntur Experimenta nova de Reſiſtentiâ gravium quæ cadunt in Aëre. In Libro Tertio argumentum, quo Lunam in orbe ſuo per Gravitatem retineri probatur, paulo fuſiùs exponitur: & novæ adduntur Obſervationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem à D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam obſervationes aliquot Cometæ illius qui anno* 1680 *apparuit, à D.* Kirk *menſe Novembri in* Germaniâ *habitæ, quæ nuper ad manus noſtras venerunt, & quarum ope conſtet quàm propè orbes Parabolici motibus Cometarum reſpondent. Et orbita Cometæ illius, computante* Halleio, *paulo accuratiùs determinatur quàm antea, idque in Ellipſi. Et oſtenditur Cometam in hâc orbitâ Ellipticâ, per novem cælorum ſigna, non minus accuratè curſum peregiſſe, quàm ſolent Planetæ in orbitis Ellipticis per Aſtronomiam definitis moveri. Orbis etiam Cometæ qui anno* 1723 *apparuit, à D.* Bradleio *Aſtronomiæ apud* Oxonienſes *Profeſſore computatus adjicitur.*

Dabam *Londini,*
Jan. 12, 1725-6.

IS. NEWTON.

ARGU-

A R G U M E N T A   C A P I T U M

LIBRI PRIMI PRINCIPIORUM.

	Definitiones.	Pag. 1
	Axiomata, ſive Leges Motus.	13
Sect. I.	*De Methodo Rationum Primarum & Ultimarum.*	30
Sect. II.	*De inventione Virium Centripetarum.*	41
Sect. III.	*De motu corporum in Conicis Sectionibus eccentricis.*	68
Sect. IV.	*De inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex Umbilico dato.*	87
Sect. V.	*De inventione Orbium ubi Umbilicus neuter datur.*	94
Sect. VI.	*De inventione Motuum in Orbibus datis.*	124
Sect. VII.	*De corporum Aſcenſu & Deſcenſu rectilineo.*	139
Sect. VIII.	*De inventione Orbium in quibus corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.*	153
Sect. IX.	*De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deque Motu Apſidum.*	161
Sect. X.	*De Motu corporum in Superficiebus datis, deque Funependulorum Motu reciproco.*	175
Sect. XI.	*De Motu corporum viribus centripetis ſe mutuò petentium.*	190
Sect. XII.	*De corporum Sphæricorum Viribus Attractivis.*	219
Sect. XIII.	*De corporum non Sphæricorum Viribus Attractivis.*	238
Sect. XIV.	*De Motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.*	254

A R G U-

ARGUMENTA CAPITUM

LIBRI SECUNDI PRINCIPIORUM.

SECT. I.	*De Motu corporum quibus reſiſtitur in ratione Velocitatis.*	Pag. 263
SECT. II.	*De Motu corporum quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatis.*	273
SECT. III.	*De Motu corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ.*	306
SECT. IV.	*De corporum Circulari motu in Mediis reſiſtentibus.*	319
SECT. V.	*De denſitate & compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtaticâ.*	333
SECT. VI.	*De Motu & Reſiſtentiâ corporum Funependulorum.*	348
SECT. VII.	*De Motu Fluidorum & Reſiſtentiâ Projectilium.*	381
SECT. VIII.	*De Motu per Fluida propagato.*	431
SECT. IX.	*De Motu Circulari Fluidorum.*	447

PHILO-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius denſitate et magnitudine conjunctim.

AER denſitate duplicatâ, in ſpatio etiam duplicato, fit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de nive & pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimodè condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium liberè pervadentis, hîc nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem ſub nomine Corporis, vel Maſſæ, in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque

DEFINITIO-NES. pondus: nam ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta pendulorum accuratiſſimè inſtituta, uti poſthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas motûs eſt menſura ejuſdem orta ex velocitate et quantitate materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis; ideoque in corpore duplo majore, æquali cum velocitate, duplus eſt, & duplâ cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III.

Materiæ vis inſita eſt potentia reſiſtendi, quâ corpus unumquodque, quantum in ſe eſt, perſeverat in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc ſemper proportionalis eſt ſuo corpori, neque differt quicquam ab inertiâ maſſæ, niſi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit, ut corpus omne de ſtatu ſuo, vel quieſcendi, vel movendi, difficulter deturbetur. Unde etiam vis inſita nomine ſignificantiſſimo vis inertiæ dici poſſit. Exercet verò corpus hanc vim ſolummodo in mutatione ſtatûs ſui per vim aliam, in ſe impreſſam, factâ; eſtque exercitium illud ſub diverſo reſpectu & Reſiſtentia & Impetus: Reſiſtentia, quatenus corpus ad conſervandum ſtatum ſuum reluctatur vi impreſſæ; Impetus, quatenus corpus idem, vi reſiſtentis obſtaculi difficulter cedendo, conatur ſtatum obſtaculi illius mutare. Vulgus reſiſtentiam quieſcentibus & impetum moventibus tribuit: ſed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, reſpectu ſolo diſtinguuntur ab invicem; neque ſemper verè quieſcunt, quæ vulgo tanquam quieſcentia ſpectantur.

DEFINITIO IV.

Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Conſiſtit hæc vis in actione ſolâ, neque poſt actionem permanet

net in corpore. Perſeverat enim corpus in ſtatu omni novo per ſolam vim inertiæ. Eſt autem vis impreſſa diverſarum originum, ut ex ictu, ex preſſione, ex vi centripetâ.

DEFINITIO V.

Vis centripeta eſt, quâ corpora verſus punctum aliquod, tanquam ad centrum, undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

Hujus generis eſt gravitas, quâ corpora tendunt ad contrum terræ; vis magnetica, quâ ferrum petit magnetem; & vis illa, quæcunque ſit, quâ planetæ perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in fundâ circumactus, à circumagente manu abire conatur; & conatu ſuo fundam diſtendit, eoque fortiùs quo celeriùs revolvitur; &, quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuò retrahit, & in orbe retinet, quoniam in manum, ceu orbis centrum, dirigitur, Centripetam appello. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia à centris orbium recedere; & niſi adſit vis aliqua conatui iſti contraria, quâ cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, ſi vi gravitatis deſtitueretur, non deflecteretur in terram, ſed in lineâ rectâ abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, ſi modo aëris reſiſtentia tolleretur. Per gravitatem ſuam retrahitur à curſu rectilineo, & in terram perpetuò flectitur; idque magis vel minùs pro gravitate ſuâ & velocitate motûs. Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quâcum projicitur, eo minùs deviabit à curſu rectilineo & longiùs perget. Si globus plumbeus, datâ cum velocitate ſecundum lineam horizontalem, à montis alicujus vertice, vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in lineâ curvâ ad diſtantiam duorum milliarium, priuſquam in terram decideret: hic duplâ cum velocitate quaſi duplo longiùs pergeret, & decuplâ cum velocitate quaſi decuplo longiùs: ſi modò aëris reſiſtentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri poſſet pro lubitu diſtantia, in quam projiceretur, & minui

DEFINITIONES.

curvatura lineæ, quam deſcriberet; ita ut tandem caderet ad diſtantiam graduum decem, vel triginta, vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret; vel denique ut in cœlos abiret, & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eâdem ratione, quâ projectile vi gravitatis in orbem flecti poſſet, & terram totam circuire; poteſt & luna, vel vi gravitatis, ſi modò gravis ſit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi ſemper à curſu rectilineo terram verſus, & in orbem ſuum flecti: & ſine tali vi luna in orbe ſuo retineri non poteſt. Hæc vis, ſi juſto minor eſſet, non ſatis flecteret lunam de curſu rectilineo: ſi juſto minor, plus ſatis flecteret, ac de orbe terram verſus deduceret. Requiritur quippe, ut ſit juſtæ magnitudinis: & Mathematicorum eſt invenire vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri poſſit; & viciſſim invenire viam curvilineam, in quam corpus, è dato quovis loco datâ cum velocitate egreſſum, à datâ vi flectatur. Eſt autem vis hujus centripetæ quantitas trium generum, Abſoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ quantitas abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro efficaciâ cauſæ eam propagantis à centro per regiones in circuitu.

Ut vis magnetica pro mole magnetis vel intenſione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix eſt ipſius menſura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus magnetis ejuſdem major in minori diſtantiâ, minor in majori: vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut poſthac patebit) in majoribus diſtantiis à globo terræ; in æqualibus autem diſtantiis eadem undique, propterea quòd corpora omnia cadentia

(gravia an levia, magna an parva) ſublatâ aëris reſiſtentiâ, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix eſt ipſius menſura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc quantitas eſt corporis totius *Centripetentia*, ſeu propenſio in centrum, & (ut ita dicam) pondus; & innoteſcit ſemper per vim ipſi contrariam & æqualem, quâ deſcenſus corporis impediri poteſt.

Haſce virium quantitates, brevitatis gratiâ, nominare licet vires motrices, acceleratrices, & abſolutas; & diſtinctionis gratiâ referre ad corpora centrum petentia, ad corporum loca, & ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compoſitum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad centrum, tanquam cauſâ aliquâ præditum, ſine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt magnes in centro vis magneticæ, vel terra in centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus; nam virium cauſas & ſedes phyſicas jam non expendo.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motûs ex celeritate & ex quantitate materiæ; & vis motrix, ex vi acceleratrice & ex quantitate ejuſdem materiæ conjunctim. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta ſuperficiem terræ, ubi gravitas acceleratrix, ſeu vis gravitans, in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix, ſeu pondus, eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix ſit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas

DEFINITIONES. gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis, duplo vel triplo minoris, erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulſûs, vel propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuò promiſcuè uſurpo; has vires non phyſicè ſed mathematicè tantùm conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis, cauſamve aut rationem phyſicam, alicubi definire; vel centris (quæ ſunt puncta mathematica) vires verè & phyſicè tribuere; ſi fortè aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minùs notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Tempus, Spatium, Locus & Motus, ſunt omnibus notiſſima. Notandum tamen, quòd vulgus quantitates haſce non aliter quàm ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in Abſolutas & Relativas, Veras & Apparentes, Mathematicas & Vulgares diſtingui.

I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & naturâ ſuâ, ſine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur, ut hora, dies, menſis, annus.

II. Spatium Abſolutum, naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt Spatii hujus menſura, ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ à ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & à vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aërii vel cœleſtis definita per ſitum ſuum ad terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi terra, verbi gratiâ, moveatur, ſpatium aëris noſtri, quod relativè & reſpectu terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam aër tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat; eſtque pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non ſitus corporis, vel ſuperficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; ſuperficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimùm inæquales ſunt; ſitus verò propriè loquendo quantitatem non habent, neque tam ſunt loca quàm affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſummâ motuum partium; hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſummâ tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſummâ locorum partium, & propterea internus & in corpore toto. DEFINITIONES.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum; Relativus, de relativo in relativum. Sic in navi, quæ velis paſſis fertur, relativus corporis locus eſt navigii regio illa, in quâ corpus verſatur; ſeu cavitatis totius pars illa, quam corpus implet, quæque adeo movetur unà cum navi: & quies relativa eſt permanſio corporis in eâdem illâ navis regione, vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eâdem parte ſpatii illius immoti, in quâ navis ipſa unà cum cavitate ſuâ & contentis univerſis, movetur. Unde ſi terra verè quieſcat, corpus, quod relativè quieſcit in navi, movebitur verè & abſolutè eâ cum velocitate, quâ navis movetur in terrâ. Sin terra etiam moveatur; orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in terrâ. Et ſi corpus etiam moveatur relativè in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus, tum navis in terrâ, tum corporis in navi: & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in terrâ. Ut ſi terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte unâ: movebitur nauta verè & abſolutè in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terrâ occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Tempus Abſolutum à Relativo diſtinguitur in Aſtronomiâ per æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies natura-

les,

DEFINITIONES.

les, qui vulgo tanquam æquales pro menſurâ temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore menſurent motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis, quo tempus accuratè menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum, ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc à menſuris ſuis ſenſibilibus meritò diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per æquationem aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis phænomenis neceſſitas, tum per experimentum horologii oſcillatorii, tum etiam per eclipſes ſatellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium temporis eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium ſpatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi loca. In tempore quoad ordinem ſucceſſionis, in ſpatio quoad ordinem ſitûs, locantur univerſa. De illorum eſſentiâ eſt, ut ſint loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur Abſoluta Loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt Abſoluti Motus.

Verùm quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum à corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur; nec incommodè in rebus humanis: in philoſophicis autem abſtrahendum eſt à ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum reverâ quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem quies & motus abſoluti & relativi ab invicem per proprietates ſuas & cauſas & effectus. Quietis proprietas eſt, quòd corpora verè quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cùm poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longè ultrà, quieſcat abſolutè; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad lon-

longinquum illud datam poſitionem ſervet necne; quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit. DEFINITIONES.

Motûs proprietas eſt, quòd partes, quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motûs, & progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quieſcunt. Et propterea motus verus & abſolutus definiri nequit per tranſlationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent enim corpora externa non ſolùm tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam verè quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; &, ſublatâ illa tranſlatione, non verè quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur. Sunt enim ambientia ad incluſa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, ſine tranſlatione de viciniâ corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quòd moto loco movetur unà locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum & abſolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco ſuo primo, & motu loci hujus de loco ſuo, & ſic deinceps; uſque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo nautæ ſuprà memorato. Unde motus integri & abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſuprà retuli. Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant poſitiones ad invicem; atque adeo ſemper manent immota, ſpatiumque conſtituunt quod immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari & mutari poteſt, ſine viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia ſolùm corpora, ad quæ fit relatio; ut iis ceden-

DEFINITIONES. tibus mutetur relatio illa, in quâ hujus quies vel motus relativus conſiſtit. Rurſum motus verus à viribus in corpus motum impreſſis ſemper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſariò. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ ſit relatio, ſic imprimantur, ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in quâ motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus, ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minimè conſiſtit.

Effectus, quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motûs circularis. Nam in motu circulari nudè relativo, hæ vires nullæ ſunt; in vero autem & abſoluto, majores vel minores pro quantitate motûs. Si pendeat ſitula à filo prælongo, agaturque perpetuò in orbem, donec filum à contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aquâ, & unà cum aquâ quieſcat; tum vi aliquâ ſubitaneâ agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: at poſtquam vas, vi in aquam paulatim impreſſâ, effecit ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim à medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo quieſcat in eodem relativè. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motûs, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Poſtea verò, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuò creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relativè. Quare conatus iſte non pendet à tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales tranſlationes

lationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi, pro variis relationibus ad externa, innumeri ſunt; &, relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in ſyſtemate eorum, qui cœlos noſtros infra cœlos fixarum in orbem revolvi volunt, & planetas ſecum deferre; ſingulæ cœlorum partes, & planetæ, qui relativè quidem in cœlis ſuis proximis quieſcunt, moventur verè. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quàm fit in verè quieſcentibus) unáque cum cœlis delati participant eorum motus, &, ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur. DEFINITIONES.

Quantitates relativæ non ſunt igitur eæ ipſæ quantitates, quarum nomina præ ſe ferunt, ſed ſunt earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus, loco quantitatum menſuratarum, utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motûs propriè intelligendæ erunt hæ menſuræ ſenſibiles; & ſermo erit inſolens & purè mathematicus, ſi quantitates menſuratæ hîc intelligantur. Proinde vim inferunt ſacris literis, qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neque minùs contaminant Matheſin & Philoſophiam, qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus quidem veros corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus actu diſcriminare, difficillimum eſt; propterea quòd partes ſpatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam argumenta deſumi poſſunt, partim ex motibus apparentibus, qui ſunt motuum verorum differentiæ; partim ex viribus, quæ ſunt motuum verorum cauſæ & effectus. Ut ſi globi duo, ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret, ex tenſione fili, conatus globorum recedendi ab axe motûs, & inde quantitas motus circularis computari poſſet. Deinde ſi vires quælibet æquales in alternas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, ſimul imprimerentur; innoteſceret, ex auctâ

B 2 vel

DEFINITIONES.

vel diminutâ fili tenſione, augmentum vel decrementum motûs; & inde tandem inveniri poſſent facies globorum, in quas vires imprimi deberent, ut motus maximè augeretur; id eſt, facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur, & faciebus oppoſitis quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motûs. In hunc modum inveniri poſſet & quantitas & determinatio motûs hujus circularis in vacuo quovis immenſo, ubi nihil extaret externum & ſenſibile, quocum globi conferri poſſent. Si jam conſtituerentur in ſpatio illo corpora aliqua longinqua, datam inter ſe poſitionem ſervantia, qualia ſunt ſtellæ fixæ in regionibus cœlorum: ſciri quidem non poſſet, ex relativâ globorum tranſlatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus eſſet motus. At ſi attenderetur ad filum, & deprehenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe, quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum, ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motûs colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contrà ex motibus, ſeu veris ſeu apparentibus, eorum cauſas & effectus, docebitur fuſiùs in ſequentibus. Hunc enim in finem tractatum ſequentem compoſui.

AXIOMATA,

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus illud à viribus impreſſis cogitur ſtatum ſuum mutare.

PROJECTILIA perſeverant in motibus ſuis, niſi quatenus à reſiſtentiâ aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt ſeſe à motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem planetarum & cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares, in ſpatiis minùs reſiſtentibus factos, conſervant diutiùs.

Axiomata, ſive

LEX II.

Mutationem motûs proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſivè impreſſa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur) ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur.

LEX III.

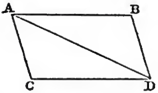
Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuò ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis, utrinque diſtentus, eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum; tantumque impediet progreſſum unius, quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſuâ quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutatæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, ſed motuum; ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc lex in attractionibus, ut in ſcholio proximo probabitur.

COROL.

COROL I.

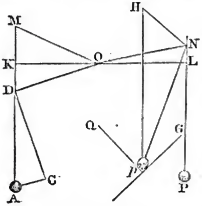
Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



Si corpus dato tempore, vi ſolâ M in loco A impreſſâ, ferretur uniformi cum motu ab A ad B; & vi ſolâ N in eodem loco impreſſa, ferretur ab A ad C; compleatur parallelogrammum ABDC, & vi utrâque feretur corpus illud, eodem tempore, in diagonali ab A ad D. Nam quoniam vis N agit ſecundum lineam AC ipſi BD parallelam, hæc vis, per legem II, nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD, à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD, ſive vis N imprimatur, ſive non; atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ BD. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in lineâ CD: & idcirco in utriuſque lineæ concurſu, D, reperiri neceſſe eſt. Perget autem motu rectilineo ab A ad D, per legem I.

COROL. II.

Et hinc patet compoſitio vis directæ, AD, *ex viribus quibuſvis obliquis,* AB *&* BD; *& viciſſim reſolutio vis cujuſvis directæ,* AD, *in obliquas quaſcunque,* AB *&* BD. *Quæ quidem compoſitio & reſolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.*



Ut ſi de rotæ alicujus ([a]) centro, O, exeuntes radii inæquales, OM, ON, filis MA, NP ſuſtineant pondera A & P, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: per centrum O agatur recta KOL, filis perpendiculariter occurrens in K & L; centroque O, & intervallorum OK, OL majore OL, deſcribatur circulus occurrens filo MA in D: & actæ rectæ OD pa-

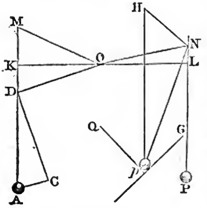
([a]) Cujus rotæ planum ſuper plano horizontis ad perpendiculum erectum ſit.

rallela

AXIOMATA, SIVE

rallela ſit AC, & perpendicularis DC. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, K, L, D, affixa ſint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac ſi ſuſpenderentur à punctis K & L, vel D & L. Ponderis autem A exponatur vis tota per lineam AD, & hæc reſolvetur in vires AC, CD: quarum AC, trahendo radium OD directe à centro, nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera DC, trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet, ac ſi perpendiculariter traheret radium OL ipſi OD æqualem; hoc eſt, idem atque pondus P, ſi modò pondus illud ſit ad pondus A, ut vis DC ad vim DA, id eſt (ob ſimilia triangula ADC, DOK), ut OK ad OD, ſeu OL. Pondera igitur A & P, quæ ſunt reciprocè ut radii in directum poſiti, OK & OL, idem pollebunt, & ſic conſiſtent in æquilibrio: quæ eſt proprietas notiſſima Libræ, Vectis, & Axis in peritrochio. Sin pondus alterutrum ſit majus quàm in hâc ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quòd ſi pondus *p*, ponderi P æquale, partim ſuſpendatur filo N*p*, partim incumbat plano obliquo *p*G ([b]): agantur *p*H, NH, prior horizonti, poſterior plano *p*G perpendicularis; & ſi vis ponderis, *p*, deorſum tendens, exponatur per lineam *p*H, reſolvi poteſt hæc in vires *p*N, HN. Si filo *p*N perpendiculare eſſet planum aliquod *p*Q, ſecans planum alterum *p*G in lineâ ad horizontem parallelâ ([c]); & pondus *p* his planis *p*Q, *p*G ſolummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *p*N, HN, perpendiculariter; nimirum planum *p*Q vi *p*N, & planum *p*G vi HN. Ideoque ſi tollatur planum *p*Q, ut pondus tendat filum; quoniam filum, ſuſtinendo



([b]) Quod planum rotæ ad perpendiculum ſecare intelligendum eſt.

([c]) PLANUM *p*Q ſecare planum *p*G ſecundum rectam cum plano horizontis parallelam hoc modo oſtendimus.

Cùm recta N*p*, quæ jacet in plano rotæ, planum *p*Q ad perpendiculum inſiſtat, planum rotæ idem planum *p*Q ad perpendiculum ſecabit. (El. XI. 18.) Sed planum rotæ planum etiam *p*G ad perpendiculum ſecat (id enim poſitum eſt). Planorum igitur *p*G, *p*Q communis interſectio planum rotæ ad perpendiculum inſiſtit. (El. XI. 19.) Rurſum cùm planum horizontis & planum *p*G rotæ planum ad perpendiculum utrumque inſiſtant, communis illorum interſectio

tinendo pondus, jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eàdem vi *p*N, quâ planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis PN, ut *p*N ad *p*H. Ideoque ſi pondus *p* ſit ad pondus A in ratione, quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum filorum ſuorum *p*N, AM à centro rotæ, & ratione directâ *p*H ad *p*N; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideo ſe mutuò ſuſtinebunt; ut quilibet experiri poteſt.

Pondus autem *p*, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet Cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires Cunei & Mallei innoteſcunt: utpote cùm vis quâ pondus *p* urget planum *p*Q ſit ad vim, quâ idem, vel gravitate ſuâ vel ictu mallei, impellitur ſecundum lineam *p*H in plana, ut *p*N ad *p*H; atque ad vim, quâ urget planum alterum *p*G, ut *p*N ad NH. Sed & vis Cochleæ per ſimilem virium diviſionem colligitur; quippe quæ Cuneus eſt à Vecte impulſus. Uſus igitur corollarii hujus latiſſimè patet, & latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota, ab auctoribus diverſimodè demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, vectibus, nervis tenſis & ponderibus directè vel obliquè aſcendentibus, cæteriſque potentiis mechanicis componi ſolent, ut & vires tendinum ad animalium oſſa movenda.

COROL. III.

Quantitas motûs quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eique contraria reactio æquales ſunt per legem III, ideoque per legem II æquales in motibus efficiunt muta-

terſectio rotæ planum ad perpendiculum inſiſtet. (El. XI. 19.) Planorum igitur, *p*G, *p*Q communis interſectio cum communi plani *p*G & horizontis interſectione parallela erit. Nempe cùm, ex iis quæ oſtendimus, utraque planum rotæ ad perpendiculum inſiſtat. Atque idcirco communis planorum *p*G, *p*Q interſectio cum plano horizontis parallela erit. Nam ſi occurreret ea plano horizontis, cùm in plano *p*G tota jaceat, concurſus ejus cum horizontis plano ad communem plani horizontis cum plano illo *p*G interſectionem neceſſariò eſſet. Atque ita concurrerent rectæ, quas parallelas eſſe inter ſe oſtendimus; quod abſurdum eſſet. Atque hinc conficitur Theorema haud inutile, neque indignum quod in elementis Geometriæ ſolidæ reponatur. "Si tria plana, quorum duo non ſunt inter ſe parallela, ſuper quarto quodam ad perpendiculum erecta ſint, duorum quorumlibet ex erectis communis interſectio cum tertio parallela erit."

 tiones

AXIOMATA, SIVE tiones verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis ſubducetur motui corporis inſequentis, ſic ut ſumma maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit ſubductio de motu utriuſque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut ſi corpus ſphæricum A ſit triplo majus corpore ſphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B ſequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipſius A ſit ad motum ipſius B, ut ſex ad decem: ponantur motus illis eſſe partium ſex & partium decem, & ſumma erit partium ſexdecim. In corporum igitur concurſu, ſi corpus A lucretur motûs partes tres vel quatuor vel quinque, corpus B amittet partes totidem; ideoque perget corpus A poſt reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & B cum partibus ſeptem vel ſex vel quinque; exiſtente ſemper ſummâ partium ſexdecim, ut priùs. Si corpus A lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur poſt concurſum cum partibus quindecim vel ſexdecim vel ſeptendecim vel octodecim; corpus B, amittendo tot partes quot A lucratur, vel cum unâ parte progredietur, amiſſis partibus novem; vel quieſcet, amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem; vel cum unâ parte regredietur, amiſſo motu ſuo & (ut ita dicam) unâ parte ampliùs; vel regredietur, cum partibus duabus, ob detractum motum progreſſivum partium duodecim. Atque ita ſummæ motuum conſpirantium 15+1 vel 16+0, & differentiæ contrariorum 17−1, & 18−2, ſemper erunt partium ſexdecim, ut ante concurſum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenietur cujuſque velocitas, ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem, ut motus pòſt eſt ad motum antè. Ut in caſu ultimo, ubi corporis A motus erat partium ſex ante reflexionem, & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motûs partes ſex ante reflexionem ad motûs partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

Quòd ſi corpora, vel non ſphærica, vel diverſis in rectis moventia

ventia incidant in ſe mutuò obliquè, & requirantur eorum motus poſt reflexionem; cognoſcendus eſt ſitus plani à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſûs: dein corporis utriuſque motus (per Corol. II.) diſtinguendus eſt in duos; unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quòd corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt, ſic ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ priùs. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

COROL. IV.

Commune gravitatis centrum corporum duorum, vel plurium, ab actionibus corporum inter ſe, non mutat ſtatum ſuum vel motûs vel quietis; & propterea corporum omnium in ſe mutuò agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum.

Nam ſi puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & diſtantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ recta. Hoc poſtea in lemmate XXIII ejuſque corollario demonſtratur, ſi punctorum motus fiant in eodem plano; & eâdem ratione demonſtrari poteſt, ſi motus illi non fiant in eodem plano. Ergo ſi corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd linea horum corporum centra, in rectis uniformiter progredientia, jungens dividitur, ab hoc centro communi, in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum

AXIOMATA, SIVE rum & centri corporis tertii, in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione; & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum, quæ actionibus in ſe invicem, aliiſque omnibus in ſe extrinſecus impreſſis, omnino vacant, ideoque moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum.

Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium, cùm diſtantiæ centrorum utriuſque à communi gravitatis centro ſint reciprocè ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud, vel ad eodem recedendi, æquales inter ſe. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur, nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuò agentium commune gravitatis centrum, ob actionem illam, nullatenus mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur, à communi corporum omnium centro, in partes ſummis totalibus corporum, quorum ſunt centra, reciprocè proportionales; ideoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt, quòd commune illud omnium centrum, ob actiones binorum corporum inter ſe, nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem, in ſtatu motûs ejus vel quietis, nunquam inducunt. Quare cùm centrum illud, ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in rectâ aliquâ progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi à viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur

turbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium lex eadem, quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motûs vel quietis. Motus enim progreſſivus, ſeu corporis ſolitarii, ſeu ſyſtematis corporum, ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROL. V.

Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum ſine motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroque caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus, quibus corpora ſe mutuò feriunt. Ergo per legem II æquales erunt congreſſuum effectus in utroque caſu; & propterea manebunt motus inter ſe, in uno caſu, æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modò ſe habent in navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

COROL. VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter ſe, & à viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II, ideoque nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe.

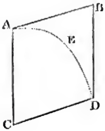
Scholium.

Hactenus principia tradidi à Mathematicis recepta, & experientiâ multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum gravium eſſe in duplicatâ

ratione

AXIOMATA, SIVE

ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabolâ; conſpirante experientiâ, niſi quatenus motus illi per aëris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente, gravitas uniformis, ſingulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo, imprimit vires æquales in corpus illud, & velocitates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit, & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et ſpatia temporibus proportionalibus deſcripta, ſunt ut velocitates & tempora conjunctim; id eſt, in duplicatâ ratione temporum. Et corpore ſurſum projecto, gravitas uniformis vires imprimit, & velocitates aufert, temporibus proportionales; ac tempora aſcendendi ad altitudines ſummas ſunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ ſunt ut velocitates ac tempora conjunctim; ſeu in duplicatâ ratione velocitatum. Et corporis, ſecundum rectam quamvis projecti, motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur.



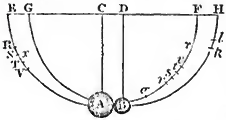
Ut ſi corpus A motu ſolo projectionis, dato tempore, deſcribere poſſet rectam AB; & motu ſolo cadendi, eodem tempore, deſcribere poſſet altitudinem AC: compleatur parallelogrammum ABDC, & corpus illud, motu compoſito, reperietur in fine temporis in loco D; & curva linea AED, quam corpus illud deſcribet, erit Parabola, quam recta AB tangit in A, & cujus ordinata BD eſt ut AB*q*. Ab iiſdem legibus & corollariis pendent demonſtrata de temporibus

(d) Sub finem Anni 1668. Vide Acta Philoſophica.

(e) HANC doctrinam Walliſius, brevibus primùm ſcriptis cum Societate Regiâ communicatam, poſtea in libro ſuo *De Motu*, anno 1671 in lucem edito, capite decimo tertio, fuſè expoſuit. Hugenius autem eleganter eandem & accuratè pertractavit in libro *de Motu Corporum ex percuſſione*, quem poſt mortem auctoris, anno 1703, cum Dioptricâ ac ſcriptis quibuſdam aliis, in lucem emiſerunt viri docti Burcherus de Volder & Bern Fullenius, quibus id negotii Hugenius teſtamento demandaverat.

(f) NEMPE cùm RV ſit retardatio tota, quam motus corporis penduli, ex aëris renixu, oſcillatione geminâ ſubierit; retardatio, quam vis eadem renitentia aëris, ſimplicis oſcillationis ſpatio, corporis motui intulerit, hæc illius RV ſemiſſis erit. Sed ſimplicis illius oſcillationis initium neque à puncto altiſſimo R ſumendum eſt, unde corpus pendulum primùm demiſſum eſt, neque ab infimo V, quod poſt unam oſcillationem redeundo illud attigerit; ſed à puncto aliquo duorum R, V intermedio: quia majorem motûs retardationem, arcum oſcillationis primæ ampliorem quàm anguſtiorem ſecundæ percurrendo, corpus ſubierit. Punctum autem illud intermedium proximè ſaltem ita definieris, ſi arcum ST, quartæ parti arcûs RV æqualem, in medio arcûs RV ita collocaveris, ut punctum arcûs ST medium ipſius RV medium occupet; unde ea fiet arcûs RT, in punctis S, T diviſio, quam Newtonus fieri juſſit. Arcum enim utrumque RV, ST punctum *x* medium dividat: et

bus oſcillantium pendulorum, ſuffragante horologiorum experientiâ quotidianâ. Ex his iiſdem, & lege tertiâ, *Chriſtophorus Wrennus* eques auratus, *Johannes Walliſius S. T. D.* & *Chriſtianus Hugenius*, ætatis ſuperioris Geometrarum facilè principes, regulas congreſſuum & reflexionum duorum corporum ſeorſim invenerunt, & eodem fere tempore (d) cum *Societate Regiâ* communicârunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes: & primus quidem *Walliſius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt (e). Sed & veritas comprobata eſt à *Wrenno*, coram *Regiâ Societate*, per experimentum pendulorum: quod etiam *Clariſſimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum, ut hoc experimentum cum theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio, cum reſiſtentiæ aëris, tum etiam vis elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora ſphærica A, B filis parallelis & æqualibus AC, BD, à centris C, D. His centris & intervallis deſcribantur ſemicirculi EAF, GBH, radiis CA, DB biſecti. Trahatur corpus A ad arcûs EAF punctum quodvis R, &, ſubducto corpore B, demittatur inde; redeatque, poſt unam oſcillationem, ad punctum V.

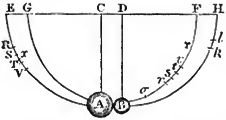


Eſt RV retardatio ex reſiſtentiâ aëris (f). Hujus RV fiat ST pars quarta ſita in medio; ita ſcilicet ut RS & TV æquentur, ſitque RS ad ST ut 3 ad 2. Et iſta ST exhibebit retardationem in deſcenſu ab S ad A quàm proximè. Reſtituatur corpus B in lo-

et ſit Υ punctum arcûs AF, quod primâ oſcillatione, corpus pendulum, à puncto R demiſſum attigerit. Arcus tres RA, AΥ, AV, erunt quàm proximè arithmetici: arcus autem tres RA, Ax, AV arithmetici: arcus igitur Ax, AΥ inter ſe æquales erunt, cùm uterque duorum RA, AV ſimul ſumptorum ſemiſſis ſit. Præterea cùm RA, AV ſimul ſumpti duplo arcûs AΥ æquales ſint, ſi addatur illis duplus arcus AΥ, efficietur quadruplum arcûs AΥ. Ergo arcus AΥ vel illi æqualis Ax, duorum RΥ, ΥV ſimul ſumptorum pars quarta erit. Duorum igitur RΥ, ΥV, quos oſcillatione geminâ corpus pendulum, ab R demiſſum, abſolverit, horum inquam parte quartâ arcus SA paulo major, arcus TA paulo minor erit. Corpus igitur pendulum, à puncto S demiſſum, motûs retardationem, per arcum SA deſcendendo, parte quartâ retardationis RV paulo majorem ſubierit; & per arcum ipſo TA anguſtiorem ad contrarias partes aſcendendo, ejuſdem RV parte quartâ tantundem fere minorem. Unde ſpatio oſcillationis integræ, à puncto illo S inchoatæ, dimidiam ipſius RV retardationem corpus pendulum ſubierit. Et quanquam hujus dimidiâ, ſive parte quartâ totius RV, major ſit pars illa quæ lapſu per arcum SA impreſſa fuerit, ut minor ſit corporis penduli in loco A velocitas quàm ſi de loco T per inane illud decidiſſet, tantilla tamen differentia erit, ut nullius prorſus ſit momenti. Q. E. D.

cum ſuum. Cadat corpus A de puncto s, & velocitas ejus in loco reflexionis A, ſine errore ſenſibili, tanta erit, ac ſi in vacuo cecidiſſet de loco T. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcûs TA. Nam velocitatem penduli, in puncto infimo, eſſe ut chordam arcûs, quem cadendo deſcripſit, propoſitio eſt Geometris notiſſima. Poſt reflexionem perveniat corpus A ad locum *s*, & corpus B ad locum *k*. Tollatur corpus B; & inveniatur locus *v*, à quo ſi corpus A demittatur, & poſt unam oſcillationem redeat ad locum *r*, ſit *st* pars quarta ipſius *rv* ſita in medio; ita videlicet ut *rs* & *tv* æquentur: & per chordam arcûs *t*A exponatur velocitas, quam corpus A proximè poſt reflexionem habuit in loco A. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus A, ſublatâ aeris reſiſtentiâ, aſcendere debuiſſet. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus B aſcendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud aſcendere debuiſſet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac ſi in vacuo conſtituti eſſemus. Tandem ducendum erit corpus A (ut ita dicam) in chordam arcûs TA, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco A, proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcûs *t*A, ut habeatur motus ejus in loco A proximè poſt reflexionem. Et ſic corpus B ducendum erit in chordam arcûs B*l*, ut habeatur motus ejus proximè poſt reflexionem. Et ſimili methodo, ubi corpora duo ſimul demittuntur de locis diverſis, inveniendi ſunt motus utriuſque tam ante, quàm poſt reflexionem; & tum demum conferendi ſunt motus inter ſe, & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quàm æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, puta pedum octo vel duodecim vel ſexdecim, concurrerent; reperi ſemper, ſine errore trium digitorum in menſuris, ubi corpora ſibi mutuò directè occurrebant, æquales eſſe mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatas, atque ideo actionem & reactionem ſemper eſſe æquales. Ut ſi corpus A incidebat in corpus B quieſcens cum novem partibus motûs, & amiſſis ſeptem partibus pergebat, poſt reflexionem, cum duabus; corpus B reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam

obviam ibant, A cum duodecim partibus & B cum ſex, & redibat A cum duabus; redibat B cum octo, factâ detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius A ſubducantur partes duodecim, & reſtabit nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis B, partium ſex, ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quòd ſi corpora ibant ad eandem plagam, A velociùs cum partibus quatuordecim, & B tardius cùm partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat A cum quinque partibus; pergebat B cum quatuordecim, factâ tranſlatione partium novem de A in B. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motûs, quæ ex ſummâ motuum conſpirantium, & differentiâ contrariorum, colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accuratè. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere, ſic ut corpora in ſe mutuò impingerent in loco infimo AB; tum loca s, k notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis corporibus pendulis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.



LEGES MOTUS.

Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolutè dura eſſe, vel ſaltem perfectè elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo, quòd experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æquè ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui, in certâ proportione pro quantitate vis elaſticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſûs. Certiùs id affirmabitur de perfectè elaſticis (g). In imperfectè elaſticis velocitas

(g) HISCE credo Newtonus inſinuare voluit, aliud eſſe corporum duritiem, aliud vim reſiliendi; ac

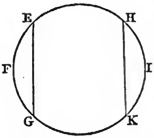
AXIOMATA, SIVE tas reditûs minuenda eſt ſimul cum vi elaſticâ; propterea quòd vis illa (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur) certa ac determinata ſit, quantum ſentio, faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſûs in datâ ratione (h). Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter conſtrictâ ſic tentavi. Primùm demittendo pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſûs ut 5 ad 9 circiter. Eâdem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia, quoad ictus & reflexiones, per theoriam comprobata eſt, quæ cum experientiâ planè congruit.

In attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis A, B ſe mutuò trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi, quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur verſus corpus alterum B, quàm illud alterum B in prius A, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis A, quàm preſſione corporis B; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus B, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum; proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vaſculis propriis

ac propterea quæ Wrennus & Hugenius de duris pronunciârunt, cum eadem illi reſilientia intelligerent quæ dura, de iis potiùs affirmanda eſſe, quæ maximâ vi reſiliendi prædita ſint. Nimirum Newtonus cum Walliſio id *Durum* appellat "quod ictui nequaquam cedit: Id *Molle*, quod ictui ita cedit, ut priſtinam figuram amittat; ut Lutum, Cera, Plumbum, aliaque ſimilia quæ ictu deformantur: Id *Elaſticum*, quod utut ictui aliquantum cedat, ſe tamen in priſtinam formam ſuopte marte reſtituit" (Wallis, De Motu, Cap. XI. Prop. 1. Schol.) Si igitur id ſit durum, quod ictui nequaquam cedat, hoc eſt cujus partes nullâ vi impreſſâ aut flecti aut ſeparari poſſint; certè potentiâ illâ inſitâ, quâ res, vi ſubitâ deformatæ, figuris ſuis reſtituuntur, & inter ſe colliſæ reſiliunt;

propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aquâ ſtagnante juxtà fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent. LEGES MOTUS.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua eſt. Secetur terra FI, plano quovis EG, in partes duas EGF & EGI: & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuò. Nam ſi plano alio HK, quod priori EG parallelum ſit, pars major EGI ſecetur in partes duas, EGHK & HKI, quarum HKI æqualis ſit parti priùs abſciſſæ EFG: manifeſtum eſt, quòd pars media EGKH, pondere proprio, in neutram partium extremarum propendebit; ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema HKI toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam EGF; ideoque vis, quâ partium HKI & EGKH ſumma, EGI, tendit verſus partem tertiam EGF, æqualis eſt ponderi partis HKI, id eſt ponderi partis tertiæ EGF. Et propterea pondera partium duarum EGI, EGF in ſe mutuò ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, terra tota, in libero æthere fluitans, ponderi majori cederet; &, ab eo fugiendo, abiret in infinitum.



Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciprocè ut vires inſitæ: ſic, in movendis inſtrumentis mechanicis, agentia idem pollent, & conatibus contrariis ſe mutuò ſuſtinent, quorum velocitates, ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciprocè ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ, oſcillante librâ, ſunt reciprocè ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt, pondera, ſi rectâ aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt

unt; hâc, inquam, quod durum eſt prorſus carebit: adeoque, cùm nihil ſine cauſâ fiat, corporum durorum, ſi concurrerint, nulla videtur poſſe fieri reflexio. *Vide Le Sœur, & Jacquier ad locum.*

(b) FIGURIS utique corporum ſpecie & magnitudine datis. In diverſis corporum magnitudinibus, quorum figuræ inter ſe ſint ſimiles; differentiæ, quibus velocitates relativæ poſt congreſſum aberunt ab eâ quæ antè fuerat, laterum homologorum inter ſe proportiones ſervant: ſicut ſuadere exiſtimantur experimenta quædam Rizetti, quæ in Commentariis Academiæ Bononienſis memorantur. Hæc autem fide doctiſſimorum Patrum Le Sœur & Jacquier ipſe refero.

AXIOMATA, SIVE

reciprocè ut punctorum, à quibus ſuſpenduntur, diſtantiæ ab axe libræ; ſin planis obliquis, aliiſve admotis obſtaculis, impedita aſcendunt vel deſcendunt obliquè; æquipollent, quæ ſunt reciprocè ut aſcenſus & deſcenſus, quatenus facti ſecundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in Trochleâ, ſeu Polyſpaſto, vis manûs funem directè trahentis, quæ ſit ad pondus, vel directè, vel obliquè aſcendens, ut velocitas aſcenſûs perpendicularis ad velocitatem manûs funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In Horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, ſi ſunt reciprocè ut velocitates partium rotularum, in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuò. Vis Cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii, eâ in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Vires, quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi, ſunt ad vim Mallei in cuneum, ut progreſſus cunei, ſecundum determinationem vis à malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, ſecundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par eſt ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contrà: unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere Problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi datâ ſuperandi. Nam ſi machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & reſiſtentis ſint reciprocè ut vires; agens reſiſtentiam ſuſtinebit: & majori cum velocitatum diſparitate eandem vincet. Certè ſi tanta ſit velocitatum diſparitas, ut vincatur etiam reſiſtentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quàm ex continuorum, & ab invicem ſeparandorum cohæſione, & elevandorum ponderibus oriri ſolet; ſuperata omni eâ reſiſtentiâ, vis redundans accelerationem motûs ſibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Cæterùm Mechanicam tractare non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantùm oſtendere, quàm late pateat quámque certa ſit lex tertia motûs. Nam ſi æſtimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate

conjunctim; & ſimiliter reſiſtentis reactio æſtimetur conjunctim ex ejus partium ſingularum velocitatibus & viribus reſiſtendi ab earum attritione, cohæſione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni inſtrumentorum uſu, ſibi invicem ſemper æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum, & ultimò imprimitur in corpus omne reſiſtens; ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria.

DE

MOTU CORPORUM

LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propriùs ad invicem accedunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

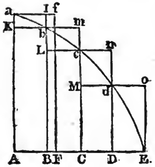
SI negas; fiant ultimò inæquales, & ſit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ D: contra hypotheſin ([a]).

([a]) Vide Tom. I. p. 237.

LEMMA

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis AacE, *rectis* Aa, AE *& curvâ* acE *comprehenſâ, inſcribantur parallelogramma quotcunque,* Ab, Bc, Cd, *&c. ſub baſibus* AB, BC, CD, *&c. æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, *&c. figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, *&c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico, quòd ultimæ rationes, quas habent ad ſe invicem figura inſcripta* AKbLcMdD, *circumſcripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *ſunt rationes æqualitatis.*



Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum Kl, Lm, Mn, Do; hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi Kb & altitudinum ſummâ Aa, id eſt, rectangulum ABla. Sed hoc rectangulum, eo quòd latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I) figura inſcripta & circumſcripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. Q. E. D.

LEMMA II.

Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum FAaf. Hoc erit majus quàm differentia figuræ inſcriptæ et figuræ circumſcriptæ; at, latitudine ſuâ AF in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, &c. comprehenditur, coincidit ultimò cum figurâ curvilineâ.

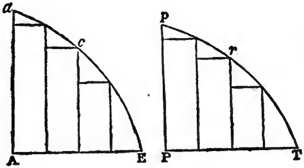
Corol.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta, quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *ac*E), non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

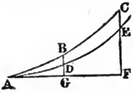
Si in duabus figuris A*ac*E, P*pr*T, *inſcribantur (ut ſuprà) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus; &, ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico, quòd figuræ duæ* A*ac*E, P*pr*T, *ſunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figurâ priore (per lemma III) ad ſummam priorem, & figurâ poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. Q. E. D (b).

Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem

(b) *Cor. H.* 1. Si duæ Curvæ (ABC, ADE) axem habeant communem (AF) hujus autem curvæ ordinatæ ad ordinatas alterius datam aliquam rationem gerant, binis utique ſemper conferendo, quæ ex eodem axis puncto eductæ ſint; areæ curvarum AFC, AFE, datam ordinatarum inter ſe rationem habebunt. Nempe hoc dico; à puncto G, in axe curvarum, AF, pro lubitu aſſumpto, eductâ ad perpendiculum rectâ GB, quæ curvis duabus, ABC, ADE, illi in puncto B, huic in puncto D, occurrat; ſi rectis BG, DG, data aliqua ratio intercedat, quæ eadem obtineat à quocunque demum axis puncto ordinata educatur, eadem Arearum etiam, AFC, AFE, inter ipſas ratio erit.



Cor.

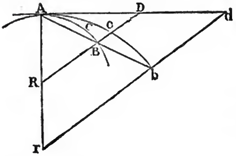
invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam ſi in lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultimâ ratione partis ad partem (c).

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuò reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quàm rectilinea; & areæ ſunt in duplicatâ ratione laterum.

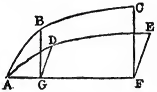
LEMMA VI.

Si arcus quilibet poſitione datus, ACB, *ſubtendatur chordâ* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ* (d), *tangatur à rectâ, utrinque productâ,* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant, & coeant; dico, quòd angulus* BAD, *ſub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum, & ultimò evaneſcet.*



Nam ſi angulus ille non evaneſcit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem; & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypotheſin.

Cor. II. 2. Quòd ſi recta GB non ad perpendiculum, ſed cum datâ quàvis ad axem communem AF inclinatione educatur, idem obtinebit.

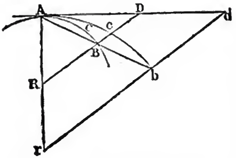


Cor. II. 3. Si verò Curvæ duæ ABC, ADE, eo modo ad ſe mutuò ſint affectæ, ut rectæ, GB, GD, à puncto aliquo G in axe communi, AF, ordinatim eductæ, datis quidem ſed diverſis ad axem illam inclinationibus, datam inter ſe rationem gerant; quæ eadem obtineat, à quocunque demum axis puncto ordinatæ illæ educantur; vel ſic etiam areæ ABCF, ADEF, data quædam ratio intercedet; ea nimirum, quam rectæ à punctis B, D in axem AF ad perpendiculum demiſſæ inter ſe habent.

(c) Vide Tom. I. p. 240. (d) Vide Tom. I. p. 242.

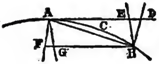
LEMMA VII.

Iiſdem poſitis; dico quòd ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem eſt ratio æqualitatis.



Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur ſemper AB & AD ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & ſecanti BD parallela agatur *bd*. Sitque arcus A*cb* ſemper ſimilis arcui ACB. Et punctis A, B coeuntibus, angulus *d*A*b*, per lemma ſuperius, evaneſcet; ideoque rectæ ſemper finitæ A*b*, A*d*, & arcus intermedius A*cb* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hiſce ſemper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius ACB evaneſcent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. E. D.

Corol. 1. Unde ſi per B ducatur tangenti parallela BF, rectam quamvis AF per A tranſeuntem perpetuò ſecans in F, hæc BF ultimò ad arcum evaneſcentem ACB rationem habebit æqualitatis; eo quòd completo parallelogrammo AFDB rationem ſemper habet æqualitatis ad AD.



Corol. 2. Et ſi per B & A ducantur plures rectæ BE, BD, AF, AG, ſecantes tangentem AD & ipſius paralellam BF; ratio ultima abſciſſarum omnium AD, AE, BF, BG, chordæque & arcûs AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR (c) *cum arcu* ACB, *chordâ* AB, *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *conſtituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico, quòd ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis. (Vide fig. Lemm.* VII.)

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur

(c) Intellige rectam AR poſitione datam; rectam verò BR eâ lege mobilem, ut cum aliâ aliquâ, poſitione datâ, ſemper ea parallela maneat.

ſemper

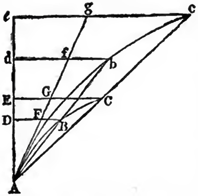
ſemper AB, AD, AR ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipſique RD parallela agi *rbd*, & arcui ACB ſimilis ſemper ſit arcus A*cb*. Et coeuntibus punctis A, B, angulus *b*A*d* evaneſcet, & propterea triangula tria ſemper finita *r*A*b*, *r*A*cb*, *r*A*d* coincident, ſuntque eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia RAB, RACB, RAD fient ultimò ſibi invicem ſimilia & æqualia. Q. E. D.

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA IX.

Si recta AE *&* *curva* ABC *poſitione datæ ſe mutuò ſecent in angulo dato,* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C *ſimul accedant ad punctum* A: *dico, quòd areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimò ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur ſemper AD produci ad puncta longinqua *d* & *e*; ut ſint A*d*, A*e* ipſis AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis DB, EC parallelæ, quæ occurrant ipſis AB, AC productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva A*bc* ipſi ABC ſimilis, tum recta A*g*, quæ tangat curvam utramque in A, & ſecet ordinatam applicatas DB, EC, *db*, *ec* in F, G, *f*, *g*. Tum, manente longitudine A*e*, coeant puncta B, C cum puncto A; &, angulo *c*A*g* evaneſcente, coincident areæ curvilineæ A*bd*, A*ce* cum rectilineis A*fd*, A*ge*; ideoque (per Lemma V.) erunt in duplicatâ ratione laterum A*d*, A*e*: ſed his areis proportionales ſemper ſunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE (f). Ergo & areæ ABD, ACE ſunt ultimò in duplicatâ ratione laterum AD, AE. Q. E. D.



(f) Vide Tom. I. p. 244.

De Motu Corporum

LEMMA X.

Spatia, quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ deſcribit, ſive vis illa determinata & immutabilis ſit, ſive eadem continuò augeatur, vel continuò diminuatur; ſunt, ipſo motûs initio, in duplicatâ ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas AD, AE, *(Vide fig. Lem.* IX.) & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC; & ſpatia his velocitatibus deſcripta, erunt ut areæ ABD, ACE his ordinatis deſcriptæ (g), hoc eſt, ipſo motûs initio (per Lemma IX) in duplicatâ ratione temporum AD, AE. Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc facilè colligitur, quòd corporum, ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium, errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum à figurarum ſimilium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus, ſine viribus iſtis, pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quàm proximè.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus, ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis, generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis, quæ corpora, urgentibus diverſis viribus, deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motûs initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motûs initio, deſcripta directè, & quadrata temporum inverſè.

Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directè, & vires inverſè.

SCHOLIUM.

Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directè vel inverſè: ſenſus eſt, quòd prior augetur vel diminuitur in

(g) Vide Tom I. p. 244.

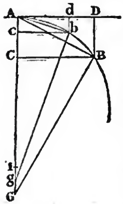
eâdem

eâdem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directè vel inverſè: ſenſus eſt, quòd prima augetur vel diminuitur in ratione, quæ componitur ex rationibus, in quibus aliæ, vel aliarum reciprocæ, augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directè & C directè & D inverſè: ſenſus eſt, quòd A augetur, vel diminuitur, in eâdem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$; hoc eſt, quòd A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione datâ.

LEMMA XI.

Subtenſa evaneſcens anguli contactûs, in Curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs habentibus, eſt ultimò in ratione duplicatâ ſubtenſæ arcûs contermini.

Caſ. 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus AD, ſubtenſa anguli contactûs ad tangentem perpendicularis BD, ſubtenſa arcûs AB. Huic ſubtenſæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG, occurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta *d*, *b*, *g*, ſitque J interſectio linearum BG, AG ultimò facta, ubi puncta D, B accedunt uſque ad A. Manifeſtum eſt, quòd diſtantia GJ minor eſſe poteſt quàm aſſignata quævis. Eſt



autem (ex naturâ circulorum per puncta ABG, A*bg* tranſeuntium) AB *quad.* æquale AG × BD, & A*b quad.* æquale A*g* × *bd*; ideoque ratio AB *quad.* ad A*b quad.* componitur ex rationibus AG ad A*g* & BD ad *bd*. Sed quoniam GJ aſſumi poteſt minor longitudine quâvis aſſignatâ, fieri poteſt, ut ratio AG ad A*g* minùs differat à ratione æqualitatis, quàm pro differentiâ quâvis aſſignatâ; ideoque ut ratio AB *quad.* ad A*b quad.* minùs differat à ratione BD ad *bd* quàm pro differentiâ quâvis aſſignatâ. Eſt ergo, per Lemma 1, ratio ultima AB *quad.* ad A*b quad.* eadem cum ratione ultimâ BD ad *bd*. Q. E. D.

Caſ. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem

dem ſemper erit ratio ultima BD ad *bd* quæ priùs, ideoque eadem ac AB *quad.* ad A*b quad.* Q. E. D.

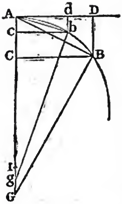
Caſ. 3. Et quamvis angulus D non detur, ſed recta BD ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege conſtituatur; tamen anguli D, *d*, communi lege conſtituti, ad æqualitatem ſemper vergent; & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis aſſignatâ, ideoque ultimò æquales erunt, per Lem. I; & propterea lineæ BD, *bd* ſunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. Q. E. D.

Corol. 1. Unde cùm tangentes AD, A*d*, arcus AB, A*b*, & eorum ſinus BC, *bc* fiant ultimò chordis AB, A*b* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimò ut ſubtenſæ BD, *bd*.

Corol. 2. Eorundem quadrata ſunt etiam ultimò ut ſunt arcuum ſagittæ, quæ chordas biſecant, & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ BD, *bd* (h).

Corol. 3. Ideoque ſagitta eſt in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, A*db* ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum AD, A*d*, inque ſeſquiplicatâ laterum DB, *db*; utpote in compoſitâ ratione laterum AD & DB, A*d* & *db* exiſtentia.



Sic & triangula ABC, A*bc* ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum BC, *bc*. Rationem verò ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici & ſubduplicatâ componitur.

Corol. 5. Et quoniam DB, *db* ſunt ultimò parallelæ & in duplicatâ ratione ipſarum AD, A*d*: erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB, A*db* (ex naturâ Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB, A*db*; & ſegmenta AB, A*b* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ et hæc ſegmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium AD, A*d*, tum chordarum & arcuum AB, A*b*.

(h) Vide Tom I. p. 248.

SCHOL-

Scholium.

Cæterùm in his omnibus ſupponimus angulum contactûs nec infinitè majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinitè minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum A, nec infinitè parvam eſſe, nec infinitè magnam; ſeu intervallum AJ finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt DB ut AD^3: quo in caſu circulus nullus per punctum A, inter tangentem AD & curvam AB, duci poteſt, proindeque angulus contactûs erit infinitè minor circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactûs pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore. Et ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactûs, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinitè major, & quilibet poſterior infinitè major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries, utrinque in infinitum pergens, angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinitè major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2 & AD^3 inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum, ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem (i).

Quæ de curvis lineis, deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facilè applicantur ad ſolidorum ſuperficies curvas, & contenta. Præmiſi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonſtrationes, more veterum geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minùs geometrica cenſetur; malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere;

(i) Vide Keil. Introduct. ad Veram Phyſicam, Lect. 4. & Newtoni Geometr. Analyt. Cap. VII. § 23—26.

&

De Motu Corporum

& propterea limitum illorum demonſtrationes, quâ potui brevitate, præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutiùs utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quòd quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima; ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æquè contendi poſſet, nullam eſſe corporis, ad certum locum ubi motus finiatur pervenientis, velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam; ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: per velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cùm attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum, & quâcum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quâcum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quâcum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quâcum eſſe (vel augeri aut minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes, quem velocitas in fine motûs attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cúmque hic limes ſit certus & definitus, Problema eſt verè geometricum, eundem determinare. Geometrica verò omnia, in aliis geometricis determinandis ac demonſtrandis, legitimè uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quòd ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contrà quàm Euclides de incommenſurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonſtravit. Verùm hæc objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ

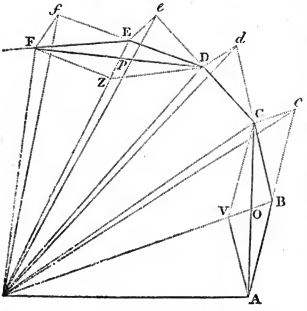
timæ rationes illæ, quibuſcum quantitates evaneſcunt, reverâ non ſunt rationes quantitatum ultimarum; ſed limites, ad quos quantitatum, ſine limite decreſcentium, rationes ſemper appropinquant; & quas propiùs aſſequi poſſunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, nunquam verò tranſgredi; neque priùs attingere, quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data eſt differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis; nec tamen ideò dabuntur quantitates ultimæ, ſeu maximæ, quarum iſta eſt ratio. In ſequentibus igitur, ſiquando, façili rerum conceptui conſulens, dixero quantitates quàm minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

SECTIO II.

De inventione virium centripetarum.

PROP. I. THEOR. I.

Areas, quas corpora in gyros acta, radiis ad immobile centrum virium ductis, deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.



Dividatur tempus in partes æquales; & primâ temporis parte deſcribat corpus, vi inſitâ, rectam AB. Idem ſecundâ temporis parte, ſi nil impediret, rectâ pergeret ad c, (per Leg. I.) deſcribens lineam Bc æqualem ipſi AB; adeo ut radiis AS, BS, cS ad centrum actis, confectæ forent æquales

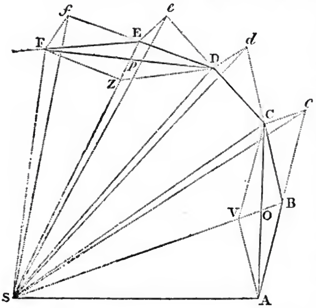
quales areæ ASB, BS*c*. Verùm ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno; efficiatque, ut corpus de rectâ B*c* declinet, & pergat in rectâ BC. Ipſi BS parallela agatur *c*C, occurrens BC in C; & completâ ſecundâ temporis parte, corpus (per Legum corol. 1.) reperietur in C, in eodem plano cum triangulo ASB. Junge SC; & triangulum SBC, ob parallelas SB, C*c*, æquale erit triangulo SB*c*, atque ideo etiam triangulo SAB. Simili argumento ſi vis centripeta ſucceſſivè agat in C, D, E, &c. faciens ut corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas CD, DE, EF, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC, & SDE ipſi SCD, & SEF ipſi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: & componendo, ſunt arearum ſummæ quævis SADS, SAFS inter ſe, ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF, (per corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: ideoque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus Curvæ perpetuò retrahitur, aget indefinenter; Areæ verò quævis deſcriptæ, SADS, SAFS, temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iiſdem temporibus in hoc caſu proportionales. Q. E. D.

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti eſt, in ſpatiis non reſiſtentibus, reciprocè ut perpendiculum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demiſſum. Eſt enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut ſunt baſes æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF; & hæ baſes ſunt reciprocè ut perpendicula in ipſas demiſſa.

Corol. 2. Si arcuum duorum, æqualibus temporibus, in ſpatiis non reſiſtentibus, ab eodem corpore ſucceſſivè deſcriptorum chordæ, AB, BC, compleantur in parallelogrammum ABCV, & hujus diagonalis BV, in eâ poſitione quam ultimò habet, ubi arcus illi

(a) Agatur enim à puncto C recta CV cum B*c* parallela, quæ cum rectâ SB in V concurrat, & jungatur AV. Cùm rectæ C*c*, BV inter ſe ſint parallelæ, necnon B*c*, CV; figura CVB*c* parallelogramma erit. Erunt igitur B*c*, CV inter ſe æquales. (El. I. 34.) Sed BA, B*c* inter ſe æquales. Id enim oſtenſum. Quare CV, BA inter ſe æquales erunt. Sunt autem inter ſe parallelæ; quare CB, AV inter ſe æquales & parallelæ erunt. (El. I. 33.) Figura igitur CBAV eſt parallelogramma, ſub chordis AB, BC; & hujus diagonios erit recta BV, quæ vergit ad centrum virium.

(b) Junctæ



illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; tranſibit eadem per centrum virium([a]).

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus, in ſpatiis non reſiſtentibus, deſcriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogramma ABCV, DEFZ; vires in B & E ſunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium BV, EZ, ubi arcus iſti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per Legum corol. 1.) ex motibus B*c*, BV, & E*f*, EZ: atqui BV & EZ, ipſis C*c* & F*f* æquales, in demonſtratione propoſitionis hujus generabantur ab impulſibus vis centripetæ in B & E; ideoque ſunt his impulſibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet, in ſpatiis non reſiſtentibus, à motibus rectilineis retrahuntur, ac detorquentur in orbes curvos, ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus deſcriptorum ſagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas biſecant, ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio ([b]).

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas, horizonti perpendiculares, arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

([b]) JUNCTÆ OA, DF, rectis BV, EZ in O, *p*, occurrant. Arcus per puncta tria A, B, C, atque alius per alia tria, D, E, F æqualibus temporibus conficiuntur. Atque horum chordæ ſunt rectæ AC, DF quas ſagittæ BO, E*p* medias dividunt; ſunt autem ſagittæ illæ rectarum BV, EZ, ſemiſſes. Nimirum cùm rectæ CA, BV; FD, EZ; parallelogrammorum CBAV, FEDZ ſint diagoniæ, atque omnis parallelogrammi diagoniæ medias ſe mutuò dividant.

 Corol.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unà cum centris virium quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROP. II. THEOR. II.

Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, & radio ducto ad punctum, vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum.

Caſ. 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per Leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quàm minima SAB, SBC, SCD, &c. *(fig. p. 43.)* circa punctum immobile S, temporibus æqualibus, æqualia deſcribere, agit in loco B ſecundum lineam parallelam ipſi *c*C (per Prop. XXXIX. lib. 1. Elem. & Leg. II.) hoc eſt, ſecundum lineam BS (c); & in loco C ſecundum lineam ipſi *d*D parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam SC, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. Q. E. D.

Caſ. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde eſt, ſive quieſcat ſuperficies, in quâ corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem unà cum corpore, figurâ deſcriptâ, & puncto ſuo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In ſpatiis vel mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; ſed inde declinant in conſequentia, ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modò arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In mediis etiam reſiſtentibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur,

(c) NEMPE productâ AB in *c*, ut ſit B*c* rectæ AB æqualis, junctiſque C*c*, S*c*; corpus, ſi in illud nulla egiſſet vis externa, quo tempore in locum C pervenerit, eo tempore locum *c* rectæ A*c* attigiſſet. Vis autem illa quæ ictu ſuo, in loco B impreſſo, id effecerit, ut corpus, quod vis inſita movendi per rectam AB, certo quodam temporis puncto, ad locum *c* appuliſſet, eo ipſo temporis puncto ſit in C; hæc inquam vis corpus in B impulerit ſecundum rectam cum rectâ C*c* parallelam (per Leg. II. cor. 2.) Sed cùm triangula SBA, SBC, inter ſe æqualia ſint (id enim poſitum erat) et

acceleratur, virium directiones declinant à concurſu radiorum verſus plagam, in quam fit motus.

Scholium.

Urgeri poteſt corpus à vi centripetâ compoſitâ ex pluribus viribus. In hoc caſu ſenſus propoſitionis eſt, quòd vis illa, quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum S. Porro ſi vis aliqua agat perpetuò ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem; hæc faciet, ut corpus deflectatur à plano ſui motûs: ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

PROP. III. THEOR. III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius, utcunque moti, ducto deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſitâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum L, & corpus alterum T: & (per Legum corol. VI.) ſi vi novâ, quæ æqualis & contraria ſit illi quâ corpus alterum T urgetur, urgeatur corpus utrumque ſecundum lineas parallelas; perget corpus primum, L, deſcribere circa corpus alterum, T, areas eaſdem ac priùs: vis autem, quâ corpus alterum T urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum, T, ſibimet ipſi jam relictum, vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum L, urgente differentiâ virium, id eſt, urgente vi reliquâ, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum T deſcribere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum T ut centrum. Q.E.D.

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum, L, radio ad alterum T ducto, deſcribit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus juxta legum corollarium ſecundum

et triangula SEA, SEc inter ſe æqualia (id enim efficitur per El. I. 38.) erunt triangula SBC, SBc, quibus baſis SB communis, inter ſe æqualia. Rectæ igitur Cc, BS inter ſe parallelæ. (El. I. 39.) Recta igitur BS à puncto B educta eſt cum rectâ Cc parallela. Vis igitur centripeta in loco B ſecundum rectam BS corpus impulit. Simili argumento efficietur vim centripetam in loco C ſecundum rectam CS, ſecundum DS in loco D, ſecundum ES in E, & in omni Curvæ puncto ſecundum rectam à puncto illo verſus centrum virium eductam corpus impuliſſe. Q. E. D.

De Motu Corporum

dum compoſitâ), quâ corpus prius L urgetur, ſubducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, quâ corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum T ut centrum.

Corol. 2. Et, ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum T quamproximè.

Corol. 3. Et vice verſâ, ſi vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum T, erunt areæ illæ temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus L, radio ad alterum corpus T ducto, deſcribit areas, quæ, cum temporibus collatæ, ſunt valdè inæquales; & corpus illud alterum, T, vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ, ad corpus illud alterum T tendentis, vel nulla eſt, vel miſcetur, & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: viſque tota ex omnibus, ſi plures ſunt vires, compoſita ad aliud (ſive immobile ſive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; ſi modò vis centripeta ſumatur, quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

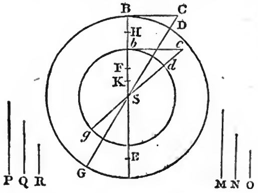
Scholium.

Quoniam æquabilis arearum deſcriptio index eſt centri, quod vis

(d) Hoc eſt, Vires centripetæ inter ſe proportionem gerunt, quæ componitur è ratione duplicatâ arcuum, qui corporum motu ſimul ſunt confecti, & ratione radiorum contrariâ.

(e) Demonstratio Newtoni explicatior facta.

In circulorum BDG, *bdg*, quorum centrum S, peripheriis corpora duo, B, *b*, motu unumquodque æquabili intelligantur circumagi.



Propter motum corporis B æquabilem, arcus circuli BD, motu corporis B confecti, temporum, quibus fuerint confecti, proportiones inter ſe ſervabunt. Sectores autem cujuſlibet circuli ſunt inter ſe, ut arcus quibus inſiſtunt. Sectores igitur circuli BD, motu corporis B deſcripti, temporum, quibus ſunt deſcripti, inter ſe proportiones ſervant. Vis igitur centripeta quâ corpus B motu recto detorquetur, & in circumflexu circuli BD continetur, in circuli illius centrum perpetim agit (per Th. II.) Simili argumento efficietur vim aliam centripetam, quâ corpus *b* motu recto detorquetur

vis illa reſpicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbitâ ſuâ retinetur; quidni uſurpemus in ſequentibus æquabilem arearum deſcriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in ſpatiis liberis peragitur?

PROP. IV. THEOR. IV.

Corporum, quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & eſſe inter ſe, ut ſunt arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios (d).

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. II. & Corol. 2. Prop. I. & ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus quàm minimis deſcriptorum ſinus verſi per Corol. 4. Prop. I. hoc eſt, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. VII. & propterea, cùm hi arcus ſint ut arcus temporibus quibuſvis æqualibus deſcripti, & diametri ſint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. Q. E. D (e).

Corol. 1. Cùm arcus illi ſint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione ſimplici radiorum inverſè.

Corol. 2. Et, cùm tempora periodica ſint in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inverſè; vires

torquetur & in circuli *bd* circumflexu continetur, in centrum illius circuli perpetim agere. Corporum igitur, quæ circulos diverſos, BD, *bd*, motibus æquabilibus deſcribunt, vires centripetæ ad centra circulorum tendunt. Quæ prima pars eſt propoſitionis Newtonianæ.

Dico præterea virium illarum inter ipſas proportionem compoſitam eſſe è ratione duplicatâ arcuum, qui ſimul deſcribuntur, & ratione radiorum contrariâ. Sint BD, *bd* duo quilibet arcus ſimul confecti. Ducantur tangentes BC, *bc*, quibus junctæ SD, *sd* et productæ in punctis C, *c* occurrant. Propter motus corporum æquabiles, arcus BD, *bd*, datam aliquam inter ſe proportionem ſervabunt; quæ ea ſit quam recta M, pro arbitrio ſumenda, habeat ad rectam aliam N. Eandem verò habeat N ad tertiam O. Dico vim centripetam, quâ corpus B perpetim urgetur, ad vim centripetam aliam, quâ perpetim urgetur corpus *b*, proportionem habere quæ componitur è proportione rectæ M ad O, & ratione rectarum SB, *sb* contrariâ; ſive eam, quam habet rectangulum M × *sb* ad rectangulum O × SB. Rectæ enim SD, *sd* circulis iterum in punctis G, *g* occurrant. Si arcus BD, *bd* infinitè minuantur; vires centripetæ, quibus urgentur corpora B, *b*, in locis B, *b*, inter ſe rationem gerent, quæ rectarum evaneſcentium CD, *cd* ultima erit. (Prop. I. Cor. 4.) Oſtendendum igitur harum evaneſcentium ultimam inter ipſas rationem eam eſſe, quam rectangulum M × *sb* habet ad rectangulum O × SB. Id autem oſtendimus hoc modo. Rectangula GC × CD, *gc* × *cd*, quadratis ex BC, *bc* ſingulatim ſunt æqualia. (El. III. 36.) Et evaneſcentibus arcubus BD, *bd*, tangentes BC, *bc* arcubus illis BD, *bd* fiunt ultimò æquales (per Lem. VII.) Tangentes igitur BC, *bc* evaneſcentes,

De Motu Corporum

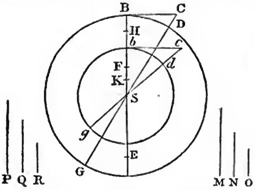
vires centripetæ ſunt in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inverſè (f).

Corol. 3. Unde ſi tempora periodica æquentur, & propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contrà.

Corol. 4. Si & tempora periodica, & velocitates ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contrà (g).

Corol.

neſcentes, arcuum evaneſcentium ultimò inter ſe rationem habent; hoc eſt, datam rectarum M, N inter ipſas rationem. Quare quadrata ex BC, *bc* evaneſcentibus, quadratorum ex M, N, ſive rectarum M, O, ultimò inter ſe proportionem induent. Quare rectangulis quoque GC × CD, *gc* × *cd* evaneſcentibus proportio ultima ea erit, quæ eſt rectæ M ad rectam O. Rectangula autem GC × CD, *gc* × *cd* evaneſcentia evaneſcentibus GD × DC, *gd* × *dc* ultimò æqualia fiunt; ac proinde evaneſcentium SD × DC, *sd* × *dc*, ultimò illa dupla fient. Rectangula igitur GC × CD, *gc* × *dc* evaneſcentia cum evaneſcentibus SD × DC, *sd* × *dc* proportione ultimò convenient. Rectangula igitur SD × DC, *sd* × *dc* evaneſcentia datam ultimò rectarum M, O inter ſe proportionem gerent, ſive rectangulorum M × *sd*, O × *sd* datam. Sed rectangulum *sd* × *dc* eſt ad rectangulum SD × *dc* ut rectangulum O × *sd* ad rectangulum O × SD. Neque huic rationi officiet rectæ *cd* magnitudo, magna illa parvave fuerit. Ex æquo igitur rectangula evaneſcentia SD × DC, SD × *dc*, hoc eſt rectæ CD, *cd* evaneſcentes, rectangulorum M × *sd*, O × SD ſive M × *sb*, O × SB ultimò inter ſe proportionem gerent. Atque eadem viribus centripetis inter ipſas ratio intercedet. Q. E. D.



Cor. H. Si capiatur SE ejus longitudinis, ut SB habeat ad illam SE, proportionem illam, quam M ad O; vis centripeta, quâ urgetur corpus B, erit ad vim centripetam, quâ urgetur corpus *b*, ut *sb* ad SE. Nam ratio rectæ *sb* ad illam SE componetur è rationibus ejuſdem *sb* ad SB, & SB ad SE; hoc eſt, è rationibus *sb* ad SB, & M ad O. Et ex eiſdem compoſita eſt ratio rectanguli M × *sb* ad rectangulum O × SB. Quare *sb* erit ad SE ut M × *sb* ad O × SB, hoc eſt (ex modò oſtenſis) ut vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis *b*. Q. E. D.

(f) Primum quod aſſumpſit Newtonus, "Tempora periodica habere inter ſe rationem è ratione radiorum cum velocitatum contrariâ compoſitam," id nos oſtendimus hoc modo. Habeat recta P, pro arbitrio ſumenda, ad rectam aliam Q proportionem eam quam tempus converſionis corporis B ad tempus converſionis corporis *b*. Dico rectam P ad rectam Q rationem habere eam, quæ componitur è ratione SB ad *sb*, & ratione velocitatum contrariâ, ſive contrariâ rectarum M, N; nimirum cùm rectæ illæ M, N ſint ut velocitates. Vel quod idem eſt, dico P eſſe ad Q ut rectangulum SB × N ad rectangulum *sb* × M. Sunt enim circuitus circulorum ſpatia à corporibus B, *b*, converſionum temporibus, quæ tempora ſunt inter ſe ut P, Q, ſingulatim confecta. Atqui circuitus circulorum proportione conveniunt cum radiis. Radii igitur SB, *sb* erunt inter ſe ut ſpatia, temporibus, quæ ſunt ut P, Q, motibus æquabilibus confecta. Et rectæ M, N ſunt inter ſe ut velocitates quibus ſpatia illa conficiuntur. Quare rectangulum SB × N erit ad rectangulum *sb* × M ſicut P ad Q (per Theorema v^m. Galilæi *De Motu Æquabili*). Q. E. D.

Hoc autem oſtenſo, conſequetur illud quod Newtonus affirmavit, vires centripetas rationem inter ſe habere ex radiorum ratione cum duplicatâ temporum contrariè ſumptâ compoſitam. Hoc eſt ſi capiatur R, quæ proportione cum duabus P, Q tertia utique conveniat, erit vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis *b* ut rectangulum SB × R ad rectangulum *sb* × P.

Nam

Corol. 5. Si tempora periodica ſint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii (h): & contrà. LIBER PRIMUS.

Corol. 6. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, & propterea velocitates reciprocè in radiorum ratione ſubduplicatâ; vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum: & contrà (i).

Corol.

Nam cùm P ad Q rationem habeat è rationibus rectæ N ad M rectæque SB ad *sb* compoſitam, quadratum ex illâ P ad quadratum ex Q rationem habebit, quæ componitur è rationibus quadrati ex N ad quadratum ex M & quadrati ex SB ad quadratum ex *sb*. Hoc eſt, ſi capiatur SF cum duabus SB, *sb* proportione tertia, cùm ſit $P:R = P^2:Q^2$; & $SB:SF = SB^2:sb^2$; & præterea O ad M ut N^2 ad M^2; habebit P ad R rationem è rationibus O ad M et SB ad SF compoſitam. Eſt autem O ad M ut SE ad SB (conſtruct. Cor. H.) Habebit igitur P ad R rationem è rationibus SE ad SB, & SB ad SF compoſitam. Ex eiſdem autem compoſita eſt ratio ipſius SE ad SF. Erit igitur P ad R ut SE ad SF. Ratio igitur rectæ SE ad *sb*, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ SE ad SF, rectæque SF ad *sb*; ea componetur è rationibus rectæ P ad R rectæque SF ad *sb*. Hoc eſt, è rationibus rectæ P ad R rectæque *sb* ad SB. (Tres enim SB, *sb*, SF proportione conveniunt. Ita enim factum eſt.) Erit igitur $SE : sb = P \times sb : R \times SB$. Invertendo $sb : SE = SB \times R : sb \times P$. Eſt autem *sb* ad SE ut vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis *b*. (Cor. H.) Erit igitur vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis *b*, ut rectangulum $SB \times R$ ad rectangulum $sb \times P$. Q. E. D.

(g) CAPIATUR SH duarum SB, *sb* proportione media. Et ſit P ad Q ut SB ad SH. Dicit Newtonus vires centripetas corporum B, *b* æquales eſſe. Erit enim $P^2 : Q^2 = SB^2 : SH^2$. Ergo $P : R = SB : sb$. Rectangula igitur, $P \times sb$, $R \times SB$ inter ſe æqualia. Vires igitur centripetæ, quæ ſunt ut rectangula illa (per Cor. 2.) inter ſe æquales. E contrario, ſi æquales ſint vires centripetæ, erit P ad Q, necnon M ad N, ut SB ad SH. Æquatis enim viribus centripetis, rectangula $SB \times R$, $sb \times P$ inter ſe æqualia erunt (Cor. 2.) Ergo $P : R = SB : sb$; $P^2 : Q^2 = SB^2 : SH^2$; & $P : Q = SB : SH$. Jam verò, cùm P ſit ad Q ut SB ad SH, erit (per Cor. 2.) $SB \times N : sb \times M = SB : SH = SB \times N : SH \times N$. Quare $sb \times M = SH \times N$. Ergo $M : N = SH : sb = SB : SH$. Q. E. D.

(h) Per Cor. 1.

(i) CAPIATUR SK ad quam SF proportionem habeat eam quam *sb* ad SF; ut quatuor illarum SB, *sb*, SF, SK continua ſit analogia. Ratio igitur rectæ SB ad SK triplicata erit ejus, quam SB habet ad *sb*. Et ratio rectæ P ad R duplicata eſt ejus, quam recta P habet ad Q; ſive ejus, quam tempus converſionis corporis B habet ad tempus converſionis corporis *b*. Dicit Newtonus, ſi ratio duplicata temporum eadem ſit, quæ ratio triplicata radiorum; hoc eſt, ſi P ſit ad R ut SB ad SK, fore ut ratio velocitatum eadem ſit, quæ radiorum ſubduplicata contrariè ſumpta; ſive ut M ſit ad N ut SH ad SB: ac præterea fore ut virium centripetarum ratio eadem ſit quæ radiorum duplicata contrariè ſumpta; ſive ut *sb* ſit ad SE ut sb^2 ad SB^2. E contrario, ſi eadem ponatur virium centripetarum ratio, quæ radiorum duplicata eſt contrariè ſumpta; hoc eſt, ſi ponatur eſſe *sb* ad SE ut sb^2 ad SB^2; dicit Newtonus, fore ut eadem ſit temporum duplicata, quæ radiorum triplicata ratio; ſive fore ut P ſit ad R ut SB ad SK.

Primum verò quod dixit Newtonus, poſito $P : R = SB : SK$, fore ut ſit $M : N = SH : SB$, id nos oſtendimus hoc modo. Ratio rectæ P ad R compoſita eſt è rationibus rectæ SB ad SF rectæque O ad M; id enim in demonſtrando corollario ſecundo nos oſtendimus. Erit igitur P ad R ut rectangulum $SB \times O$ ad rectangulum $SF \times M$. Sed P eſt ad R, ut SB ad SK (id enim poſitum). Rectangulum igitur $SB \times O$ erit ad rectangulum $SF \times M$ ut SB ad SK, ſive ut rectangulum $SB \times O$ ad rectangulum $SK \times O$. Rectangula igitur $SF \times M$, $SK \times O$ erunt inter ſe æqualia. Quare $M : O = SK : SF = sb : SB$. Sed $M : O = M^2 : N^2$. Quare $M^2 : N^2 = sb : SB = sb^2 : SH^2 = SH^2 : SB^2$. Ac propterea $M : N = SH : SB$. Q. E. D.

Jam quod alterum dixit Newtonus, poſito $P : R = SB : SK$, fore ut ſit $sb : SE = sb^2 : SB^2$, illud quoque nos oſtendimus hoc modo. Cùm ſit $P : R = SB : SK$ erit rectangulum $P \times sb$ ad rectangulum $R \times sb$ ut rectangulum $R \times SB$ ad rectangulum $R \times SK$. Permutando $P \times sb : R \times SB = R \times sb :$

De Motu Corporum

Corol. 7. Et univerſaliter, ſi tempus periodicum ſit ut radii R poteſtas quælibet R^n, & propterea velocitas reciprocè ut radii poteſtas R^{n-1}; erit vis centripeta reciprocè ut radii poteſtas R^{2n-1}: & contrà (^{k}).

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicatâ. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum à centris pro radiis uſurpando.

Corol. 9. Ex eâdem demonſtratione conſequitur etiam; quòd arcus,

$R \times SK = sb : SK = SB : SF = SB^2 : sb^2$. Invertendo $SB \times R : sb \times P = sb^2 : SB^2$. Sed $SB \times R : sb \times P = sb : SE$ (Cor. 2.) Ergo $sb : SE = sb^2 : SB^2$. Q. E. D.

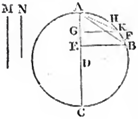
E contrario, ſi ponatur $sb : SE = sb^2 : SB^2$, oſtendimus fore quod Newtonus dixit, ut ſit $P : R = SB : SK$.

Cùm enim ſit $sb : SE = SB \times R : sb \times P$ (Cor. 2.) ſi ponatur $sb : SF = sb^2 : SB^2$ erit $SB \times R : sb \times P = sb^2 : SB^2 = SF : SB = SK : sb = R \times SK : R \times sb$. Permutatis igitur rectangulis, $SB \times R : SK \times R = sb \times P : sb \times R$. Quare $SB : SK = P : R$. Q. E. D.

(^{k}) Cum ſit $P : Q = SB \times N : sb \times M$ (Cor. 2.) ſi igitur ſit $P : Q = SB^n : sb^n$, erit $SB^n : sb^n = SB \times N : sb \times M$. Quare $SB \times N \times sb^n = sb \times M \times SB^n$. Et utramque quantitatem cum rectangulo $sb \times SB$ dividendo, fiet $N \times sb^{n-1} = M \times SB^{n-1}$. Ergo $M : N = sb^{n-1} : SB^{n-1}$. Ac præterea cùm ſit $M : O = M^2 : N^2$, erit $M : O = sb^{2n-2} : SB^{2n-2}$. Rectangula igitur $M \times sb$, $O \times SB$ ſunt inter ſe ut quantitates sb^{2n-1}, SB^{2n-1}. Atqui vires centripetæ corporum B, b, ſunt ut hæc rectangula. (Cor. 1.) Erunt igitur vires illæ ut quantitates SB^{2n-1}, sb^{2n-1} contrariè ſumptæ. Q. E. D.

E contrario, ſi vires centripetæ corporum B, b, ſint inter ſe ut quantitates SB^{2n-1}, sb^{2n-1} contrariè ſumptæ, erit $P : Q = SB^n : sb^n$. Nam vires centripetæ corporum B, b ſunt inter ſe ut rectangula $SB \times R$, $sb \times P$ (Cor. 2.) Quare ſi vires illæ ſint ut quantitates SB^{2n-1}, sb^{2n-1} contrariè ſumptæ, erit $SB \times R : sb \times P = sb^{2n-1} : SB^{2n-1}$. Ac propterea $SB^{2n} \times R = sb^{2n} \times P$. Quare $P : R = SB^{2n} : sb^{2n}$. Sed $P : R = P^2 : Q^2$. Quare $P^2 : Q^2 = SB^{2n} : sb^{2n}$. Et $P : Q = SB^n : sb^n$. Q. E. D.

(^{l}) Per circuitum circuli ABC, cujus centrum D, ferri intelligatur corpus quoddam motu æquabili, urgente datâ vi centripetâ quæ ad circuli centrum D tendat. Ac interea, eâdem vi centripetâ corpus quoddam aliud incitatum recto caſu feratur ſecundum rectam AD infinitè productam. Sint E, F, loca, quæ corpora illa duo, è loco A ſimul egreſſa, eodem temporis puncto appulerint. Dicit Newtonus, arcum circuli AF, diametri illius AC rectæque AE proportione medium eſſe. Quod idem eſt, ac ſi rectâ EB à puncto E ad perpendiculum cum diametro AC eductâ, quæ cum circuli circuitu in B concurreret, junctâque AB, dixiſſet arcum AF rectæ AB æqualem eſſe. Id nos oſtendimus hoc modo.



Sint G, H alia loca, quæ duo corpora mobilia ſimul appulerint. Eductâque ad perpendiculum rectâ GK, jungatur AK. Sint rectæ M, N, arcubus AF, AH ſingulatim æquales. Tum cùm rectæ AE, AG ſint ſpatia, caſu corporis, è loco A, æquabiliter accelerato confectâ (data enim vis centripeta æquabilem motûs accelerationem corpori cadenti neceſſariò afferet) idcirco rectæ illæ AE, AG rationem inter ſe habebunt temporum, quibus ſunt confectæ, duplicatam

arcus, quem corpus in circulo, datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo, tempore quovis deſcribit, medius eſt proportionalis inter diametrum circuli, & deſcenſum corporis, eâdem datâ vi, eodemque tempore, cadendo confectum (l).

Scholium.

Caſus corollarii ſexti obtinet in corporibus cœleſtibus (m), (ut ſeorſum collegerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius* (n) & *Hallæus*; & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris, decrevi fuſiùs in ſequentibus exponere.

Porro præcedentis propoſitionis & corollariorum ejus beneficio,

duplicatam (per Theor. II. Galilæi *De Motu Naturaliter Accelerato)* ſive temporum, quibus arcus AF, AH æquabili motu conficiuntur, duplicatam; hoc eſt, arcuum ipſorum AF, AH duplicatam; ſive rectarum M, N duplicatam, quæ rectæ arcubus AF, AH poſitæ ſunt æquales. Erunt igitur rectæ AE, AG inter ſe ſicut quadrata è rectis M, N. Sunt autem rectæ AE, AG, inter ſe, ſicut quadrata è rectis AB, AK (propter circulum). Quadrata igitur è rectis M, N cum quadratis ex AB, AK proportione convenient. Hoc eſt $M^2 : N^2 = AB^2 : AK^2$. Quare $M : N = AB : AK$. Permutando $M : AB = N : AK$. Neque huic rationi officient rectarum N, AK longitudines, magnæ parvæve fuerint. Regrediantur igitur puncta G, H verſus A: eâ tamen lege, ut loca, quæ duo corpora mobilia ſimul attigerint, punctis illis ſemper denotentur. Et manente rectâ M arcui AB æquali, recta N eâ lege fluat, ut arcui AH fluenti ſemper illa ſit æqualis & ſimul cum illo evaneſcat. Jam cùm recta N ſemper ſit ad rectam AK ut recta M ad rectam AB, id enim modò oſtenſum eſt, idcirco ratio ultima evaneſcentis rectæ N ad evaneſcentem AK ea erit quam recta M habet ad rectam AB. Evaneſcente autem arcu AK, temporum proportio, quibus arcus AK, motu æquabili, rectaque AG, caſu recto, urgente datâ vi centripetâ, conficiuntur, æqualitatem propiùs accedit quàm pro datâ aliquâ differentiâ. Sed in omni poſitione punctorum G, H, arcus quidem AH motu æquabili eodem tempore conficitur, quo recta AG caſu recto (id enim poſuimus). Arcus igitur evaneſcentes AH, AK temporibus, quæ ultimò æqualia ſunt, eodem motu æquabili conficiuntur; ac proinde ſunt arcus illi ultimò inter ſe æquales. Sed arcui AH ſemper eſt æqualis recta N (id enim poſitum). Et arcui evaneſcenti AK evaneſcens chorda AK fit ultimò æqualis (per Lemma VII.) Quare rectæ N, AK evaneſcentes ſunt ultimò æquales. Cùm igitur recta M ad rectam AB rationem habeat eam quæ ultima eſt rectæ evaneſcentis N ad evaneſcentem AK (id enim oſtenſum eſt), idcirco illæ M, AB ſunt inter ſe æquales. Sed recta M arcui AF poſita eſt æqualis. Arcus igitur AF æqualis erit rectæ AB. Q. E. D.

(m) Vide Kepleri Harmonicen Mundi, Lib. V. C. III. § 8. Et Epitomen Aſtronomiæ Copernicanæ, p. 501.

(n) NARRATIO QUÆDAM EX NOTIS MSS DAVIDIS GREGORII.

"—Hookius] immo ſi Hookio fidendum, ille omnis hujus Philoſophiæ fundamenta jecit, & cum
" Newtono communicavit. Verum res ita ſe habet, ut Candidiſſ. Newtonus mihi narravit.
" Cùm forte inter alia Newtonus Hookio ſcriberet, tantum abeſſe ut Grave è ſummitate Turris
" decidens ex motu diurno terræ, ad occidentem à pede turris erectæ caderet, ut è contra ad
" orientem à pede turris terram ſubjectam attingeret (ſcilicet ob majorem impetum lapidi ad
" ſummitatem communicatam) et caſu Curvam manuduceret à lapide inter cadendum deſcrip-
" tam; hancque Curvam infra terræ ſuperficiem, ad modum ſpiralis, in centro terminatam de-
" ſcriberet; reſcripſit Hookius, verum quidem eſſe quod [Grave] ad orientem terram attingeret,
" ſed quòd non centrum peteret, ſed illud præterlapſum & Ellipticam curvam deſcribens, rurſus
" in altum reverteretur ad ſummitatem Turris. Atque hoc illud eſt, quod ſe Newtono pri-
" mum oſtendiſſe jactat, & Newtoni Philoſophiam huic ſoli eſſe ſuperſtructam."

colligitur

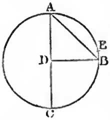
De Motu Corporum

colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam; qualis eſt ea gravitatis. Nam ſi corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis ſuæ revolvatur, hæc gravitas eſt ipſius vis centripeta. Datur autem, ex deſcenſu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore deſcriptus, per hujus Corol. 9 (°). Et hujuſmodi propoſitionibus *Hugenius*, in eximio ſuo tractatu *de Horologio Oſcillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et ſi corpus in polygoni lateribus, datâ cum velocitate movendo, ad ejus angulos ſingulos à circulo reflectatur; vis, quâ ſingulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque ſumma virium, in dato tempore, erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc eſt (ſi polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejuſdem ad circuli prædicti radium; id eſt, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, ſi polygonum, lateribus infinitè diminutis, coincidat cum circulo, ut quadratum arcûs dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis eſt vis contraria, quâ circulus continuò repellit corpus centrum verſus.

PROP.

(°) Per circuitum circuli ABC magnitudine dati, cujus centrum D, ferri intelligatur corpus quoddam motu æquabili; urgente ſcilicet vi quâdam centripetâ, quæ centrum circuli D reſpiciat, & vi datæ Gravitatis apud nos æqualis ſit. Ducatur diameter circuli ADC; & à centro D, ad perpendiculum cum diametro AC, educatur recta DB, quæ cum circuli circumflexu in B concurrat. Junctæ AB capiatur arcus AE æqualis. Conficietur arcus AE, motu corporis in circulo æquabili, eodem temporis ſpatio, quo, caſu corporis recto, conficeretur ſpatium radio AD æquale (per Cor. 9.) Sed propter circuli radium magnitudine datum, datum erit tempus, quo corpus grave ſpatium illi radio æquale caſu recto conficeret. Tempus igitur, quo corpus in circulo confecerit arcum AE, datum erit. Hujus autem temporis ad tempus converſionis integræ ratio data eſt; ea ſcilicet, quam habet arcus magnitudine AE, ſive recta data AB, ad integrum circuli circuitum. Tempus igitur converſionis integræ datum erit. Q. E. I.



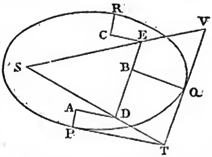
Cor. II. Tempus converſionis integræ eſt ad tempus caſûs recti per radium ut totius circuli circuitus ad chordam quadrantis.

(°) Nam rectæ à puncto D in tangentes AT, QT ad perpendiculum deductæ rectis AP, BQ æquales

PROP. V. PROB. I.

Datâ quibuſcunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam, viribus ad commune aliquod centrum tendentibus, deſcribit, centrum illud invenire.

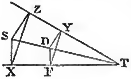
Figuram deſcriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendicula PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R, à quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id eſt, ita ut ſit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P; & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendiculorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, CE, concurrentes in D & E: et actæ TD, VE concurrent in centro quæſito S.



Nam perpendicula à centro S in tangentes PT, QT demiſſa (per Corol. 1. Prop. I.) ſunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis P & Q; ideoque, per conſtructionem, ut perpendicula AP, BQ directè; id eſt, ut perpendicula à puncto D in tangentes demiſſa (P). Unde facilè colligitur quòd puncta S, D, T ſunt in unâ rectâ (q). Et ſimili argumento puncta S, E, V ſunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum S in concurſu rectarum TD, VE verſatur. Q. E. D.

quales erunt. (El. 1. 34.)

(q) In rectas enim TP, TV, deducantur ad perpendiculum, à puncto quidem, S rectæ SX, SZ, à puncto autem D rectæ DF, DY; & XZ, FY jungantur. Rectæ SX, SZ cum rectis DF, DY parallelæ erunt. Anguli igitur XSZ, FDY erunt inter ſe æquales. Quare cùm SX ſit ad SZ, ut DF ad DY (idenim oſtenſum à Newtono) idcirco triangula SXZ, DFY inter ſe ſimilia erunt, & anguli SXZ, DFY inter ſe æquales. (El. VI. 6.) Anguli igitur TXZ, TFY, quibus æquales illi SXZ, DFY à rectis abſunt, inter ſe æquales erunt; ac proinde rectæ FY, XZ inter ſe parallelæ (El. 1. 28.) & triangula TFY, TXZ inter ſe ſimilia erunt. Quare TF erit ad TX ut FY ad XZ. Sed propter ſimilitudinem triangulorum DFY, SXZ; FY eſt ad XZ ut FD ad XS. Ergo FD erit ad XS ut TF ad TX. (El. V. 11.) Ac proinde puncta T, D, S, ad rectam erunt; quod ex ſecundâ Libri ſexti Elementorum facilè efficitur. Nam ſi T, D, S ad rectam non ſint, juncta TS rectæ DF in puncto *a* occurrat. Et propter rectas F*a*, XS inter ſe parallelas, erit XS ad F*a* ut TX ad TF. (El. VI. 2) Sed XS ad FD ut TX ad TF, ex modò oſtenſis. Recta igitur XS ad inæquales FD, F*a* eandem proportionem habet. Quod eſt abſurdum (El. V. 9.) Sunt igitur ad rectam puncta T, D, S. Et ſimili argumentatione efficietur puncta V, E, S, ad rectam eſſe. (Eadem ferè ad locum patres doctiſſimi Le Sœur & Jacquier.)



PROP.

PROP. VI. THEOR. V.

Si corpus in ſpatio non reſiſtente, circa centrum immobile, in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam naſcentem tempore quàm minimo deſcribat, & ſagitta arcûs duci intelligatur, quæ chordam biſecet, & producta tranſeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcûs, ut ſagitta directè, & tempus bis inverſè.

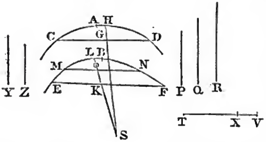
Nam ſagitta, dato tempore, eſt ut vis (per Corol. 4. Prop. I.) & augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eâdem ratione, ſagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per Corol 2 & 3, Lem. XI.) ideoque eſt ut vis ſemel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut ſagitta directè & tempus bis inverſè. Q. E. D (r).

Idem facile demonſtratur etiam per Corol. 4. Lem. X.

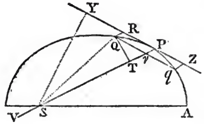
Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S deſcribat lineam curvam APQ; tangat verò recta ZPR Curvam illam in puncto

(r) Demonstratio Newtoniana explicatior facta.

Corpora A, B, urgentibus viribus centripetis quæ centrum S reſpiciant, ferri intelligantur in orbitis CAD, EBF. Sint CAD, EBF orbitarum arcus quilibet; hujus autem EBF medium ſit punctum B; illius CAD, punctum A. Habeat recta P, pro arbitrio ſumenda, ad aliam Q proportionem eam, quam tempus, quo conficitur arcus DAC motu corporis A, ad tempus, quo conficitur arcus FBE motu corporis B. Ducantur CD, EF, arcuum CAD, EBF chordæ; quas puncta G, K medias dividant: junctæque SG, SK Curvis in punctis H, L occurrant. Jam intelligantur arcus CAD, EBF (manentibus punctis mediis, A, B) infinitè minui; eâ tamen lege, ut temporibus, quibus illi conficiuntur, maneat ſemper mutua rectarum P, Q, ratio; dicit Newtonus vim centripetam in loco A ad vim centripetam in loco B proportionem habere, quæ componitur ex eâ quæ ultima eſt ſagittæ evaneſcentis GH ad ſagittam evaneſcentem KL, cum eâ, quæ rectarum P, Q duplicata eſt, contrarie ſumptâ; vel cum eâ, quam R habet ad P, ſi illa R duarum, P, Q, proportione ſit tertia. Hoc eſt, ſi exponatur recta quædam, TV, quæ ad datam P rationem habeat eam, quam ſagitta KL ad ſagittam GH; tum, arcubus CAD, EBF infinitè decreſcentibus, ſi recta TV eâ lege fluat, ut ſemper ſit ad datam P ſicut ſagitta KL ad ſagittam GH (illas utique ſagittarum, GH, KL, rectæque TV magnitudines conferendo quæ ſimul fiunt), & ſi TX ſit ultima rectæ TV longitudo, quam, arcubus CAD, EBF jamjam in nihilum abituris, propiùs illa acceſſerit quàm pro datâ quâvis differentiâ; hæc inquam ſi fiant, dicit Newtonus, vim centripetam in loco A ad vim centripetam in loco B proportionem habere eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ R ad P, rectæque P ad TX; hoc eſt eam quam recta R habet ad rectam TX. Nos autem oſtendimus quod Newtonus dicit hoc modo



Arcubus



to quovis P, & ad tangentem, ab alio quovis curvæ punĉto Q, agatur QR diſtantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad diſtantiam illam SP: vis centripeta erit reciprocè ut ſolidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; ſi modò ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas, quæ ultimò fit, ubi coeunt punĉta P & Q. Nam QR æqualis eſt ſagittæ dupli arcûs QP, in cujus medio eſt P [s]. Et duplum trianguli SQP ſive SP × QT, tempori, quo arcus iſte duplus deſcribitur, proportionale eſt; ideoque pro temporis exponente ſcribi poteſt.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta eſt reciprocè ut ſolidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$; ſi modò SY perpendiculum ſit à centro virium in orbis tangentem PR demiſſum. Nam rectangula SY × QP & SP × QT æquantur [t].

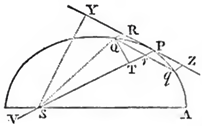
Arcubus CAD, EBF infinitè imminutis punĉta H, L in loca A, B ultimò devenient; & ſi MBN ſit arcus orbitæ EBF, qui, motu corporis B, eodem tempore conficitur, quo arcus CAD motu corporis A, atque arcus MBN cum præterea ſitum obtineat, ut à punĉto B, arcûs EBF medio, medius ipſe ſit diviſus; vis centripeta in loco A ad vim centripetam in loco B rationem habebit eam, quæ, arcubus CAD, MBN infinitè imminutis, ſagittarum evaneſcentium HG, LO, quæ chordas eorum medias dividant, & ad S virium centripetarum centrum tendant, ultima inter ipſas erit. Hoc eſt, ſi recta Y, pro arbitrio ſumenda, habeat ad aliam Z, proportionem eam, quam vis centripeta in loco A ad vim centripetam in loco B, erit HG ad LO ultimò ut Y ad Z. (Prop. I. Cor. 4.) Arcubus autem MBN, EBF infinitè diminutis, ſagittarum evaneſcentium LO, LK ratio inter ipſas ultima, duplicata erit ejus, quæ arcuum inter ipſos ultima eſt (Lemma XI. Cor. 2.) Hoc eſt, cùm arcus illi ſint ultimò inter ſe ut ſpatia, velocitate illâ, quæ eſt corporis in loco B, temporibus, quæ ſunt ut P, Q, æquabiliter confecta; idcirco ratio ultima evaneſcentium LO, LK, temporum quibus conficiuntur arcus MBN, EBF, ſive rectarum P, Q, duplicata erit. Hoc eſt, cùm R duarum P, Q proportione ſit tertia, erit LO ad LK ultimò ut P ad R. Et oſtenſum eſt HG eſſe ultimò ad LO ut Y ad Z. Quare ratio ultima evaneſcentis HG ad evaneſcentem LK componetur è rationibus rectæ Y ad Z rectæque P ad R; ſive ea erit, quam rectangulum Y × P habet ad rectangulum Z × R. Evaneſcentis autem HG ad evaneſcentem LK ratio ultima ea eſt, quam recta P habet ad rectam TX (per conſtruct.) Erit igitur $P : TX = Y \times P : Z \times R$. Ac propterea $P \times Z : TX \times Z = Y \times P : Z \times R$. Permutando $P \times Z : P \times Y = Z \times TX : Z \times R$. Ac propterea $Z : Y = TX : R$. Invertendo $Y : Z = R : TX$. Q. E. D.

[s] Quod ſic oſtendo. In tangente capiatur PZ æqualis rectæ PR. Agatur *Zq* cum rectâ SP parallela, & Curvæ illa *Zq* in *q* occurrat. Juncta Q*q* rectæ SP in *v* occurrat. Evaneſcentibus arcubus PQ, P*q*, erit QR ad *Zq* ultimò ſicut quadratum ex RP ad quadratum ex PZ. (Lemma XI. Cor. 2.) Quadrata autem è rectis æqualibus PR, PZ ſunt inter ſe æqualia. Ergo RQ, *Zq* fient ultimò inter ſe æquales. Quare cùm ſint etiam inter ſe parallelæ, fiet Q*q* ultimò parallela cum RZ (El. 1. 33.) & figura RQ*q*Z ultimò parallelogramma erit. Quare & R*v*, *v*Z ultimò parallelogrammæ. Ac propterea QR fiet ultimò æqualis ipſi P*v*, & duæ etiam Q*v*, *vq* duabus RP, PZ æqualibus ultimò æquales fient; ac proinde ultimò inter ſe æquales. Erit igitur P*v* evaneſcentis arcûs Q*q* (qui evaneſcentis QP duplus eſt) ſagitta, quæ chordam ejus mediam dividet, & ad S centrum virium tendet. Et huic P*v* oſtenſa eſt QR ultimò æqualis.

[t] Ultimò ſcilicet, arcu QP infinitè decreſcente.

Corol. 3.

Corol. 3. Si orbis vel circulus eſt, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè ſecat, id eſt, angulum contactûs, aut ſectionis, cum circulo quàm minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum P; & ſi PV chorda ſit circuli hujus, à corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut ſolidum $SYq \times PV$. Nam PV eſt $\frac{QPq}{QR}$.



Corol. 4. Iiſdem poſitis, eſt vis centripeta ut velocitas bis directè, & chorda illa inverſè. Nam velocitas eſt reciprocè ut perpendiculum SY per Corol. 1. Prop. I.

Corol. 5. Hinc ſi detur figura quævis curvilinea APQ, & in ea detur etiam punctum S, ad quod vis centripeta perpetuò dirigitur; inveniri poteſt lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis P, à curſu rectilineo perpetuò retractum, in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo deſcribet. Nimirum computandum eſt vel ſolidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$, vel ſolidum $SYq \times PV$, huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis ſequentibus (u).

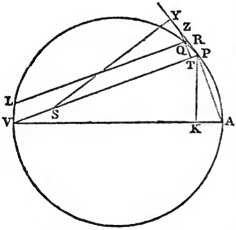
PROP. V. PROB. II.

Gyretur corpus in circumferentiâ circuli; requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Eſto circuli circumferentia VQPA; punctum datum, ad quod vis

(u) *Cor. II.* Ex horum Corollariorum tertio (id quod ad locum rectè monuere patres doctiſſimi Le Sœur & Jacquier) facilè deducenda eſt lex illa vis centripetæ, quam viri præclari, Joannes Bernouillius, Abrahamus Moivræus & Guido Grandus tradiderunt. Nimirum ſi litera R ſignificet radium circuli cujus curvaturæ curvatura orbitæ in loco P æqualis ſit; vis centripeta in P erit contrariè ut ſolidum $\frac{SY^3 \times R}{SP}$. Nam diameter circuli illius erit ad chordam PV ut SP ad SY. Hoc eſt SP : SY = 2R : PV. Permutando SP : 2R = SY : PV. Quare SP : 2R = $SY^1 : SY^2 \times PV$. Quare $\frac{SY^3 \times 2R}{SP} = SY^2 \times PV$. Erit igitur $\frac{SY^3 \times R}{SP}$ ut $SY^2 \times PV$, hoc eſt, ut vis centripeta contrariè (per Cor. 3.)

(y) Triangula VPA, ZTP idcirco inter ſe ſunt ſimilia, quia rectâ PZ tangente circulum APV, quem



vis ceu ad centrum ſuum tendit, S; corpus in circumferentiâ latum P; locus proximus, in quem movebitur Q; & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV; & actâ circuli diametro VA, jungatur AP; & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z; ac denique per punctum Q agatur LR, quæ ipſi SP parallela ſit, & occurrat tum circulo in L, tum tangenti PZ in R. Et ob ſimilia triangula ZQR, ZTP, VPA (x), erit RP *quad.* hoc eſt QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV \text{ quad.}}{AV \text{ quad.}}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP \text{ quad.}}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus ſcribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut $\frac{SPq \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$; id eſt (ob datum AV *quad.*) reciprocè ut quadratum diſtantiæ ſeu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. Q.E.I.

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: & ob ſimilia triangula SYP, VPA (y); erit AV ad PV ut SP ad SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale SY *quad.* × PV. Et propterea (per Corol. 3 & 5. Prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut $\frac{SPq \times PV \text{ cub.}}{AVq}$; hoc eſt, ob datam AV, reciprocè ut SP*q* × PV *cub.* Q. E. I.

Corol. 1. Hinc ſi punctum datum S, ad quod vis centripeta

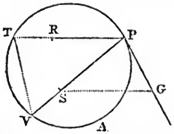
quem recta PV ſecat, anguli ZPT, PAV inter ſe æquales ſunt (per El. III. 32.) Angulus autem VPA rectus, propter ſemicirculum: recto igitur ZTP æqualis. Quare & reliqui triangulorum ZTP, VPA, anguli, PZT, AVP, inter ſe æquales, & triangula inter ſe ſimilia erunt. (El. VI. 4.) Q. E. D.

(y) Anguli SPY, PAV, ut modò oſtenſum eſt, inter ſe æquales. Rectus autem SYP, recto VPA æqualis. Quare & PSY, AVP inter ſe æquales, & triangula, SYP, VPA inter ſe ſimilia. (El. VI. 4.)

 ſemper

ſemper tendit, locetur in circumferentiâ hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis, quâ corpus P in circulo APTV circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, quâ corpus idem P, in eodem circulo & eodem tempore periodico (z) circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut RP *quad.* × SP ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro, S, ad orbis tangentem, PG, ducitur, & diſtantiæ corporis à ſecundo virium centro parallela eſt. Nam, per conſtructionem hujus propoſitionis, vis prior eſt ad vim poſteriorem ut RP*q* × PT *cub.* ad SP*q* × PV *cub.* id eſt, ut SP × RP*q* ad $\frac{\text{SP cub.} \times \text{PV cub.}}{\text{PT cub.}}$, ſive (ob ſimilia triangula PSG, TPV) ad SG *cub.* (aa)



Corol. 3. Vis, quâ corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, quâ corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut SP × RP*q*, contentum utique ſub diſtantiâ corporis à primo virium centro, S, & quadrato diſtantiæ ejus à ſecundo virium centro, R, ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis à ſecundo virium centro diſtantiæ RP parallela eſt. Nam vires in hoc orbe, ad ejus punctum quodvis P, eædem ſunt ac in circulo ejuſdem curvaturæ.

PROP.

(z) Nimirum idem ponendum eſt tempus periodicum, ut areis, circum centra diverſa deſcriptis, temporum, quibus deſcribuntur, proportio maneat. Corollaria enim Propoſitionis ſextæ, quibus nititur hæc Propoſitio, commune illud omnia fundamentum habent; ſervari inter areas temporum proportiones. Atque hoc poſito, omnia illa corollaria de viribus centripetis, quæ vel diverſa centra, vel idem reſpiciant, æquè vigent.

(aa) Propter TP, SG parallelas, anguli TPV, PSG inter ſe æquales. (El. I. 29.) Et cùm recta PG tangat circulum TPV, quem VP ſecat, idcirco anguli PTV, SPG inter ſe æquales. (El. III. 32.) Angulus igitur PVT angulo SGP æqualis, & triangula VPT, GSP inter ſe ſimilia, & PV:PT = SG:SP. (El. VI. 4.) Quare $\frac{SP \times PV}{PT} = SG$. Et $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3} = SG^3$. Q. E. D. *(Eadem ferè Patres doctiſſimi Le Seur & Jacquier.)*

(bb) Ad axem utique

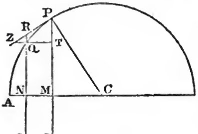
LEMMA H. I.

(cc) Sit Ellipſis vel Hyperbola cujus centrum C, ſemiaxis tranſverſus CA, ſecundus CB. Si recta

PROP. VIII. PROB. III.

Moveatur corpus in ſemicirculo PQA: *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum,* S, *ut lineæ omnes,* PS, RS, *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

A ſemicirculi centro C agatur ſemidiameter CA parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in M & N, & jungatur CP. Ob ſimilia triangula CPM, PZT, & RZQ; eſt CPq ad PMq ut PRq ad QTq: &, ex naturâ circuli, PRq æquale eſt rectangulo $QR \times \overline{RN + QN}$; ſive, coeuntibus punctis P & Q, rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt CPq ad PM *quad.* ut $QR \times 2PM$ ad QT *quad.* ideoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$. Eſt ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$, hoc eſt (neglectâ ratione determinatâ $\frac{2SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciprocè ut PM *cub.* Q. E. I.



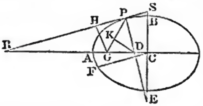
Idem facilè colligitur etiam ex propoſitione præcedente.

Scholium.

Et argumento haud multum diſſimili corpus invenietur moveri in Ellipſi, vel etiam in Hyperbolâ vel Parabolâ, vi centripetâ, quæ ſit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ (bb) ad centrum virium maximè longinquum tendentis (cc).

PROP.

recta PR curvam in puncto P contingat, rectaque PD, à puncto P ad perpendiculum cum contingente educta, axi tranſverſo in D occurrat, ſecundo in E; recta PD ad dimidium parametri principalis rationem habebit eam, quam ſemidiameter, quæ cum contingente eſt parallela, ad ſemiaxem ſecundum. Eademque rectæ PE ad dimidium axis tranſverſi ratio erit.



Ducatur per centrum C ſemidiameter CF cum contingente PR parallela. Dico primum, PD eſſe ad dimidium parametri principalis ut CF ad CB.

Inveniatur ſectionis conicæ umbilicus, G. Ab illo G in contingentem PR deducatur ad perpendiculum recta GH. Jungatur GP, & in GP, à puncto D, deducatur ad perpendiculum recta DK. Anguli recti ad, H, K, inter ſe æquales ſunt. Et propter parallelas, GH, PD, anguli HGP, KPD inter ſe æquales (El. I. 29.) Quare HPG, KDP inter ſe æquales, & triangula HGP, KPD inter ſe ſimilia erunt. Erit igitur GP ad GH ut PD ad PK. Sed GP eſt ad GH ut CF ad CB, (Hamilton.

 Conic.

PROP. IX. PROB. IV.

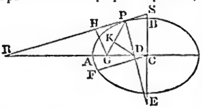
Gyretur corpus in ſpirali PQS *ſecante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.*

Detur angulus indefinitè parvus PSQ, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura SPRQT. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ ut QT, hoc eſt (ob datam ſpecie figuram illam) ut SP.

Mutetur

Conic. Lib. II. 31.) & PK æqualis eſt dimidio parametri principalis (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) Erit igitur PD ad dimidium parametri principalis ut CF ad CB. Quod primum demonſtrandum erat.

Dico ſecundo eandem eſſe rectæ PE ad CA rationem: ſive PE eſſe ad CA ut CF ad CB. Recta PR, à puncto P in utramque partem producta, axibus, ſi opus ſit, productis, in punctis R, S, occurrat.

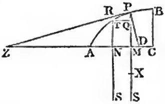


Propter angulos rectos RPD, RCS, angulumque ad R triangulis duobus SRC, DRP communem, reliqui illorum anguli RDP, RSC inter ſe æquales erunt. Rectus autem, RPD, recto EPS æqualis. Triangula igitur RPD, EPS, inter ſe ſimilia, & RP : PD = EP : PS. (El. VI. 4.) Rectangula igitur RP × PS, EP × PD inter ſe æqualia. Rectangulum autem RP × PS quadrato ex CF æquale eſt. (Hamilton. Conic. Lib. I. 51.) Rectangulum igitur EP × PD quadrato ex CF æquale erit. Ac propterea rectangulum EP × PD erit ad quadratum ex PD, hoc eſt, EP erit ad PD, ut quadratum ex CF ad quadratum ex PD. (El. V. 7.) Sed, per partem primam hujus Lemmatis, quadratum ex CF eſt ad quadratum ex PD ut quadratum ex CB, dimidio axis ſecundi, ad quadratum ex dimidio parametri principalis; hoc eſt ut CA, dimidium axis tranſverſi, ad dimidium parametri principalis. Erit igitur EP ad PD ut CA ad dimidium parametri principalis. (El. V. 11.) Sed, per partem primam, PD eſt ad CF ut dimidium parametri principalis ad CB. Erit igitur ex æquo EP : CF = CA : CB, & permutando EP : CA = CF : CB. Q. E. D.

Cor. 1. Rectangulum ſub EP, PD æquale eſt quadrato è dimidio diametri, quæ cum contingente PR parallela eſt.

Cor. 2. EP eſt ad PD ut axis tranſverſus ad parametrum principalem.

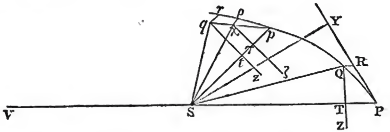
Ex his facilis erit demonſtratio ejus quod Newtonus dicit, "Vim, quâ corpus retineatur in orbe conico, ſi illa agat ſecundum rectas ad axem orbis ordinatim applicatas, eſſe contrariè ut cubus ordinatæ."



Sit BPA ſectio conica, cujus axis CA; & per Curvam PA ferri intelligatur corpus mobile, urgente vi quâdam, quæ ſecundum rectas ad axem CA ordinatim applicatas corpus perpetim impellat. Recta PR contingat curvam BPA in P, productaque axi CA in puncto Z occurrat. A puncto P ducatur recta PM ad axem CA ordinatim, rectaque PD ad perpendiculum cum contingente, quæ axi CA in D occurrat. Denique ab alio quovis curvæ puncto, T, agantur TRN, TQ; illa cum rectâ PM, hæc cum axe CA parallela. Erit igitur, propter rectas RN, PM inter ſe parallelas, RP:MN vel QT = ZP:ZM. (El. VI. 2.) Et propter triangula PZM, DPM inter ſe ſimilia, ZP : ZM = DP : PM. (El. VI. 31.) Quare RP : QT = DP : PM (El. V. 11.) ac propterea $RP^2 : QT^2 = DP^2 : PM^2$. Jam ſi ſectio conica PTA Ellipſis ſit vel Hyperbola, & axis CA ſi tranſverſus ille ſit; ſit recta MX æqualis dimidio lateris recti principalis; & per partem primam Lemmatis, erit quadratum è rectâ MX ad quadratum ex PD, ut quadratum ex axe ſecundo ad quadratum è diametro quæ parallela eſt cum contingente PR; hoc eſt, ut rectangulum $TR \times \overline{RN + TN}$ ad quadratum ex PR. (Hamilton. Conic. Lib. I. 31 & 40.)

Hoc

Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR, angulum con-



tactûs QPR ſubtendens, mutabitur (per Lemma XI.) in duplicatâ ratione ipſius PR, vel QT. Ergo manebit $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ eadem quæ

Hoc eſt punctis Q, P coeuntibus ut $\overline{TR \times 2.PM}$, ad quadratum ex PR. Erit inquam $MX^2 : PD^2 = TR \times 2.PM : PR^2$; ultimò ſcilicet, arcu TP, cum rectis PR, TR, QT, evaneſcente. Quamobrem cùm oſtenſum ſit eſſe $PD^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, erit ex æquo $MX^2 : PM^2 = TR \times 2PM : QT^2$; ultimò, arcu TP evaneſcente. Ac propterea $\frac{2.PM^3}{MX^2} = \frac{QT^2}{TR}$. Ac proinde $\frac{2PM^3 \times SP^2}{MX^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò, arcu TP evaneſcente. Neque huic æqualitati obſtabit rectæ SP longitudo, magna illa parvave fuerit: quin & infinitè rectâ SP auctâ æquatio illa ſtabit. Erit igitur $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut $\frac{PM^3 \times SP^2}{MX^2}$; hoc eſt, ſi SP infinitè augeatur, quo pacto ratio $\frac{SP^2}{MX^2}$ conſtans fiet, neglectâ illâ ratione conſtante, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ut PM^3. Quare vis, quæ eſt contrariè ut $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$, erit contrariè etiam ut PM^3. Q. E. D.

Si verò CA ſemiaxis ſecundus ſit Ellipſeos vel Hyperbolæ PTA; ſit CB ejuſdem ſemiaxis tranſverſus. Et per partem ſecundam Lemmatis, quadratum ex CB erit ad quadratum ex DP ut quadratum ex axe ſecundo ad quadratum ex diametro quæ parallela eſt cum contingente PR; hoc eſt ut rectangulum Z ad quadratum ex PR: deſignante literâ Z rectangulum ſub ſegmentis rectæ à puncto R in axem CB ordinatim deductæ, ipſo puncto R curvâque interceptis. Erit inquam $CB^2 : DP^2 = Z : PR^2$. Quamobrem cùm oſtenſum ſit eſſe $DP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, erit ex æquo $CB^2 : PM^2 = Z : QT^2$. Invertendo $PM^2 : CB^2 = QT^2 : Z$. Sed $CA^2 : CB^2$, vel, ſi MX duarum CA, CB proportione tertia ſit, $CB^2 : MX^2 = Z : TR \times \overline{RN + TN}$. Quare ex æquo $PM^2 : MX^2 = QT^2 : TR \times \overline{RN + TN}$. Vel ultimò, arcu PT evaneſcente $PM^2 : MX^2 = QT^2 : TR \times 2PM$. Quare $\frac{QT^2}{TR} = \frac{2PM^3}{MX^2}$ ultimò. Et $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{MX^2}$ ultimò. Ac propterea $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ erit ultimò, arcu QP evaneſcente, ut $\frac{PM^3 \times SP^2}{MX^2}$; hoc eſt, ſi SP infinitè augeatur, quo pacto ratio $\frac{SP^2}{MX^2}$ conſtans fiet, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut PM^3. Erit igitur vis ut PM^3 contrariè. Q. E. D.

Quòd ſi Parabola ſit ſectio conica PTA, erit DZ dimidium parametri diametri illius quæ per P tranſit, et DM dimidium parametri principalis. (Hamilton. Conic. Lib. II. 25.) Erit igitur $DM : DZ = TR \times \overline{RN + TN} : PR^2$ (Hamilton. Conic. Lib. II. 3. Cor. 3.) Vel evaneſcente arcu PT, erit $DM : DZ = TR \times 2PM : PR^2$ ultimò. Sed propter angulos ad P & M rectos, erit $DM : DP = DP : DZ$. (El. VI. 31.) Atque idcirco $DM^2 : DP^2 = DM : DZ$. Erit igitur $DM^2 : DP^2 = TR \times 2PM : PR^2$. Quamobrem cùm oſtenſum ſit eſſe $DP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, erit ex æquo $DM^2 : PM^2 = TR \times 2PM : QT^2$. Quare $\frac{QT^2}{TR} = \frac{2PM^3}{DM^2}$ ultimò. Unde $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR} = \frac{SP^2 \times 2PM^3}{DM^2}$. Ac propterea ſi SP infinitè augeatur, ut ratio illa $\frac{SP^2}{DM^2}$ conſtans fiat, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut PM^3. Ergo vis erit ut PM^3 contrariè. Q. E. D.

priùs,

prius, hoc eſt ut SP (dd). Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ eſt ut SP *cub.* ideoque (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ SP. Q. E. I.

Idem aliter.

Perpendiculum SY in tangentem demiſſum, & circuli, ſpiralem concentricè ſecantis, chorda PV ſunt ad altitudinem SP in datis rationibus (ee); ideoque SP *cub.* eſt ut $SYq \times PV$, hoc eſt (per Corol. 3 & 5. Prop. VI.) reciprocè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia circa datæ Ellipſeos vel Hyperbolæ diametros quaſvis conjugatas deſcripta eſſe inter ſe æqualia.

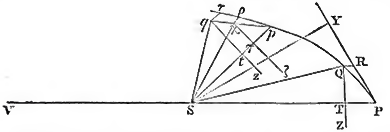
Conſtat ex conicis (ff).

PROP. X. PROB. V.

Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipſeos.

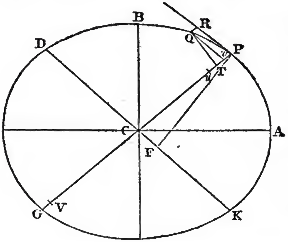
Sunto CA, CB ſemiaxes Ellipſeos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ;

(dd) Ad vim hujus demonſtrationis explicandam, ponantur SPQ, *spq* eſſe areæ, quas corpus in ſpirâ angulorum æqualium, circum centrum S circumactum, temporibus æqualibus deſcripſerit. Agantur rectæ PR, *pr*, quæ ſpiram in punctis P, *p* contingant; rectæ QR, *qr* cum radiis SP, *sp*, parallelæ; rectæque QT, *qt* ad perpendiculum cum illis radiis. Vis centripeta in loco P ad vim centripetam in loco *p* rationem habebit eam quæ arcubus, PQ, *pq*, evaneſcentibus, ſolidi $\frac{sp \times qt^2}{qr}$



ad ſolidum $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ ultima erit (Prop. VI. Cor. 1.) Hoc eſt ſi capiantur QZ, *qz*, quarum illa quidem cum duabus QR, QT, hæc verò cum duabus *qr*, *qt* proportione ſit tertia, vis centripeta in loco P ad vim centripetam in loco *p* rationem habebit eam, quæ ultima ſit ſolidi $sp^2 \times qz$ ad ſolidum $SP^2 \times QZ$. Dicit autem Newtonus hanc eſſe eam, quæ eſt cubi ex *sp* ad cubum ex SP. Fiat angulus *psχ* angulo PSQ æqualis; & agantur χρ, χτ cum rectis *qr*, *qt* parallelæ; & capiatur χζ cum duabus χρ, χτ proportione tertia. Evaneſcentibus autem arcubus PQ, *pq*, arcus *pχ* eâ lege fluat, ut anguli PSQ, *psχ* ſemper ſint inter ſe æquales. Sectores igitur SPQ, *spχ*, è naturâ curvæ, erunt inter ſe ſimiles; trapezia quoque PTQR, *pτχρ* inter ſe ſimilia erunt. Erit igitur QR ad QT ut χρ ad χτ. Ergo & $QR^2 : QT^2 = χρ^2 : χτ^2$. Sed $QR^2 : QT^2 = QR : QZ$, & $χρ^2 : χτ^2 = χρ : χζ$ (ita factum enim). Ergo $QR : QZ = χρ : χζ$. (El. V. 11.) Permutando $QR : χρ = QZ : χζ$. Sed $QR : χρ = SP : sp$ (ob ſimilitudinem figurarum SPRQT, *spρχτ*). Ergo $QZ : χζ = SP : sp$. (Et hoc eſt quod dicit Newtonus, datâ ſpecie figurâ SPRQT, eſſe $\frac{QT^2}{QR}$ ut QT, hoc eſt ut SP.) Evaneſcentibus

gatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; Q*v* ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum Q*v*PR, erit (ex conicis) rectangulum P*v*G ad Q*v* *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula Q*v*T, PCF (gg) Q*v* *quad.* eſt ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* Et conjunctis rationibus, rectangulum P*v*G ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt, *v*G ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro P*v*, & (per Lemma XII.) BC × CA pro CD × PF, nec non (punctis P & Q coeuntibus) 2PC pro *v*G, & ductis extremis & mediis in ſe mutuò, fiet $\frac{QT\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Eſt ergo (per Corol. 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id eſt (ob datum 2BC*q* × CA*q*) reciprocè ut $\frac{1}{PC}$; hoc eſt, directè ut diſtantia PC. Q. E. I.



tibus autem arcubus *pχ*, *pq*, ratio ultima evaneſcentis *χϱ* ad evaneſcentem *rq* ea erit, quæ eſt quadrati ex *pϱ* ad quadratum ex *pr*. (Lemma XI. Cor. 1.) Sunt autem *pϱ*, *pr* inter ſe ſicut rectæ à punctis *ϱ*, *r* in rectam *sp* ad perpendiculum demiſſæ: ac demiſſæ illæ ſunt inter ſe ut *χτ*, *qt*, quibus ſunt æquales. (Nimirum cùm rectæ *ϱχ*, *rq* parallelæ ſint cum rectâ *ps*, rectæque *χτ*, *qt*, in eandem *sp* ad perpendiculum ſint demiſſæ.) Quadrata igitur ex illis *pϱ*, *pr* ſunt inter ſe ſicut quadrata ex illis *χτ*, *qt*. Erit igitur *χϱ* ad *qr* ultimò ut quadratum ex *χτ*, ad quadratum ex *qt*; hoc eſt, cùm quadrata ex *χτ*, *qt*, rectangulis *χϱ* × *χζ*, *qr* × *qz* ſint æqualia, erit *χϱ* ad *qr* ultimò ut *χϱ* × *χζ* ad *qr* × *qz*. Eſt autem *χϱ* ad *qr* ſicut rectangulum *χϱ* × *χζ* ad rectangulum *qr* × *χζ*. Ac proinde *χϱ* × *χζ* erit ad *qr* × *χζ* ultimò, ut *χϱ* × *χζ* ad *qr* × *qz*. Sunt igitur rectangula *qr* × *χζ*, *qr* × *qz* ultimo inter ſe æqualia. Ac propterea rectæ *χζ*, *qz* ultimò inter ſe æquales. (Et hoc eſt quod dicit Newtonus, mutato utcunque angulo PSQ manere $\frac{QT^2}{QZ}$ eandem quæ priùs fuerat.) Quare cùm oſtenſum ſit, eſſe SP : *sp* = QZ : *χζ*, erit ultimò QZ : *qz* = SP : *sp*. Quamobrem ſolidorum SP² × QZ, *sp*² × *qz* ratio ultima cuborum ex SP, *sp* inter ipſos ratio erit. Nimirum cum ratio utraque, ultima illa, & cuborum inter ipſos, ex iiſdem componatur. Q. E. D.

(ee) Nam, propter angulum ad P datum, chorda PV erit ut radius circuli; & radius circuli, ob mutuam partium figuræ ſimilitudinem, erit ut SP (*Emerſonus ad locum.*)

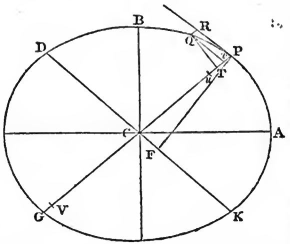
(ff) Hamilton. Conic. Lib. IV. 1.

(gg) Propter illas Q*v*, CK inter ſe parallelas, anguli Q*v*T, PCF erunt inter ſe æquales. (El. I. 29.) Anguli etiam recti QT*v*, PFC inter ſe æquales. Reliquus igitur TQ*v* reliquo FPC æqualis, & triangula Q*v*T, PCF inter ſe ſimilia erunt (El. VI. 4.)

Idem

Idem aliter.

In rectâ GP, ab alterâ parte puncti T, ſumatur punctum *u*, ut T*u* ſit æqualis ipſi T*v*; deinde cape *uv*, quæ ſit ad *v*G ut eſt DC *quad.* ad PC *quad.* Et quoniam ex conicis eſt Q*v* *quad.* ad P*v*G ut DC *quad.* ad PC *quad.* erit Q*v* *quad.* æquale P*v* × *uv*. Adde rectangulum *u*P*v* utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs PQ æquale rectangulo VP*v* (hh); ideoque circulus,



qui tangit ſectionem conicam in P & tranſit per punctum Q, tranſibit etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & ratio *uv* ad *v*G, quæ eadem eſt cum ratione DC*q* ad PC*q*, fiet ratio PV ad PG ſeu PV ad 2PC;

(hh) Cum ſit ex conicis quadratum ex Q*v* ad rectangulum P*v*G ut quadratum ex DC ad quadratum ex PC, quadratum autem ex DC ad quadratum ex PC ut *uv* ad *v*G (ex conſtructione) erit quadratum ex Q*v* ad rectangulum P*v*G ut *uv* ad *v*G (El. v. 11.) hoc eſt, ut rectangulum P*v* × *uv* ad rectangulum P*v*G. Quadratum igitur ex Q*v* rectangulo P*v* × *uv* æquale erit. (El. v. 9.) Quare ſi utrique addatur rectangulum *u*P*v*, duo illa, quadratum ex Q*v* & rectangulum *u*P*v*, ſimul ſumpta duobus rectangulis *uv* × P*v*, *u*P × P*v*, ſimul ſumptis, hoc eſt (El. II. 1.) rectangulo VP*v*, æqualia erunt. Sed, propter angulum ad T rectum, angulus Q*v*P recto major erit. (El. I. 16.) Ac propterea quadratum ex QP, quadratis è duabus Q*v*, *v*P, & duplo rectanguli T*v* × *v*P, tribus illis ſimul ſumptis, æquale erit. (El. II. 12.) Rurſum propter rectam *uv*, rectæ T*v* duplam (ex conſtructione) rectangulum *uv* × *v*P rectanguli T*v* × *v*P duplum erit. Duplum igitur rectanguli T*v* × *v*P cum quadrato ex *v*P, rectangulo *uv* × *v*P cum quadrato ex *v*P, hoc eſt, (El. II. 3.) rectangulo *u*P*v*, æquale erit. Et quadrato ex Q*v* communiter addito, fient tria illa, quadrata ex Q*v* et *v*P, & duplum rectanguli T*v*P, hæc inquam tria, quibus quadratum ex QP modò oſtendimus æquale, duobus, quadrato ex Q*v* & rectangulo *u*P*v*, ſimul ſumpta ſimul ſumptis, æqualia erunt. Sed quadratum ex Q*v* cum rectangulo *u*P*v* rectangulo VP*v* oſtenſum eſt æquale. Quadratum igitur ex QP rectangulo VP*v*, ſicut pronunciavit Newtonus, æquale erit.

(ii) Recta enim à centro virium C in tangentem PR ad perpendiculum demiſſa rectæ PF æqualis erit. Nempe cùm oppoſita ſint illæ parallelogrammi latera.

(kk) Corpora duo, urgentibus viribus quæ centrum commune C reſpiciant, ferri intelligantur in orbibus ellipticis ABD, TFE, quorum idem centrum C. Dicit Newtonus converſionum tempora inter ſe æqualia eſſe. Nos autem oſtendimus quod Newtonus dicit hoc modo.

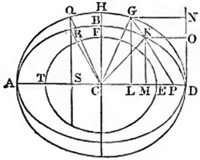
Sint AD, TE ellipſeon ABD, TFE axes tranſverſi; ſint CB, CF ſecundi earum ſemiaxes. Et axe tranſverſo AD, centro C, ſcriptam puta ellipſin AHD ellipſeos TFE ſimilem, & hujus AHD ſit CH ſecundus ſemiaxis. Urgentibus autem viribus quæ centrum idem C reſpiciant, ferri intelligatur tertium corpus per ellipſin DHA. Sint DCK, DCG areæ ellipſeon DBA, DHA motu corporum eodem tempore deſcriptæ. A punctis G, K ducantur GL, KM ad axem AD ordinatim. Tempus converſionis integræ in ellipſi ABD erit ad tempus quo ſimul deſcribuntur areæ DCK, DCG, ut area tota

2PC; ideoque PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis, quâ corpus in ellipſi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (ii) (per Corol. 3. Prop. VI.) hoc eſt (ob datum 2DCq in PFq) directè ut PC. Q.E.I.

Corol. 1. Eſt igitur vis ut diſtantia corporis à centro ellipſeos: & viciſſim, ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in ellipſi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo, in quem utique ellipſis migrare poteſt.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum, in ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum, periodica tempora. Nam tempora illa, in ellipſibus ſimilibus, æqualia ſunt (per Corol. 3 & 8. Prop. IV.) in ellipſibus autem communem habentibus axem majorem, ſunt ad invicem ut ellipſeon areæ totæ directè, & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſè; id eſt, ut axes minores directè, & corporum velocitates in verticibus principalibus inverſè; hoc eſt, ut axes illi minores directè, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inverſè; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis (kk).

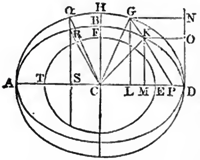
Scholium.



tota ellipſeos ABD ad aream DCK. Atque tempus illud, quo ſimul deſcribuntur areæ DCK, DCG, erit ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA ut area DCG ad aream totam ellipſeos DHA. Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è ratione ellipſeos DBA ad ſectorem DCK, ſectoriſque DCG ad ellipſin DHA; hoc eſt, quæ compoſita eſt è ratione ellipſeos DBA ad ellipſin DHA, ſectoriſque DCG ad ſectorem DCK. Sed area ellipſeos DBA erit ad aream ellipſeos DHA, cùm axem tranſverſum illæ communem habeant, ſicut illius ſemiaxis minor, CB, ad hujus ſemiaxem minorem CH. (Lemma IV. Cor. H. 1.) Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ CB ad rectam CH, ſectoriſque DCG ad ſectorem DCK. Neque huic rationi officient arearum DCG, DCK magnitudines, magnæ parvæve illæ fuerint, modò corporum motu ſimul fuerint deſcriptæ. Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ componetur è ratione rectæ CB ad rectam CH, cum eâ, quæ, arcubus DG, DK infinitè imminutis, evaneſcentis ſectoris DCG ad evaneſcentem DCK ultima erit. Hæc autem ratio ultima, rectarum quoque GL, KM evaneſcentium ultima inter ipſas erit. Nimirum cùm ſectores DCG, DCK triangulis CGL, CKM fiant ultimò æquales, et hæc triangula, propter baſes CL, CM ultimò æquales, ſint ultimò ut GL, KM evaneſcentes ipſorum altitudines. At ſi juncta GK axi AD producta in P occurrat, rectarum GL, KM ratio ultima illarum GP, PK ultima quoque inter ipſas erit. Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA, ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è ratione datâ rectæ CB ad CH, cum eâ quæ rectarum evaneſcentium GP, PK ultima inter ipſas erit. Ducatur DN, quæ ellipſes in illarum vertice communi, D, contingat. Et à punctis G, K, ducantur GN, KO cum axe AD parallelæ, quæ contingenti DN in punctis N, O, occurrant. Jam cùm motu corporum in ellipſibus DHA, DBA, areæ DCK, DCG ſimul deſcribantur; areis illis infinitè imminutis, rectæ evaneſcentes GN, KO erunt inter ſe ultimò ut vires centripetæ, quibus corpora, in loco D, verſus cen-

Scholium.

Si Ellipſis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hâc Parabolâ; & vis, ad centrum infinitè diſtans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc eſt theorema *Galilæi*. Et ſi coni ſectio parabolica (inclinatione plani ad conum ſectum mutatâ) vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripetâ in centrifugam verſâ [ll]. Et quemadmodum in circulo vel ellipſi, ſi vires tendunt ad centrum figuræ

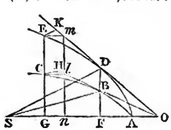


trum c trahuntur. (Prop. I. Cor. 4.) Quamobrem, cùm eâdem vi centripetâ, in loco D, corpus utrumque urgeatur, rectæ illæ GN, KO erunt ultimò inter ſe æquales. Recta igitur GK erit ultimò ſaltem cum contingente DN parallela, ac proinde ad axem AD ordinata. Evaneſcentium igitur GP, PK ratio inter ipſas ultima ea erit, quæ eſt ordinatarum inter ipſas quibus abſciſſa eſt communis. Atque hæc eſt, axium CH, CB inter ipſos data ratio. Tempus igitur converſionis in ellipſi DBA ad tempus converſionis in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è ratione rectæ CB ad CH, rectæque CH ad CB. Tempora igitur converſionum in ellipſibus DBA, DHA erunt inter ſe æqualia. Ellipſes autem DHA, EFT, cùm ſint inter ſe ſimiles, & corpora in ellipſibus illis retineantur viribus, quæ commune illarum centrum c reſpiciant; idcirco vires illæ, ſecundum propoſitionem X, erunt ubique ut diſtantiæ corporum à centro; & converſionum in his ellipſibus tempora erunt inter ſe æqualia. (Prop. IV. Cor. 3 & 8.) Hoc eſt tempus converſionis in EFT tempori converſionis in DHA æquale. Huic autem tempus converſionis in DBA oſtenſum eſt æquale. Tempora igitur converſionum in ellipſibus DBA, EFT inter ſe æqualia. Q. E. D.

Cor. II. Si ad axem AD, qui ellipſium DBA, DHA tranſverſus eſt communis, agatur quævis QS ordinatim, quæ ellipſes in punctis R, Q ſecet; junctis CR, CQ, ſectores elliptici DCR, DCQ motu corporum ſimul deſcribuntur. Ac proinde recta QR, quæ puncta illa ellipſium, DHA, DBA, jungit, quæ corpora mobilia, ſi è loco D ſimul fuerint egreſſa, ſimul appulerint, recta inquam QR quæ hæc puncta jungit, non modo ultimò, ſed ſemper quidem ad axem ellipſium communem AD ordinata erit. Sectores enim DCR, DCQ erunt inter ſe ut CB ad CH, hoc eſt ut areæ totæ ellipſium quarum ſunt ſectores. (Lemma IV. *Cor. H.* 1.) Permutando, area tota ellipſeos DBA, ad ſectorem DCR ut area tota ellipſeos DHA ad ſectorem DCQ. Eſt autem area tota ellipſeos DBA ad ſectorem DCR ut tempus converſionum in ellipſibus DBA, DHA ad tempus quo deſcribitur ſector DCR. (Prop. I.) Et area tota ellipſeos DHA ad ſectorem DCQ ſicut idem tempus converſionum in ellipſibus DBA, DHA ad tempus quo deſcribitur ſector DCQ. Tempus igitur converſionum in ellipſibus ad tempora quibus deſcribuntur ſectores DCR, DCQ eandem rationem habet. (El. V. 11.) Quare tempora quibus ſectores illi deſcribuntur inter ſe æqualia erunt. (El. V. 9.) Sectores igitur illi ſimul deſcribentur, ſi corpora mobilia è loco D ſimul egreſſa fuerint. Q. E. D.

(ll) Vide Tom I. (Excerp. ex Epiſt. IV. Not. 9.)

(mm) Sint Curvæ ABC, ADE axe communi AS, quæ eo modo ad ſe mutuò ſint affectæ, ut ordinatis quibuſvis, ab eodem axis puncto exeuntibus, data quædam ratio intercedat; unde illud etiam conſequetur, ut areis curvarum totis, ſi ex earum quidem genere ſint quæ in orbem redeant, vel partibus earum ad communem quamlibet ordinatam terminatis, eadem data ratio intercedat. (Lemma *Cor. H.* 1.) In his Curvis ferri intelligantur corpora, viribus centripetis, quæ centrum S in axe communi poſitum reſpiciant, ſollicitata; atque eâ quidem lege, ut tempora converſionum integra, ſi Curvæ ex earum genere ſint quæ in orbem redeant; aliter verò, ut tempora, quibus



abſolvuntur

ræ in abſciſſâ poſitum; hæ vires, augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abſciſſam, ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro, ſi modò tempora periodica maneant æqualia; ſic etiam in figuris univerſis ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcunque datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires, ad centrum quodcunque in abſciſſâ poſitum tendentes, in ſingulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro (mm).

abſolvuntur ſectores quidam quibus abſciſſa eſt communis, inter ſe æqualia ſint. Agatur quævis DF ad axem SA ordinatim, quæ axi illi in puncto F, curvis in B, D, occurrat. Jungantur SB, SD. Dicit Newtonus vim centripetam in loco B eſſe ad vim centripetam in loco D ut SB, ad SD. Nos autem oſtendimus quod Newtonus dicit hoc modo.

Ducatur alia quævis FG ad axem AS ordinatim, quæ axi in G, curvis in punctis C, E occurrat. Jam cùm tempora, vel converſionum tota, ſi curva utraque in orbem redeat; vel, ſi in orbem neutra redeat, tempora tamen quibus abſolvuntur ſectores quidam, quibus abſciſſa eſt communis, ſint inter ſe æqualia; ex eo conſequetur, tempora, quibus quilibet ſectores quorum abſciſſa eſt communis abſolvuntur, eſſe etiam inter ſe æqualia. Id enim eâdem argumentatione obtinebimus, quâ corollarium noſtrum è corollario Newtoni ſecundo demonſtravimus. Junctis igitur, SC, SE ſectores ASB, ASD, quorum communis eſt abſciſſa AF, ſimul deſcribentur, ſi corpora ſimul loco A exierint; necnon ſectores ASC, ASE quorum abſciſſa AG eſt communis. Corpora igitur, cùm ad loca B, D ea ſimul appulerint, atque rurſum ad loca C, E ſimul, ſectores BSC, DSE ſimul deſcripſerint. Ducatur recta BO, quæ curvam ABC in B contingat. Hæc axi SA in O occurrat, et jungatur OD. Propter datam ordinatarum, FB, FD, inter ipſas rationem, ordinatæ illæ cum fluxionibus ſuis proportione convenient (Geometr. Flux. Prop. IV.) hoc eſt $FD:FB = \dot{FD}:\dot{FB}$. Et cùm OB curvam ABC in B contingat, erit $FB:FO = \dot{FB}:\dot{AF}$. Erit igitur ex æquo $FD:FO = \dot{FD}:\dot{AF}$. Quare recta OD curvam ADE in D continget. Actis igitur à punctis C, E rectis CH, EK cum illis SB, SD parallelis, quæ rectis OB, OD in punctis H, K occurrant, vis centripeta in loco B ad vim centripetam in loco D rationem habebit eam, quæ ſectoribus BSC, DSE infinitè imminutis, evaneſcentium CH, EK ultima inter ipſas erit. Oſtendendum igitur hanc rationem ultimam eam eſſe, quæ eſt rectæ SB ad SD. Agatur cl cum axe SA parallela, quæ contingenti OB in l occurrat. Per l ducatur mln cum ordinatis ad axem SA parallela, quæ axi in n, contingenti OD in m, occurrat; & jungatur Em. Propter rectas duas CH, cl cum duabus SB, SO parallelas, triangula Hcl, BSO inter ſe ſimilia erunt, & CH erit ad cl ut SB ad SO. Propter rectas FD, mn inter ſe parallelas, erit ln ad lm ut FB ad BD. Eſt autem, propter illam quæ poſita eſt curvarum ad ſe mutuò affectionem, FB ad BD ut GC ad CE. Ergo nl erit ad lm ut GC ad CE. (El. V. 11.) Sunt autem nl, GC inter ſe æquales, utpote quæ parallelogrammi nC adverſa inter ſe ſint latera. Erunt igitur & lm, EC inter ſe æquales. (El. V. 14.) Sunt autem ex conſtructione inter ſe parallelæ. Quare Em, cl parallelæ etiam inter ſe & æquales erunt. (El. I. 33.) Et Em, cùm ea ſit parallela cum cl, parallela erit cum axe SO. (El. I. 30.) Duæ igitur EK, EM, cum duabus SD, SO ſunt parallelæ. Unde conſequetur, triangula EKm, DSO inter ſe ſimilia eſſe, atque EK eſſe ad Em, vel illi æqualem cl, ut SD ad SO. Sed cl eſt ad CH ut SO ad SB. Id enim jam antè oſtenſum eſt. Ex æquo igitur EK erit ad CH ut SD ad SB. Et invertendo CH:EK = SB:SD. Neque huic rationi officiet ſectorum BSC, DSE magnitudines, magni illi parvive fuerint. Sectoribus igitur illis, regreſſu punctorum E, C, ad manentia D, B, infinitè imminutis, rectis evaneſcentibus CH, EK eadem inter ipſas ratio, quæ eſt rectis SB, SD, vel ultimò manebit. Quamobrem & vis centripeta in loco B erit ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD. Q. E. D.

Verùm dicit Newtonus idem obtinere, etiamſi angulus ordinationis utcunque mutetur. Hoc autem verè dici rationibus ex iiſdem fere fontibus derivatis facile erit oſtendere, modò priùs quâ mente dictum eſt paulo enodatiùs expoſuerim.

SECTIO III.

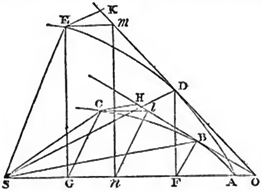
De motu corporum in conicis ſectionibus excentricis.

PROP. XI. PROB. VI.

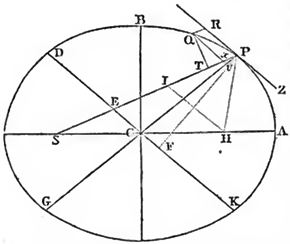
Revolvatur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipſeos.

Eſto ellipſeos umbilicus S. Agatur SP ſecans ellipſeos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Q*v* in *x*, & compleatur parallelogrammum Q*x*PR. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi majori AC; eo quòd, actâ ab altero ellipſeos umbilico, H, lineâ HI ipſi EC parallelâ, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI, adeo ut EP ſemiſumma ſit ipſarum PS, PI; id eſt (ob parallelas HI, PR, & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quæ conjunctim axem totum 2AC adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2BC\ quad.}{AC}$) dicto L, erit L×QR ad L×P*v* ut QR ad P*v*, id eſt, ut PE ſeu AC ad

Sint igitur duæ Curvæ ABC, ADE, axe communi AS, quæ eo modo ad ſe mutuò ſint affectæ, ut ſi à quolibet axis puncto, puta F, educantur datis, ſed diverſis, ad axem AS inclinationibus rectæ FB, FD, quæ Curvis in punctis B, D occurrant, habeat FB, ad FD rationem quandam datam. Unde illud etiam conſequetur, ut areis curvarum totis, ſi ſint illæ ex earum genere quæ in orbem redeant, vel partibus earum quæ ordinatis quibuſlibet conjugatis intercipiantur, data quædam ratio intercedat: ea nimirum, quam rectæ, à punctis B D in axem AF ad perpendiculum demiſſæ, inter ſe habent. (Lemma IV. *Cor. H.* 3.) Conjugatas autem ordinatas eas voco, quæ in hujuſmodi curvis ab eodem axis communis puncto eductæ ſunt. Jam per has curvas ABC, ADE ferri intelligantur corpora, viribus centripetis, quæ centrum S in axe curvarum communi poſitum reſpiciant, ſollicitata; atque eâ quidem lege, ut tempora converſionum integra, ſi curvæ in orbem redeant; aliter verò, ut tempora quibus abſolvuntur ſectores quidam, quibus abſciſſa eſt communis, inter ſe æqualia ſint. A quovis axis puncto educantur ordinatæ conjugatæ FB, FD, & SB, SD jungantur. Jam quod dicit Newtonus hoc eſt. Vim centripetam in loco B eſſe ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD. Oſtendimus autem quod Newtonus dicit hoc modo.



Ab alio quovis axis puncto, G, educantur ordinatæ conjugatæ, GC, GE, cum prioribus utique FB, FD parallelæ; junctiſque SC, SE corpora mobilia, ſi è loco A ſimul ea fuerint egreſſa, ſectores orbitæ unumquodque ſuæ, BSC, DSE ſimul deſcripſerint. Hoc enim eâdem argumentatione ac priùs obtinebimus. Ductâ autem rectâ BO, quæ curvam ABC in B contingat, ſi hæc axi AS in O oc-



ad PC ([a]); & L × P*v* ad G*v*P ut L ad G*v*; & G*v*P ad Q*v* *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (per Corol. 2. Lem. VII.) Q*v* *quad.* ad Q*x* *quad.* punctis Q & P coeuntibus eſt ratio æqualitatis; & Q*x* *quad.* ſeu Q*v* *quad.* eſt ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad.* ([b]) id eſt, ut CA *quad.* ad PF *quad.* ſive (per Lem. XII.) ut CD *quad.* ad CB *quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, L × QR fit ad QT *quad.* ut AC × L × PC*q* × CD*q*, ſeu 2CB*q* × PC*q* × CD*q* ad PC × G*v* × CD*q* × CB*q*, ſive ut 2PC ad G*v*. Sed, punctis Q & P coeuntibus, æquantur 2PC & G*v*. Ergo & his proportionalia L × QR & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet L × SP*q* æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis

O occurrat, juncta OD curvam alteram ADE continget in D. Id enim eiſdem prorſus verbis, quibus antea uſi ſumus, oſtendere licet. Actis igitur à punctis C, E, rectis CH, EK cum illis SB, SD parallelis, quæ rectis OB, OD, in punctis H, K occurrant; vis centripeta in loco B ad vim centripetam in loco D rationem habebit eam, quæ, ſectoribus BSC, DSE infinitè imminutis, evaneſcentium CH, EK ultima inter ipſas erit. Oſtendendum igitur hanc rationem ultimam eam eſſe, quæ eſt rectæ SB ad SD. Acta C*l* ut priùs, cum axe SA parallela, contingenti OB in *l* occurrat. Per *l* ducatur *ln* cum FB parallela; & à puncto *n*, ubi illa *ln* axem ſecat, agatur *nm* parallela cum FD, & occurrat illa *nm* contingenti OD in *m*. Jungatur autem E*m*. Propter rectas *nl*, FB inter ſe parallelas, erit *nl* ad FB ut *n*O ad OF. Atque rurſum propter rectas *nm*, FD inter ſe parallelas, erit *n*O ad OF ut *nm* ad FD. Quare *nl* erit ad FB ut *nm* ad FD. (El. V. 11.) Permutando *nl* ad *nm* ut FB ad FD. Eſt autem, propter illam quæ poſita eſt curvarum ad ſe mutuò affectionem, FE ad FD ut GC ad GE. Erit igitur *nl* ad *nm* ut GC ad GE. (El. V. 11.) Sunt autem *nl*, GC inter ſe æquales, utpote quæ parallelogrammi *nc* ex adverſo ſint latera. Erunt igitur & *nm*, GE inter ſe æquales. (El. V. 14.) Sunt autem parallelæ ex conſtructione. Quare & E*m*, G*n* parallelæ inter ſe & æquales erunt. Propter duas igitur EK, E*m* cum duabus SD, SO parallelas, triangula KE*m*, DSO, ut priùs, inter ſe ſimilia erunt, & EK erit ad E*m* ut SD ad SO. Verùm cùm illa E*m* æqualis ſit rectæ G*n*, etiam illi C*l* æqualis erit. Quare EK erit ad C*l* ut SD ad SO. Sed propter duas CH, C*l* cum duabus SB, SO parallelas, triangula illa HC*l*, BSO, ut priùs, inter ſe ſimilia erunt, & C*l* ad CH ut SO ad SB. Ex æquo igitur EK erit ad CH, ut SD ad SB. Ex quo eodem prorſus modo ac antè colligetur vim centripetam in loco B eſſe ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD. Q. E. D.

([a]) Sunt QR, *x*P inter ſe æquales, utpote quæ parallelogrammi P*x*QR adverſa inter ſe ſint latera. Quare QR : P*v* = P*x* : P*v*. Sed propter rectas Q*v*, DC inter ſe parallelas, triangula P*xv*, PEC erunt inter ſe ſimilia, & P*x* : P*v* = PE : PC.

([b]) Angulus rectus QT*x*, recto PFE æqualis. Sed propter rectas Q*x*, EF inter ſe parallelas, anguli Q*x*T, PEF inter ſe æquales erunt. (El. I. 29.) Triangula igitur QT*x*, PFE, inter ſe ſimilia, et Q*x* : QT = PE : PF. (El. VI. 4.) Quare Q*x*^{2} : QT^2 = PE^2 : PF^2. (El. VI. 22.)

3 centripeta

De Motu Corporum

centripeta reciprocè eſt ut L × SP*q*, id eſt, reciprocè in ratione duplicatâ diſtantiæ SP. Q. E. I.

Idem aliter.

Cùm vis ad centrum ellipſeos tendens, quâ corpus P in ellipſi illâ revolvi poteſt, ſit (per Corol. 1. Prop. X.) ut CP diſtantia corporis ab ellipſeos centro C; ducatur CE parallela ellipſeos tangenti PR; & vis, quâ corpus idem P circum aliud quodvis ellipſeos punctum S revolvi poteſt, ſi CE & PS concurrant in E, erit ut $\frac{\text{PE cub.}}{\text{SP}q}$ (c) (per Corol. 3. Prop. VII.) hoc eſt, ſi punctum S ſit umbilicus ellipſeos, ideoque PE detur, ut SP*q* reciprocè. Q. E. I.

Eâdem brevitate, quâ traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hîc facere: verùm ob dignitatem problematis, & uſum ejus in ſequentibus, non pigebit caſus cæteros demonſtratione confirmare.

PROP. XII. PROB. VII.

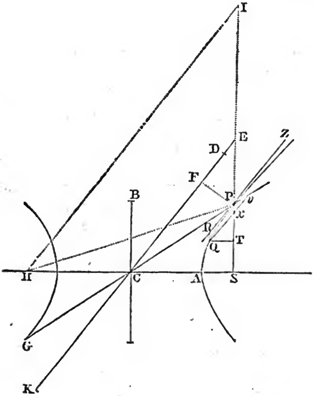
Moveatur corpus in Hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB ſemiaxes hyperbolæ; PG, KD diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD; & Q*v* ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP ſecans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Q*v* in *x*, & compleatur parallelogrammum QRP*x*. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo AC; eo quòd, actâ ab altero hyperbolæ umbilico H lineâ HI ipſi EC parallelâ, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI; adeo ut

EP

(c) Nimirum ſi corpora duo, quorum alterum vi quâdam centrum C, alterum aliâ vi centrum S reſpiciente perpetim urgeatur, orbem ellipticum ABG eodem tempore abſolvant, erit in quovis orbitæ puncto P vis illa quæ centrum C reſpicit ad vim aliam, punctum S reſpicientem, ut CP × SP² ad EP³. (Prop. VII. Cor. 3.) Sit Y recta, ad quam ſemiaxis AC rationem habeat eam, quam vis illa quæ centrum C reſpicit, in vertice A, ad vim alteram in dato loco P. Et mutato loco P, recta Y eâ ſemper lege fluat, ut ad ſemiaxem CA ea ſemper rationem habeat, quam vis punctum S reſpiciens, in loco P, ad vim quæ centrum C reſpicit in loco A. Ita vis illa quæ reſpicit punctum S ſemper erit ut recta Y. Jam cùm vis illa quæ centrum C reſpicit in loco A, ad vim alteram centrum S reſpicientem in loco P, rationem habeat eam, quæ compoſita eſt è ratione, quam vis centrum C in loco A reſpiciens habet ad vim idem centrum C reſpicientem in loco P, cum eâ, quam vis centrum C reſpiciens in loco P habet ad vim alteram centrum S reſpicientem in eodem loco P, ideirco habebit

EP ſemidifferentia ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quarum differentia axem totum 2AC adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit L×QR ad L×Pv ut QR ad Pv, ſeu Px ad Pv, id eſt (ob ſimilia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC, ſeu AC ad PC ([d]). Erit etiam L×Pv ad Gv×Pv ut L ad Gv; & (ex naturâ conicorum) rectangulum GvP ad Qv *quad.* ut PCq ad CDq; & (per Corol. 2. Lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QTq ut EPq ad PFq ([e]), id eſt, ut CAq ad PFq, ſive (per Lem. XII.) ut CDq ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus L×QR fit ad QTq ut AC×L×PCq × CDq, ſeu 2CBq× PCq × CDq, ad PC × Gv×CDq× CBq, ſive ut 2PC



bebit AC ad Y rationem ex eiſdem compoſitam. Harum verò prior ea eſt, quam AC habet ad PC (Prop. X. Cor. 1.) poſterior autem ea eſt, quam ſolidum CP × SP² habet ad cubum ex EP (Prop. VII. Cor. 3.) hoc eſt, ſi S umbilicus ſit ellipſeos, ad cubum ex CA. Habet igitur CA ad Y rationem eam, quæ componitur è rationibus rectæ CA ad CP, ſolidique CP × SP² ad CA³; ſive eam, quæ componitur è rationibus ſolidi CA × SP² ad CP × SP², ſolidique CP × SP² ad CA³. Verùm ſolidi CA × SP² ad CA³ ex eiſdem compoſita eſt ratio. Quare CA erit ad Y ut CA × SP² ad CA³; hoc eſt ut SP² ad CA². Ergo Y × SP² = CA³. Et $Y = \frac{CA^3}{SP^2}$. Erit igitur Y, ob datum CA³, ut SP² contrariè. Q. E. D.

( ) Vide Not. [a].

([e]) Vide Not. [b].

ad

De Motu Corporum

ad GV. Sed, punctis P & Q coeuntibus, æquantur 2PC & GV. Ergo & his proportionalia L×QR & QTq æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet L×SPq æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè eſt ut L×SPq, id eſt, reciprocè in ratione duplicatâ diſtantiæ SP. Q. E. I.

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prodibit hæc diſtantiæ CP proportionalis. Inde verò (per Corol. 3. Prop. VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (f), hoc eſt, ob datam PE, reciprocè ut SPq. Q. E. I.

Eodem modo (g) demonſtratur, quòd corpus, hâc vi centripetâ in centrifugam verſâ, movebitur in hyperbolâ oppoſitâ.

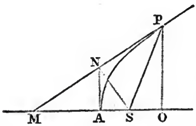
L E M M A XIII.

Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens eſt quadruplum diſtantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.

Patet ex conicis (h).

L E M M A XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium eſt proportionale inter diſtantias umbilici à puncto contactûs & à vertice principali figuræ.



Sit enim AP parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactûs, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M, & SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem.

(f) Vide Not. c.
(g) Immo eiſdem verbis.
(h) Hamilton. Conic. Lib. II. Prop. xxv. et Cor.

gentem. Jungatur AN; &, ob æquales MS & SP, MN & NP, MA & AO, parallelæ erunt rectæ AN & OP; & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A, & ſimile triangulis æqualibus SNM, SNP: ergo PS eſt ad SN ut SN ad SA. Q. E. D (k). Liber Primus.

Corol. 1. PS*q* eſt ad SN*q* ut PS ad SA.

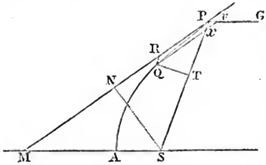
Corol. 2. Et, ob datam SA, eſt SN*q* ut PS.

Corol. 3. Et concurſus tangentis cujuſvis PM cum rectâ SN, quæ ab umbilico in ipſam perpendicularis eſt, indicit in rectam AN, quæ parabolam tangit in vertice principali.

PROP. XIII. PROB. VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat conſtructio lemmatis; ſitque P corpus in perimetro Parabolæ, & à loco Q, in quem corpus proximè movetur, age ipſi SP parallelam QR, & perpendicularem QT, necnon Q*v* tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in *v*, tum diſtantiæ SP in *x*. Jam ob ſimilia triangula P*xv*, SPM, & æqualia unius latera SM, SP, æqualia ſunt alterius latera P*x*, ſeu QR, & P*v*. Sed, ex conicis, quadratum ordinatæ Q*v* æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri P*v*, id eſt (per Lem. XIII.) rectangulo 4PS×P*v*, ſeu 4PS×QR; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Q*v* ad Q*x* (per Corol. 2. Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo



Q*x* *quad.* eo in caſu æquale eſt rectangulo 4PS×QR. Eſt autem (ob ſimilia triangula QT*x*, SPN) Q*xq* ad QT*q* ut PS*q* ad SN*q*, hoc eſt (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut PS ad SA, id eſt, ut 4PS×QR ad 4SA×QR, & inde (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) QT*q* & 4SA×QR æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale SP*q*×4SA: & propterea (per Corol. 1 & 5. Prop.

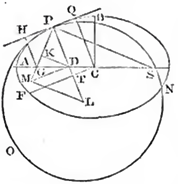
(k) Eſt hæc Propoſitio triceſima Libri ſecundi Conicorum Hamiltoni.

De Motu Corporum

VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut SPq × 4SA; id eſt, ob datam 4SA reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ SP. Q. E. I.

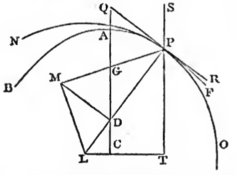
Corol. 1. Ex tribus noviſſimis propoſitionibus conſequens eſt, quòd ſi corpus quodvis P ſecundum lineam quamvis rectam PR quâcunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripetâ, quæ ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, ſimul

() LEMMA II. (II.)



Sit ſectio quævis conica APB, quam in P puncto circulus OPN oſculetur. Hujus circuli centrum ſit L; junctaque LP axi ſectionis conicæ, CA, tranſverſo quidem ſi ſectio Ellipſis ſit vel Hyperbola, in puncto D occurrat. Sit G umbilicus ſectionis conicæ, & in junctam PG, à puncto L, deducatur ad perpendiculum recta LM. Denique jungatur MD. Dico hanc MD illam LP ad perpendiculum inſiſtere; hoc eſt, angulos MDP, MDL rectos eſſe. Si curva FAB Ellipſis ſit vel Hyperbola, ſit C ejus centrum, et CB dimidium axis ſecundi; ab umbilico G in rectam PH, quæ curvam FAB, circulumque NPO in puncto P contingit, agatur ad perpendiculum recta GH. A puncto D in rectam PG agatur ad perpendiculum recta DK. Per C centrum ſectionis conicæ agantur CQ, CF cum rectis DP, PH parallelæ; quarum illa CQ rectæ PH in Q, altera CF rectæ DP in T, ſectioni conicæ in F, occurrat. Rectangulum LP × CQ quadrato ex CF æquale eſt (Hamilton. Conic. Lib. V. 18. Cor.) et rectangulum DP × CQ quadrato ex CB eſt æquale. (Hamilton. Conic. Lib. ii. 22.) Erit igitur quadratum ex CF ad quadratum ex CB ut rectangulum LP × CQ ad DP × CQ, hoc eſt ut LP ad PD. Sed quadratum ex CF eſt ad quadratum ex CB ut quadratum ex GP ad quadratum ex GH (Hamilton. Conic. Lib. II. 31.) Et quadratum ex GP eſt ad quadratum ex GH ut quadratum ex DP ad quadratum ex PK. (Eſſe enim GP ad GH ut DP ad PK id in Lemmate noſtro primo demonſtrando jam antè oſtendimus.) Quare LP erit ad PD ut quadratum ex DP ad quadratum ex PK (El. V. 11.) Sed propter angulos DKP, LMP rectos, rectæ DK, LM erunt inter ſe parallelæ. Quapropter quadratum ex DP erit ad quadratum ex PK ut quadratum ex LP ad quadratum ex PM. Erit igitur LP : PD = LP^2 : PM^2 (El. V. 11.) Ac propterea LP : PM = PM : PD. Triangula igitur LPM, MPD inter ſe ſimilia erunt, angulique LMP, PDM inter ſe æquales (El. VI. 6.) Sed angulus LMP rectus; talis enim factus eſt. Quare & MDP rectus. Q. E. D.

Si Parabola ſit ſectio conica FAB, axis ejus CA productus contingenti PR in Q occurrat, & per P ducatur TPS diameter parabolæ. Anguli QPG, QPS ſunt inter ſe æquales (Hamilton. Conic. Lib. II. 15.) Quare & angulus GPD, qui cum illo QPG rectum conficit, æqualis erit angulo RPT, qui cum TPR, illi QPS æquali, rectum etiam conficit. A puncto L in diametrum PT ad perpendiculum demittatur LT. In triangulis rectangulis LMP, LTP, anguli acuti MPL, TPL (GPD, TPD) oſtenſi ſunt inter ſe æquales. Quare & acuti reliqui, MLP, PLT, inter ſe æquales erunt. Sed latus LP, acutis contiguum, duobus triangulis commune eſt. Quare reliqua hujus latera reliquis alterius æqualia erunt, ea utique ſingulatim conferendo, quæ anguli æquales ex adverſo ſpectant. Quare rectæ PM, PT erunt inter ſe æquales. Sed PT æqualis eſt dimidio parametri ad diametrum PT pertinentis; nempe cùm ex circuli naturâ, PT ſemiſſis ſit partis illius diametri SP quam circulus



ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ ſectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contrà. Nam datis umbilico, & puncto contactûs, & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit (l). Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, & velocitate corporis (m): & orbes duo ſe mutuò tangentes eâdem

NPO abſcindit; quæ pars diametri SP parametro illi æqualis eſt. (Hamilton. Conic. Lib. v. 17.) Recta igitur PM ſemiſſis erit parametri ad diametrum SPT pertinentis, ac proinde rectæ DQ æqualis. (Hamilton. Conic. Lib. II. 25.) Sed triangulis duobus MPD, QDP latus PD eſt commune. Latera igitur duo MP, PD, duobus QD, DP æqualia. Angulus autem illius MPD, hujus angulo QDP eſt æqualis. Nam propter rectas DQ, TP parallelas, angulus QDP æqualis eſt angulo TPD (El. I. 29.) cui etiam MPD oſtenſus eſt æqualis. Reliqui igitur triangulorum illorum MPD, QDP anguli inter ſe æquales erunt, conferendo utique quos latera æqualia ex adverſo ſpectant. Angulus igitur MDP angulo QPD æqualis. Rectus autem QPD. Quare & MDP rectus. Q. E. D.

DE PARABOLA ALITER.

Circulus, centro D, radio DP ſcriptus, parabolam in duobus punctis contingeret. Nimirum in P, & in alterâ extremitate rectæ à puncto illo P ad axem ordinatim ductæ. Quare cùm MP dimidio parametri, ad diametrum SP pertinentis, æqualis ſit, erit LP ad PM ut PM ad PD (Hamilton. Conic. Lib. v. 17. Cor.) Triangula igitur LPM, MPD inter ſe ſimilia erunt, et angulus MDP angulo LMP æqualis. Rectus igitur MDP, cùm LMP factus fuerit rectus. Q. E. D.

His autem oſtenſis, facilis erit demonſtratio ejus quod Newtonus dixit, "Datis umbilico, & puncto contactûs & poſitione tangentis, deſcribi poſſe ſectionem conicam, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit."

Circulus enim magnitudine & poſitione datus NPO, ſectionem quandam conicam ABP, cujus umbilicus G detur, in dato puncto P oſculetur; dico ſectionem conicam ABP poſitione datam eſſe. Sit L centrum circuli NPO, CA axis ſectionis conicæ ABP, qui, ſi ſectio illa Ellipſis ſit vel Hyperbola, tranſverſus ſit. Jungantur LP, GP, quarum LP axi CA in D occurrat. Ab L in rectam GP ad perpendiculum demittatur LM, & MD jungatur. Jam propter puncta P, G data, recta GP poſitione data eſt. Et propter circulum NPO magnitudine & poſitione datum, centrum ejus L datum eſt. Recta igitur LM, à dato puncto L in rectam PG poſitione datam ad perpendiculum deducta, poſitione ipſa dabitur (Dat. 30.) Punctum igitur M datum (Dat. 25.) Sed angulus MDP rectus eſt (Lemma II. H.) Recta igitur MD, à dato puncto M in rectam poſitione datam PL ad perpendiculum deducta, poſitione ipſa dabitur (Dat. 30.) Punctum igitur D datum (Dat. 25.) Sed G datum. Id enim poſitum eſt. Recta igitur GD, quæ eſt axis ſectionis conicæ, poſitione data eſt (Dat. 26). Actaque PH, quæ datum circulum NPO in dato puncto P contingat, poſitione dabitur, & ſectionem conicam in puncto P continget. Jam ſi Parabola ſit ſectio conica, quam circulus NPO in loco P oſculetur, cùm umbilicus ejus datus ſit, & axis poſitione datus, et cùm rectam poſitione datam in dato puncto ea contingat, poſitione ipſa data erit. Id enim ex elementis conicis ſatis patet. Quòd ſi ſectio illa, quam circulus NPO in P oſculetur, Ellipſis ſit vel Hyperbola, ſit S umbilicus ejus alter, & jungatur PS. Anguli GPH, SPQ, quos rectæ PG, PS ad umbilicos ductæ cum contingente HPQ faciunt, inter ſe æquales erunt. (Hamilton. Conic. Lib. II. 16 & 17.) Quare anguli HPG, HPS, qui cum æqualibus illis rectos ſingulatim conficiunt, inter ſe æquales ſunt. Sed, propter rectas GP, PH poſitione datas, angulus GPH datus eſt. Quare HPS datus. Recta igitur PS, quæ à dato puncto P, datâ inclinatione ad rectam PH poſitione datam eſt educta, hæc PS poſitione & ipſa dabitur. (Dat. 29.) Sed recta GD poſitione data. Quare punctum S datum. (Dat. 25.) Sectionis igitur conicæ ABP umbilicus uterque datus, & rectam PH, poſitione datam, in dato puncto illa tangit. Poſitione igitur & ipſa data eſt. Q. E. D.

(m) Ea ſit corporis velocitas in dato loco P, quâ, dato quodam tempore, rectam magnitudine & poſitione datam PQ conficeret; & ea in loco P ſit vis centripeta, quâ corpus eodem temporis ſpatio æquabiliter incitatum, motu accelerato ſpatium datum QA conficeret, dummodo recta QA cum directione vis centripetæ in loco P parallela ſit. Et ducatur parabola EAP, cujus diametri cum

dem vi centripetâ eâdemque velocitate deſcribi non poſſunt.

Corol. 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco ſuo P, ea ſit, quâ lineola PR in minimâ aliquâ temporis particulâ deſcribi poſſit; & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium QR: movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ ſectione, cujus latus rectum principale eſt quantitas illa $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimò ſit, ubi lineolæ PR, QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad Ellipſin; & caſum excipio, ubi corpus rectâ deſcendit ad centrum.

PROP. XIV. THEOR. VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ locorum à centro; dico, quòd orbium latera recta principalia ſunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore deſcribunt.

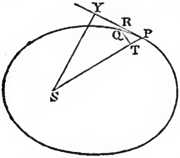
Nam (per Corol. 2. Prop. XIII.) latus rectum L æquale eſt quantitati

cum rectâ QA ſint parallelæ, quæque rectam PQ in P contingat, & per datum punctum A tranſeat. Hæc parabola poſitione dabitur; & cùm corpus è loco P cum velocitate illâ, quam poſuimus, diſcedens, per hanc parabolam incederet, ſi vis centripeta eadem maneret, & ſecundum rectas cum illâ QA parallelas ſemper ageret; idcirco hujus parabolæ eadem erit, quæ orbitæ, per quam corpus fertur, in loco P curvatura. Hoc eſt idem circulus curvam utramque, parabolam & orbitam, in loco P oſculabitur. Circulus autem, qui parabolam ABF poſitione datam, in dato puncto P oſculatur, magnitudine & poſitione ipſe datus erit. Circulus igitur qui orbitam in loco P oſculatur magnitudine & poſitione datus. Q. E. D. *(Eadem fere Le Seur & Jacquier.)*

(n) Demonstratio Newtoni explicatior facta.

Corpora duo ferri intelligantur circa centrum commune S, urgentibus viribus quæ centrum illud S reſpiciant, quæque ſint ſemper inter ſe ut quadrata diſtantiarum à centro illo contrariè ſumpta. Corpora igitur in orbibus conicis ferentur, quorum S umbilicus erit. Sint orbes illi APB, *apb*, et ſint PSQ, *psq* orbium ſectores quidam, qui motu corporum ſimul deſcribuntur. Dicit Newtonus orbium APB, *apb* latera recta rationem inter ſe habere, arearum PSQ, *psq* duplicatam. Sint L, *l*, orbium APB, *apb*, latera recta. Cùm ſectores PSQ, *psq*, ſimul deſcribantur; propter æquabilem arearum circa centrum S deſcriptionem, eadem ſemper ſectoribus illis inter ipſos ratio erit, quæcunque fuerint illorum magnitudines. Eadem igitur illis ſemper manet, quæ naſcentium prima fuit. Prima autem naſcentium fuit, quæ rectangulorum SP × QT, *sp* × *qt* naſcentium prima. Oſtendendum igitur L ad *l* rationem habere eam, quæ compoſita eſt è ratione quadrati ex SP ad quadratum ex *sp*, & ratione primâ quadrati è naſcente QT ad quadratum è naſcente *qt*. Sed per Corollarium 2. Prop. XIII. coeuntibus punctis Q, P, $QT^2 = L \times QR$; & coeuntibus punctis *q*, *p*, $qt^2 = l \times qr$. Quare $L \times QR : l \times qr = QT^2 : qt^2$, ultimò ſcilicet, arcubus PQ, *pq* infinitè imminutis. Sed $l \times qr : l \times QR = qr : QR$. Quare ex æquo $L \times QR$ ad $l \times QR$, ſive L ad *l*, rationem habet eam, quæ compoſita eſt è ratione primâ quadrati è naſcente QT ad quadratum è naſcente *qt*, & ratione naſcentis *qr* ad naſcentem QR. Sed cùm ſectores PSQ, *psq*, ſimul deſcribuntur, ea erit naſcentis *qr* ad naſcentem QR prima ratio, quæ vis centripetæ in loco *p* ad vim centripetam in loco P; ſive quæ quadrati ex SP ad quadratum ex *sp*. Ratio igitur L ad *l* compoſita

quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimò ſit, ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR, dato tempore, eſt ut vis centripeta generans,



hoc eſt (per hypotheſin) reciprocè ut SPq. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ eſt ut $QTq \times SPq$; hoc eſt, latus rectum L in duplicatâ ratione areæ $QT \times SP$ (n). Q. E. D.

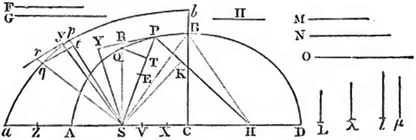
Corol. Hinc Ellipſeos area tota, eique proportionale rectangulum ſub axibus, eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota eſt ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in tempus periodicum (o).

PROP. XV. THEOR. VII.

Iiſdem poſitis, dico quòd tempora periodica in Ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicatâ majorum axium (p).

Namque axis minor eſt medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum; atque ideo rectangulum ſub axibus eſt in

compoſita eſt è ratione primâ quadrati è naſcente QT ad quadratum è naſcente qt, & ratione qua-



drati ex SP ad quadratum ex sp. Atque hæc eſt arearum quæ ſimul conficiuntur duplicata ratio. Q. E. D.

(o) Orbes conici APB, *apb* Ellipſes ſint, quarum centrum C, ſemiaxes tranſverſi CA, C*a*, ſecundi CB, C*b*. Ellipſeos APB area ſignificetur literâ A; alterius *apb*, literâ *a*. Sint rectæ M, N, quarum M habeat ad N proportionem eam, quam tempus converſionis in Ellipſi APB ad tempus converſionis in Ellipſi *apb*: & capiatur λ, quæ laterum rectorum, L, *l* proportione media ſit. Dicit Newtonus eſſe A ad *a*, ut $M \times L$ ad $N \times \lambda$.

Capiatur recta Π, quæ ſit ad M ut tempus quo conficiuntur ſectores PQS, *pqs*, ad tempus converſionis in ellipſi APB. Eadem Π erit ad N ut tempus quo conficiuntur ſectores illi PQS, *pqs* ad tempus converſionis in ellipſi alterâ *apb*. Jam area A erit ad ſectorem PQS ut M ad Π, ſive ut $M \times L$ ad $\Pi \times L$ (Prop. I.) Sed ſector PQS ad ſectorem *pqs* ut L ad λ (per Prop. XIV.) ſive ut $\Pi \times L$ ad $\Pi \times \lambda$. Et ſector *pqs* ad aream *a* ut Π ad N (Prop. I.) ſive ut $\Pi \times \lambda$ ad $N \times \lambda$. Ex æquo igitur area A ad aream *a* ut $M \times L$ ad $N \times \lambda$. Q. E. D.

(p) Sive rationem axium majorum triplicatam temporum duplicatam eſſe.

ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti & ſeſquiplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per Corol. Prop. XIV.) eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique ſubduplicata ratio lateris recti, & manebit ſeſquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. Q. E. D (q).

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipſibus eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipſeon.

PROP. XVI. THEOR. VIII.

Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico, quòd velocitates corporum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione perpendiculorum inverſè, & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY, & velocitas corporis P erit reciprocè in ſubduplicatâ ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa eſt ut arcus quàm minimus PQ in datâ

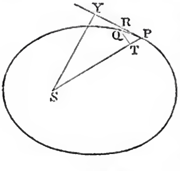
(q) DEMONSTRATIO NEWTONI EXPLICATIOR FACTA.

CAPIATUR O cum duabus M, N, proportione tertia; capiantur etiam CV, CX, ut CA habeat ad CV, & CV ad CX rationem quam *ca* ad CA. Oſtendendum eſt eſſe O ad M ut *ca* ad CX. Capiatur μ, ad quam λ proportionem habeat quam M ad N. Jam cùm ſit $M : N = \lambda : \mu$, erit rectangulum $M \times L$ ad rectangulum $N \times L$ ut λ ad μ. Sed rectangulum $N \times L$ eſt ad rectangulum $N \times \lambda$ ut L ad λ. Erit igitur ex æquo perturbatè, $M \times L$ ad $N \times \lambda$ ut L ad μ. Sed $M \times L : N \times \lambda = CA \times CB : ca \times cb$ (Prop. XIV. Cor.) Ergo $CA \times CB : ca \times cb = L : \mu$. Hoc eſt, ratio rectæ L ad μ componitur è rationibus rectæ CA ad *ca*, rectæque CB ad *cb*. Quare quadratum ex L ad quadratum ex μ rationem habebit eam, quæ componetur è ratione quadrati ex CA ad quadratum ex *ca*, quadratique ex CB ad quadratum ex *cb*. Sed propter continuam rectarum *ca*, CA, CV analogiam, erit quadratum ex CA ad quadratum *ca* ut CV ad *ca*. Et quadratum ex CB eſt ad quadratum ex *cb* ut rectangulum $CA \times L$ ad rectangulum $ca \times l$. (Nam hæc rectangula quadratorum illorum dupla ſunt). Quadratum igitur ex L ad quadratum ex μ rationem habebit eam, quæ componetur è rationibus rectæ CV ad *ca* rectanguliquc $CA \times L$ ad rectangulum $ca \times l$; ſive eam, quæ eſt ſolidi $CV \times CA \times L$ ad ſolidum $ca^2 \times l$. Eſt autem quadratum ex L ad quadratum ex μ, ut ſolidum $L^2 \times l$ ad ſolidum $\mu^2 \times l$. Quare $L^2 \times l : \mu^2 \times l = CV \times CA \times L : ca^2 \times l$. Permutando, rectangulum $L \times l$ ad rectangulum $CV \times CA$ ut quadratum ex μ ad quadratum ex *ca*. Hoc eſt, cùm $L \times l = \lambda^2$, $\lambda^2 : CV \times CA = \mu^2 : ca^2$. Permutando $\lambda^2 : \mu^2 = CV \times CA : ca^2$. Sed $\lambda^2 : \mu^2 = M^2 : N^2 = M : O$ (ex conſtruct.) Quare M habet ad O proportionem eam, quam rectangulum $CV \times CA$ ad quadratum ex *ca*; ſive eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ CV ad *ca* rectæque CA ad *ca*; ſive è rationibus rectæ CX ad CA (eſt enim $CV : ca = CX : CA$ ex conſtruct.) rectæque CA ad *ca*. Sed ratio rectæ CX ad *ca* ex eiſdem eſt compoſita. Quare $M : O = CX : ca$. Invertendo $O : M = ca : CX$. Q. E. D.

(r) DEMONSTRATIO NEWTONI EXPLICATIOR FACTA.

SINT rectæ F, G, quarum F ſit ad G ut velocitas corporis in orbe APB lati, in loco P, ad velocitatem

datâ temporis particulâ deſcriptus, hoc eſt (per Lem. VII.) ut tangens PR; id eſt, ob proportionales PR ad QT & SP ad SY, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, ſive ut SY reciprocè & SP × QT directè; eſtque SP × QT ut area dato tempore deſcripta, id eſt (per Prop. XIV.) in ſubduplicatâ ratione lateris recti. Q. E. D [f].



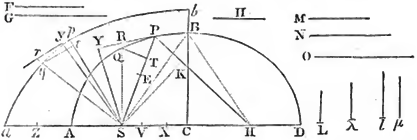
Corol. 1. Latera recta principalia ſunt in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum, & duplicatâ ratione velocitatum [f].

Corol. 2. Velocitates corporum, in maximis & minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione diſtantiarum inverſè, & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ [g].

Corol.

tem corporis in orbe altero *apb* lati, in loco *p*. In tangentes PY, *py* demiſſis ad perpendiculum rectis SY, *sy*, dicit Newtonus F eſſe ad G ut L × *sy* ad λ × SY. Nam cùm ſectores PSQ, *psq* ſimul deſcribantur, erit F ad G ut PQ ad *pq*; ultimò utique, arcubus PQ, *pq* infinitè imminutis. Erit autem PQ ad *pq* ut PR ad *pr* ultimò (Lemma VII.) Quare F : G = PR : *pr* ultimò. Ac proinde F × SY : G × SY = PR : *pr* = SY × PR : SY × *pr* ultimò

Sed G × SY : G × *sy* = SY : *sy* = SY × *pr* : *sy* × *pr*. Ex æquo igitur F × SY : G × *sy* = SY × PR : *sy* × *pr*;



ultimò ſcilicet arcubus QP, *qp* infinitè imminutis. Sed illa SY × PR, *sy* × *pr*, illis SP × QT, *sp* × *qt* ultimò ſunt æqualia. Quare F × SY : G × *sy* = SP × QT : *sp* × *qt* ultimò. Et SP × QT : *sp* × *qt* ultimò = L : λ (Prop. XIV.) Quare F × SY : G × *sy* = L : λ = L × *sy* : λ × *sy*. Et G × *sy* : G × SY = *sy* : SY = λ × *sy* : λ × SY. Quare ex æquo F : G = L × *sy* : λ × SY: Q. E. D.

(f) Nam oſtenſum eſt eſſe F × SY : G × *sy* = L : λ. Habet igitur L ad λ rationem eam, quæ componitur è ratione rectæ F ad G rectæque SY ad *sy*. Quadratum igitur ex L ad quadratum ex λ rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus quadrati ex F ad quadratum ex G, & quadrati ex SY ad quadratum ex *sy*. Et ratio rectæ L ad *l*, cùm eadem ſit illa quæ quadrati ex L ad quadratum ex λ, ex iiſdem utique componetur. Ratio igitur rectæ L ad *l* componetur è rationibus quadrati ex F ad quadratum ex G, quadratique ex SY ad quadratum ex *sy*. Q. E. D.

(g) Punctis utique P, *p* in puncta A, *a*, qui vertices ſunt orbium, tranſlatis, rectæ SY, *sy* illis

SA,

De Motu Corporum

Corol. 3. Ideoque velocitas in conicâ ſectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico diſtantiâ, eſt ad velocitatem in Circulo, in eâdem à centro diſtantiâ, in ſubduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam (u).

Corol. 4. Corporum in Ellipſibus gyrantium velocitates, in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi, ſunt eædem, quæ corporum gyrantium in Circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per Corol. 6. Prop. IV.) reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores, & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſè cum ſubduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inverſè (x).

Corol. 5. In eâdem figurâ, vel etiam in figuris diverſis, quarum latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciprocè ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol.

SA, *sa* ſingulatim evadunt æquales. Igitur, quando hoc evenerit, cùm ſit ſemper, $F : G = L \times sy : \lambda \times SY$, erit $F : G = L \times sa : \lambda \times SA$.

(u) Puta orbem conicum *apb (vide fig. text. p. 85)* in alium mutari; qui, manente umbilico S, orbem APB in vertice communi, A, contingat. Ita æquales fient *sa*, SA; & cum F ſemper ſit ad G ut $L \times sa$ ad $\lambda \times SA$, (modò illæ F, G inter ſe rationem gerant, quam velocitates corporum in orbium conicorum verticibus) idcirco æquatis jam *sa*, SA, fiet $F : G = L :$. Et qualiſcunque ſit orbis ille conicus, quem alterum APB in vertice A contingere poſuimus, dummodo umbilicum S verticemque A utrumque cum orbe APB communem ille habeat, manebit ea quæ expoſita eſt proportionum ſimilitudo; $F : G = L : \lambda$. Circulus igitur ſit orbis ille conicus, qui orbem APB in A contingat, cui circulo centrum ſit S, radius SA. Circulus ille pro Ellipſi haberi poteſt, cujus umbilicus S, latus autem rectum *l* tranſverſo 2SA æquale. Jam verò, vi formulæ generalis, F erit ad G ut L ad λ. Sed cùm illa λ duarum L, *l* proportione ſit media, quarum *l* jam ſit æqualis illi 2SA, erit λ duarum L, 2SA proportione media. Quare F ad G proportionem habet, quam L ad eam quæ duarum L, 2SA proportione eſt media; ſive proportionem duarum L, 2SA ſubduplicatam. Q. E. D.

(x) Sint APB, *apb* Ellipſes, *(vide fig. text. p. 85)* quarum ſemiaxes ſecundi CB, *cb*: punctiſque P, *p* ad B, *b*, vertices axium ſecundorum tranſlatis, SY, *sy*, ſemiaxibus CB, *cb* æquales fient. Ac proinde, cùm ſit ſemper $F : G = L \times sy : \lambda \times SY$, fiet $F : G = L \times cb : \lambda \times CB$. Quadratum igitur ex F ad quadratum ex G rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus quadrati ex L ad quadratum ex λ, quadratique ex *cb* ad quadratum ex CB. Harum autem prior ea eſt, quam L habet ad *l*, ſive rectangulum $ca \times L$ ad rectangulum $ca \times l$; poſterior, quam rectangulum $ca \times l$ habet ad rectangulum $CA \times L$. Ex his autem rationibus rectanguli $ca \times L$ ad rectangulum $CA \times L$, ſive rectæ *ca* ad rectam CA, compoſita eſt ratio. Quadrati igitur ex F ad quadratum ex G ex eiſdem illis ac rectæ *ca* ad rectam CA compoſita eſt ratio. Quare $F^2 : G^2 = ca : CA = sb : SB$. Hoc eſt F ad G rationem habebit ipſarum *sb*, SB ſubduplicatam. Manebit autem ſemper hæc proportionum ſimilitudo, quæcunque fuerint Ellipſeon APB, *apb* vel ſpecies, vel magnitudines. Manebit igitur ſi Ellipſeon altera, puta *apb*, in Circulum migraverit, centro utique S, radio SB, ſcriptum. Ita verò *sb*, SB æquales fient. Quare & F, G inter ſe æquales. Eædem igitur in Ellipſibus, in mediocribus diſtantiis, quæ in Circulis, ad eaſdem diſtantias, velocitates. Q. E. D.

(y) Ha-

Corol. 6. In Parabolâ velocitas eſt reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in Ellipſi magis variatur, in Hyperbolâ minùs quàm in hâc ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem Parabolæ eſt in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ. In Hyperbolâ perpendiculum minùs variatur, in Ellipſi magis (y).

Corol. 7. In Parabolâ velocitas corporis, ad quamvis ab umbilico diſtantiam, eſt ad velocitatem corporis revolventis in Circulo, ad eandem à centro diſtantiam, in ſubduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipſi minor eſt, in Hyperbolâ major quàm in hâc ratione. Nam per hujus corollarium ſecundum (z) velocitas in vertice Parabolæ eſt in hâc ratione, & per corollaria ſexta hujus & propoſitionis quartæ ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis (aa). Hinc etiam in Parabolâ velocitas ubique æqualis

(y) Hamilton. Conic. Lib. 2. Prop. XXXI. Cor. 2.

(z) Tertium potius.

(aa) PUTA orbem conicum APB Parabolam eſſe. Hanc Circulus, centro S, radio SA ſcriptus, in vertice A contingat (*vide fig. text, p.* 85). Et ſit F ad G ut velocitas corporis in Parabolâ lati, in vertice ejus, ad velocitatem corporis in hoc Circulo circumacti. Sit L latus rectum Parabolæ, & ſumatur λ, duarum L, 2SA proportione media. Erit $F : G = L : \lambda$ (Cor. 3.) Sed $L = 4SA$ (Hamilton. Conic. Lib. II. Def. 3.) Quare $L : 2SA = 4 : 2 = 2 : 1$. Hoc eſt, $L^2 : \lambda^2 = 2 : 1$. Et $L : \lambda = \sqrt{2} : 1$. Habet igitur F ad G, ſive velocitas corporis in Parabolâ lati in vertice A, ad velocitatem corporis in Circulo ad diſtantiam SA circumacti, rationem binarii ad unitatem ſubduplicatam. Velocitas autem corporis in Parabolâ lati, in vertice A, ad velocitatem corporis ejuſdem in alio quovis Parabolæ loco, P, rationem habet rectæ SP ad SA ſubduplicatam (Cor. 6.) Et corporum, quæ, circum idem centrum S, ad diſtantias SA, SP, in Circulis circumaguntur, eadem erit velocitatum ratio; modò corpora illa in Circulo unumquodque ſuo eiſdem viribus centrum S reſpicientibus, quibus corpus prius in Parabolâ, retineantur (Prop. IV. Cor. 6.) Quare velocitas in Parabolâ in loco P ad velocitatem corporis in Circulo circum centrum S, ad diſtantiam SP circumacti, eandem rationem habebit, quam velocitas in vertice Parabolæ A ad velocitatem corporis in Circulo circum centrum S, ad diſtantiam SA circumacti; ſive eam, quæ binarii ad unitatem ſubduplicata eſt.

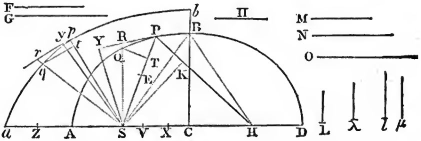
Jam verò Ellipſis ſit orbis APB, quam Circulus, centro S, radio SA ſcriptus, in vertice A contingat. Et ſit F ad G ut velocitas corporis in Ellipſi in vertice A ad velocitatem in Circulo; & ſit L latus rectum Ellipſeos; λ, duarum L, 2SA proportione media. Erit igitur $F : G = L : \lambda$ (Cor. 3.) Sed L minor erit quàm 4SA (Hamilton. Conic. Lib. II. 9 et 26.) Quare L minor erit, quàm ut habeat ad 2SA rationem eam quam 4 ad 2, vel 2 ad 1. Ac proinde quadratum ex L minus, quàm ut habeat ad quadratum ex λ rationem eam quàm 2 ad 1. Unde rurſum L minor quàm ut habeat ad λ rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1. Quare & F minor, quàm ut habeat ad G rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1. Jam capiatur punctum quodvis in Ellipſi, P; & ſit *f* ad F ut velocitas corporis per Ellipſin, circum umbilicum S, circumacti, in loco P, ad velocitatem ejuſdem corporis in vertice A. Et ſit *g* ad G ut velocitas corporis, quod, circum centrum S, ad diſtantiam SP, in circulo circumagatur, ad velocitatem corporis circum S ad diſtantiam SA in circulo circumacti; viribus utique eiſdem corpora in Ellipſi & in Circulis retinentibus. Ita erit *f* ad *g* ut velocitas in Ellipſi, in loco P, ad velocitatem corporis circum centrum S, ad diſtantiam SP, in Circulo circumacti. Jam *f* minor erit, quàm ut habeat ad F rationem rectæ SA ad SP ſubduplicatam, (Cor. 6) Sed *g* ad G proportio-

 nem

æqualis eſt velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam diſtantiam, in Ellipſi minor eſt, in Hyperbolâ major (bb).

Corol. 8. Velocitas gyrantis in ſectione quâvis conicâ eſt ad velocitatem gyrantis in Circulo, in diſtantiâ dimidii lateris recti principalis ſectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem ſectionis demiſſum. Patet per corollarium quintum (cc).

Corol. 9. Unde cùm (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyran-



tis in hoc circulo ſit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum; fiet, ex æquo, velocitas gyrantis in conicâ ſectione ad velocitatem gyrantis in circulo

nem illam ſubduplicatam habet. (Prop. IV. Cor. 6.) Quare *f* minor erit, quàm ut habeat ad F proportionem eam quam *g* ad G. Permutando *f* minor erit, quàm ut habeat ad *g* proportionem eam quam F ad G. Sed oſtenſa eſt F minor, quàm quæ ad G proportionem haberet binarii ad unitatem ſubduplicatam. Quare *f* multo minor erit, quàm ut habeat ad *g* proportionem binarii ad unitatem ſubduplicatam. Q. E. D.

Simili argumentatione, ſi ponatur APB Hyperbola, ex eo quòd L major erit quàm 4SA, oſtendatur F major quàm quæ ad G, & multo magis *f* major quàm quæ ad *g*, proportionem habeat binarii ad unitatem ſubduplicatam. Q. E. D.

(bb) "Nam velocitas in circulo, cujus radius $\frac{1}{2}$SP, eſt ad velocitatem in circulo, cujus radius "SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1 (Cor. 6. Prop. IV) Et velocitas etiam in Parabolâ, ad diſtantiam SP, eſt ad velocitatem in Circulo, cujus radius SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1. Velocitas igitur in Parabolâ ad diſtantiam "SP æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$SP (El. V. 9.)" [*Le Seur & Jacquier ad Locum.*]

Similiter velocitas in Ellipſi, ad diſtantiam quamvis SP, cùm minor illa ſit quàm quæ habeat ad velocitatem in Circulo, ad eandem diſtantiam SP, rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1, velocitate in Circulo ad diſtantiam $\frac{1}{2}$SP, minor erit. (El. V. 10) Verùm in Hyperbolâ velocitas, ad diſtantiam quamvis SP, cùm ſit major quàm quæ habeat ad velocitatem in Circulo, ad eandem diſtantiam SP, rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1, velocitate in Circulo ad diſtantiam $\frac{1}{2}$SP, illa quidem major erit. (El. V. 10.) Q. E. D.)

(cc) Nam cùm dupla diſtantia ſit latus rectum Circuli, circulus utique & orbis ille alter conicus latera recta æqualia habebunt.

(dd) Velocitas in ſectione conicâ APB, in loco P, eſt ad velocitatem in circulo, ad diſtantiam $\frac{1}{2}$L, ut $\frac{1}{2}$L ad SY (Cor. 8.) Et velocitas in circulo, ad diſtantiam $\frac{1}{2}$L, eſt ad velocitatem in circulo ad diſtantiam SP, ut SP ad $\sqrt{SP \times \frac{1}{2}L}$. (Prop. IV. Cor. 6.) Quare, ex æquo, velocitas in orbe conico APB, in loco P, erit ad velocitatem in circulo ad diſtantiam SP, ut $\overline{SP \times \frac{1}{2}L}$ ad $SY \times \sqrt{SP \times \frac{1}{2}L}$, ſive ut

culo in eâdem diſtantiâ, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum ([dd]). LIBER PRIMUS.

PROP. XVII. PROB. IX.

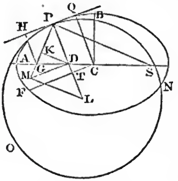
Poſito quòd vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, & quòd vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur linea, quam corpus deſcribit de loco dato cum datâ velocitate ſecundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea ſit, quâ corpus p in orbitâ quâvis datâ, pq, gyretur, & cognoſcatur hujus velocitas in loco p. De loco P ſecundum lineam PR exeat corpus P cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in coni ſectionem PQ. Hanc igitur recta PR tanget in P. Tangat itidem recta aliqua pr orbitam pq in p; & ſi ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale coni ſectionis ad latus rectum prin-

ut $\sqrt{\frac{1}{2} L \times SP}$ ad SY. Q. E. D.

Cor. II. "In Ellipſi vel Hyperbolâ, velocitas, ad quamvis ab umbilico diſtantiam, ad velocitatem in Circulo, ad eandem à centro diſtantiam, rationem habebit diſtantiæ ab umbilico altero ad dimidium axis tranſverſi ſubduplicatam."

Sit G umbilicus quem vires centripetæ reſpiciant. Dico velocitatem in Ellipſi vel Hyperbolâ, in loco P, ad velocitatem corporis, circum centrum G in circulo ad diſtantiam GP circumacti, rationem habere rectæ SP ad CA ſubduplicatam. Nempe cùm illa PK ſemiſſis ſit lateris recti orbis conici APB (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) velocitas in orbe illo, in loco P, erit ad velocitatem in circulo cujus radius GP, ut $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH. (Cor. 9.) Verùm rectangulum $GP \times PK$ eſt ad quadratum ex GP ut PK ad GP; hoc eſt, ut rectangulum $SP \times PK$ ad rectangulum $SP \times GP$. Quadratum autem ex GP eſt ad quadratum ex GH ut quadratum ex CF ad quadratum ex CB. (Hamilton. Conic. Lib. II. 31.) hoc eſt ut rectangulum $SP \times GP$ ad rectangulum $CA \times PK$. (Nam quadratum ex CF æquale eſt rectangulo $SP \times GP$; Hamilton. Conic. Lib. II. 19; & quadratum ex CB æquale eſt rectangulo $CA \times PK$.) Quare cùm ſit $GP \times PK : GP^2 = SP \times PK : SP \times GP$, & $GP^2 : GH^2 = SP \times GP : CA \times PK$; erit ex æquo $GP \times PK : GH^2 = SP : CA$. Quapropter $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH rationem habebit rectæ SP ad CA ſubduplicatam. Sed $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH rationem habet, quam velocitas in orbe conico APB, in loco P, ad velocitatem in circulo cujus radius GP, ſicut ſuprà oſtenſum eſt. Velocitas igitur illa ad hanc velocitatem rationem habet rectæ SP ad CA ſubduplicatam. Q. E. D. Propoſitio hæc elegantiſſima à patribus doctiſſimis Sœurio & Jacquiero eſt profecta, qui tamen longè aliâ ratione eam demonſtraverunt.



 cipale

De Motu Corporum

cipale orbitæ in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo datur. Sit L coni ſectionis latus rectum. Datur præterea ejuſdem coni ſectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH; & dabitur poſitione linea PH, in quâ umbilicus alter H locatur (ee). Demiſſo ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur ſemiaxis conjugatus BC, & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq$ (ff) $= 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP+PH}$: *quad.* $- L \times \overline{SP+PH} = SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP+PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP+PH}$, & fiet $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, ſeu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quàm poſitione (gg). Nimirum ſi ea ſit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quàm $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum lineâ PS; ideoque figura erit Ellipſis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur. Sin tanta ſit corporis velocitas, ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit Parabola axem habens SA parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quòd ſi corpus majori adhuc cum velocitate de loco ſuo P exeat, capienda

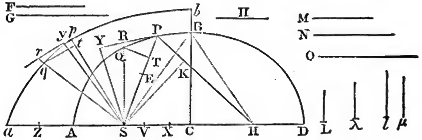
(ee) Hamilton. Conic. Lib. II. 15, 16, & 17.
(ff) El. II. 13.

(gg) Datis enim punctis S, P, recta SP magnitudine & poſitione data eſt. Præterea recta SK, à dato puncto S in rectam PH, poſitione datam, ad perpendiculum deducta, poſitione ipſa dabitur. (Dat. 30.) Punctum igitur K datum (Dat. 25.) Recta igitur PK magnitudine & poſitione data (Dat. 26.) Duæ igitur SP, PK ſimul ſumptæ magnitudine datæ (Dat. 3.) & 2SP, 2PK ſimul ſumptæ magnitudine datæ (Dat. 2.) Sed L magnitudine data. Ratio igitur rectæ L ad $2SP \times 2PK$ data (Dat. 1.) Quare ratio rectæ PH ad $SP \times PH$ data; &, dividendo, ratio PH ad SP data. Sed SP magnitudine data. Quare & PH (Dat. 2.) Et oſtenſa eſt jam antè PH poſitione data. Magnitudine igitur & poſitione.

A L I T E R.

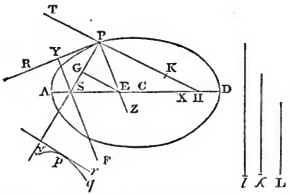
(hh) Factum puta quod propoſitum erat. Sit APD orbis ille conicus, quem corpus, velocitate datâ è loco P ſecundum rectam PR decedens, urgentibus viribus centripetis quæ umbilicum S reſpiciant, deſcribere cogetur. Sectionis conicæ APD axis ſit ASD. A puncto P, ad angulos cum contingente PR rectos, eductam puta PE, quæ axi AS in E occurrat. A puncto E in junctam SP ad perpendiculum demittatur EG. Sectionis conicæ APD, ſit latum rectum L, quod magnitudine quidem dari, eodem nos quo Newtonus modo oſtendamus. Hujus autem dimidio recta PG æqualis eſt. (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) Recta igitur PG magnitudine data eſt. Sed et poſitione (Dat. 26.) propter puncta P, S data. Punctum igitur G datum (Dat. 27.) Recta igitur GE, à dato puncto G cum rectâ PG, poſitione datâ, ad perpendiculum educta, poſitione & ipſa dabitur (Dat. 29.) Sed & recta PE, à dato puncto P cum rectâ PR, poſitione datâ, ad perpendiculum educta, poſitione & ipſa dabitur (Dat. 29.) Punctum igitur E datum (Dat. 25.) Datum autem S. Recta igitur SE, quæ axis eſt ſectionis conicæ APD, poſitione dabitur (Dat. 26.) Si igitur Parabola

pienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque



tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. Nam ſi corpus in his caſibus revolvatur in conicâ ſectione ſic inventâ, demonſtratum eſt in Prop. XI, XII, & XIII, quòd vis centripeta erit ut quadratum diſtantiæ corporis à centro virium S reciprocè; ideoque linea PQ rectè exhibetur, quam corpus tali vi deſcribet, de loco dato P, cum datâ velocitate, ſecundum rectam poſitione datam PR egrediens. Q. E. F (hh).

Corol.



Parabola ſit ſectio illa, cùm umbilicum S datum habeat, & axem SA poſitione datum, latuſque rectum L magnitudine, poſitione quidem ipſa dabitur. Si verò Ellipſis ſit, aut Hyperbola, ſectio illa conica APD, ſit H umbilicus ejus alter, & jungatur PH. Jam angulus RPH, ſi ſectio ſit Hyperbola, ſi verò illa ſit Ellipſis, angulus TPR, qui cùm illo RPH duos rectos complet, angulo RPS æqualis erit. (Hamilton. Conic. Lib. II. 16 & 17.) Angulus autem RPS, qui à rectis PS, PR poſitione datis comprehenſus eſt, magnitudine datus eſt. Angulus igitur RPH datus. Recta igitur PH quæ à dato puncto P, datâ ad rectam PR, poſitione datam, inclinatione eſt educta, poſitione & ipſa dabitur (Dat. 29.) Sed oſtenſa eſt SA poſitione data. Punctum igitur H datum (Dat. 25.) Recta igitur PH magnitudine & poſitione data (Dat. 26.) Sed SP data, id enim ſuprà oſtenſum eſt. Duarum igitur SP, PH ſumma vel differentia dabitur. Harum autem ſummæ quidem, ſi ſectio conica APD ſit Ellipſis, differentiæ verò, ſi illa ſit Hyperbola, axis tranſverſus AD eſt æqualis (Hamilton. Conic. Lib. II. 14.) Axis igitur tranſverſus magnitudine datus. Quare ſectio conica APD, cùm umbilicos S, H, datos habeat, axemque tranſverſum AD magnitudine datum, poſitione ipſa quidem dabitur. Q. E. D.

Componemus igitur Problema hoc modo.

Sit l latus rectum orbitæ pq. Ab umbilico S in rectas pr, PR deducantur ad perpendiculum sy, SY. Et à puncto P, ad perpendiculum cum rectâ PR erigatur PZ. Capiatur SP, ad quam SY rationem habeat eam, quam velocitas in loco p ad velocitatem in P. Capiatur etiam λ ad quam

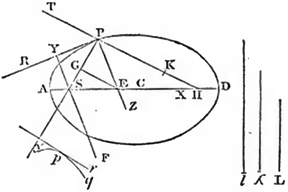
Corol. 1. Hinc in omni coni ſectione ex dato vertice principali, D, latere recto, L, & umbilico, S, datur umbilicus alter H; capiendo DH ad DS ut eſt latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4DS. Nam proportio SP+PH ad PH ut 2SP+2KP ad L, in caſu hujus corollarii, fit DS+DH ad DH ut 4DS ad L, & diviſim DS ad DH ut 4DS−L ad L.

Corol. 2. Unde ſi datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur orbita expeditè, capiendo ſcilicet latus rectum ejus ad duplam diſtantiam DS, in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad diſtantiam DS gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4DS.

Corol. 3. Hinc etiam ſi corpus moveatur in ſectione quâcunque conicâ, & ex orbe ſuo, impulſu quocunque, exturbetur; cognoſci poteſt orbis, in quo poſtea curſum ſuum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulſus ſolus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulſûs loco, ſecundum rectam poſitione datam, exibit.

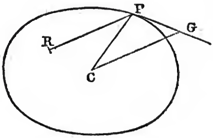
Corol. 4. Et ſi corpus illud, vi aliquâ extrinſecus impreſſâ, continuò

l rationem habeat quam *Sy* ad SP; denique capiatur L quæ cum duabus *l*, λ proportione ſit tertia. Jungatur SP, & abſcindatur PG ſemiſſi rectæ L æqualis. A puncto G, ad perpendiculum cum rectâ PG, educatur GE, quæ cum PZ in puncto E conveniat. Jungatur SE. Et angulo EPS conſtituatur angulus EPK æqualis. Productâ KP ultra P ad T, angulus PSE angulo TPS vel æqualis erit vel non. Si ſit æqualis, recta PK parallela erit cum rectâ SE. Quod ſi acciderit Parabola ſcribatur, cujus umbilicus ſit S, axis tranſverſus SE, latus rectum L, & hæc erit orbita quam definire ſuſcepimus. Nam ſi orbita illa Ellipſis aut Hyperbola eſſet, umbilicum ſuum alterum ea haberet in rectâ PK poſitum, quæ propterea axem SE alicubi conveniret; quod angulorum TPS, GSE inter ipſos æqualitas fieri omnino vetat. Sin verò anguli illi inæquales ſint, rectæ PK, SE inter ſe non erunt parallelæ. Convenient igitur. Conveniant in H. Angulus GSE, dato TPS, cum illi æqualis non ſit, vel minor vel major erit. Si minor fuerit angulus GSE, rectæ PK, SE ab iis partibus rectæ SP convenient, ad quas ſitus eſt angulus PSE; & punctum E punctis S, H intermedium erit. Si verò angulus GSE angulo TPS major fuerit, rectæ SE, PK à partibus rectæ SP earum, ad quas ſitus eſt angulus PSE, contrariis convenient; & punctum E illis, H, S, minimè intermedium erit. Primum quidem ſi acciderit, Ellipſis cujus umbilici ſint S, H, axis autem tranſverſus duarum SP, PH ſummæ ſit æqualis, ſin verò poſterius, Hyperbola, cujus umbilici



tinuò perturbetur, innoteſcet curſus quàm proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibuſdam inducit, &, ex ſeriei analogiâ, mutationes continuas in locis intermediis æſtimando.

Scholium.



Si corpus P vi centripetâ, ad punctum quodcunque datum R tendente, moveatur in perimetro datæ cujuſcunque ſectionis conicæ, cujus centrum ſit C; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & orbis tangenti PG occurrens in G; & vis illa (per Corol. 1. & Schol. Prop. X. & Corol. 3. Prop. VII.) erit ut $\frac{CG \text{ cub.}}{RP \text{ quad.}}$.

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

umbilici ſint S, H, axis autem tranſverſus differentiæ duarum SP, PH æquetur, orbita erit quam definire ſuſcepimus. Nam Parabola eſſe omnino illa nequit; nam ſi Parabola eſſet, recta PH cum axe SE parallela eſſet. (Hamilton. Conic. Lib. II. 5.) Neque verò, ſi primum acciderit, Hyperbola; nam in hyperbolâ punctum E (concurſus utique radii curvaturæ, qui dicitur, cum axe tranſverſo) umbilicis intermedius eſſe nequit; neque denique, ſi poſtremum acciderit, Ellipſis erit orbita illa; nam in ellipſi concurſus ille radii curvaturæ cum axe tranſverſo non eſſe nequit umbilicis intermedius. Orbita igitur, quam definire nos oportet, ſi primum acciderit, Ellipſis; ſi poſterius, Hyperbola erit, umbilicis & axibus tranſverſis quos diximus. Quod ſi neutrum acciderit, anguli autem PSE, TPS æquales ſint, orbita Parabola erit quam ſuprà deficivimus. Q. E. I.

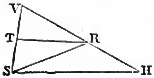
E noſtrâ verò Problematis reſolutione, æquè atque ex illâ Newtoni, patet, majorem minoremve corporis, in dato loco P, velocitatem illud eſſe, quod orbitæ cuique ſpeciem propriam inducit. Auctâ enim in loco P velocitate, cæteris manentibus, augebitur L. Auctâque L augebitur ſemiſſis ejus PG. Et quo major fuerit PG, eo, propter datam quidem SP, minor erit SG. Et in triangulo PGE ſpecie dato, quâ ratione aucta fuerit PG, eâdem augebitur GE. Auctâ igitur velocitate (cæteris manentibus) augebitur GE, atque SG imminuetur. Et utroque nomine ratio rectæ SG ad GE, ſive radii ad tangentem anguli acuti GSE, minor fiet. Imminutâ autem ratione illâ, angulus ipſe major fiet. Major itaque corporis in loco P velocitas majorem angulum GSE effecerit; creſcente autem angulo GSE, orbita à formâ ellipticâ in parabolicam, & à parabolicâ in hyperbolicam, ſenſim migrabit. Omnis igitur formæ ratio poſita eſt in modo velocitatis.

Præterea è noſtrâ reſolutione corollaria Newtoniana facilè deducenda ſunt. Capiatur enim $DX = \frac{1}{2} L$. Jam cùm recta PE angulum SPH medium dividat, idcirco erit SP ad PH ut SE ad EH: punctoque P per flexum orbitæ utcunque tranſlato, hæc ſimilitudo proportionum manebit. Igitur & ultimò manebit, ſi P in verticem D transferatur. Ultimò verò puncto P in D incidente, puncta G, E ſimul in illud X incident. Unde efficietur $DS : DH = SX : XH$. Quare $DS : DH = DS + SX : DX$. Sed $DS + SX = 2DS - DX$, et $DX = \frac{1}{2} L$. Quare $DS : DH = 2DS - \frac{1}{2} L : \frac{1}{2} L = 4DS - L : L$. Hoc eſt $DS : DH = 4DS - L : L$. Q. E. D.

LEMMA

LEMMA XV.

Si ab ellipſeos vel hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium,* V, *inflectantur rectæ duæ,* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis ſit axi principali figuræ, id eſt, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *à perpendiculo* TR *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *ſectionem conicam alicubi tanget: & contrà, ſi tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*

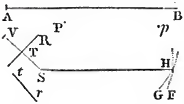


Secet enim perpendiculum TR rectam HV productam, ſi opus fuerit, in R; & jungatur SR. Ob æquales TS, TV, æquales erunt & rectæ SR, VR, & anguli TRS, TRV. Unde punctum R erit ad ſectionem conicam, & perpendiculum TR tanget eandem: & contrà. Q. E. D.

PROP. XVIII. PROB. X.

Datis umbilico & axibus principalibus, deſcribere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis trajectoriæ cujuſvis; P punctum per quod trajectoria debet tranſire; & TR, recta quam debet tangere. Centro P, intervallo AB−SP, ſi orbita ſit Ellipſis, vel AB+SP, ſi ea ſit Hyperbola, deſcribatur circulus HG. Ad tangentem TR demittatur perpendiculum ST, & producatur idem ad V, ut ſit TV æqualis ST; centroque V, & intervallo AB, deſcribatur circulus FH. Hâc methodo, ſive dentur duo puncta P, *p*, ſive duæ tangentes TR, *tr*, ſive punctum P & tangens TR, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit H eorum interſectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria deſcripta (eo quòd PH+SP in Ellipſi, & PH−SP in Hyperbolâ æquatur axi) tranſibit per punctum P, & (per lemma ſuperius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo P, *p*, vel tanget rectas duas TR, *tr*. Q. E. F.

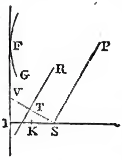


PROP.

PROP. XIX. PROB. XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

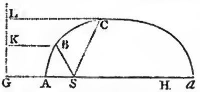
Sit s umbilicus, p punctum, & tr tangens trajectoriæ deſcribendæ. Centro p, intervallo ps, deſcribe circulum fg. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem st, & produc eam ad v, ut ſit tv æqualis st. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus *fg*, ſi datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, ſi datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta if, quæ tangat duos circulos fg, *fg*, ſi dantur duo puncta p, *p*; vel tranſeat per duo puncta v, *v*, ſi dantur duæ tangentes tr, *tr*; vel tangat circulum fg, & tranſeat per punctum v, ſi datur punctum p & tangens tr. Ad fi demitte perpendicularem si, eamque biſeca in k; & axe sk, vertice principali k deſcribatur Parabola. Dico factum. Nam parabola, ob æquales sk & ik, sp & fp, tranſibit per punctum p; & (per Lem. xiv. Corol. 3.) ob æquales st & tv, & angulum rectum str, tanget rectam tr. Q. E. F.



PROP. XX. PROB. XII.

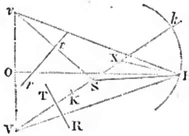
Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit, & rectas tanget poſitione datas.

Caſ. 1. Dato umbilico s, deſcribenda ſit trajectoria abc per puncta duo b, c. Quoniam trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In eâ ratione cape kb ad bs, & lc ad cs. Centris b, c, intervallis bk, cl, deſcribe circulos duos; & ad rectam kl, quæ tangat eoſdem in k & l, demitte perpendiculum sg, idem-



que ſeca in A & *a*, ita ut ſit GA ad AS, & G*a* ad *a*S, ut eſt KB ad BS; & axe A*a*, verticibus A, *a*, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ deſcriptæ, & cùm ſit GA ad AS ut G*a* ad *a*S, erit diviſim G*a*–GA, ſeu A*a*, ad *a*S–AS, ſeu SH in eâdem ratione; ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribendâ. Cúmque ſint KB ad BS & LC ad CS in eâdem ratione, tranſibit hæc figura per puncta B, C, ut ex conicis manifeſtum eſt.

Caſ. 2. Dato umbilico S, deſcribenda ſit trajectoria, quæ rectas duas TR, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula ST, S*t*, & produc eadem ad V, *v*, ut ſint TV, *tv* æquales TS, *t*S. Biſeca V*v* in O, & erige perpendiculum infinitum OH, rectamque VS infinitè productam ſeca in K & *k*, ita ut ſit VK ad KS, & V*k* ad *k*S, ut eſt trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad umbilicorum diſtantiam.

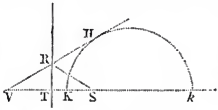


Super diametro K*k* deſcribatur circulus ſecans OH in H; & umbilicis S, H, axe principali ipſam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam biſeca K*k* in X, & junge HX, HS, HV, H*v*. Quoniam eſt VK ad KS ut V*k* ad *k*S; & compoſitè ut VK+V*k* ad KS+*k*S; diviſimque ut V*k*–VK ad *k*S–KS, id eſt, ut 2VX ad 2KX & 2KX ad 2SX, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX, ſimilia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, ideoque ut VK ad KS. Habet igitur trajectoriæ deſcriptæ axis principalis, VH, eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam, SH, quam habet trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cùm VH, *v*H æquentur axi principali, & VS, *v*S à rectis TR, *tr* perpendiculariter biſecentur, liquet (ex Lem. XV.) rectas illas trajectoriam deſcriptam tangere. Q. E. F.

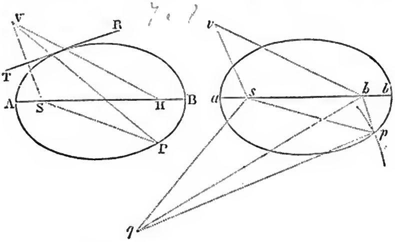
Caſ. 3. Dato umbilico S, deſcribenda ſit trajectoria, quæ rectam TR tanget in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Junge VR, & rectam VS infinitè productam ſeca in K & *k*, ita ut ſit VK ad

SK,

SK, & V*k* ad S*k*, ut Ellipſeos deſcribendæ axis principalis ad diſtantiam umbilicorum; circuloque ſuper diametro K*k* deſcripto, ſecetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Namque VH eſſe ad SH ut VK ad SK, atque ideo ut axis principalis trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, patet ex demonſtratis in caſu ſecundo, & propterea trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribendâ, rectam verò TR, quâ angulus VRS biſecatur, tangere trajectoriam in puncto R, patet ex conicis. Q. E. F.



Caſ. 4. Circa umbilicum S deſcribenda jam ſit trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, tranſeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque ſimilis ſit figuræ *apb*, axe principali *ab* & umbilicis *s*, *h* deſcriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Angulis autem VSP, SVP fac angulos *hsq*, *shq* æquales; centroque *q*, & intervallo, quod ſit ad *ab* ut SP ad VS, deſcribe circulum ſecantem figuram *apb* in *p*. Junge *sp*, & age SH quæ ſit ad *sh* ut eſt SP ad



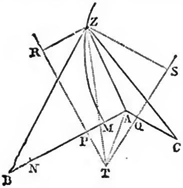
sp, quæque angulum PSH angulo *psh*, & angulum VSH angulo *psq* æquales conſtituat. Denique umbilicis S, H, & axe principali AB diſtantiam VH æquante, deſcribatur ſectio conica. Dico factum.

Nam ſi agatur *sv*, quæ ſit ad *sp* ut eſt *sb* ad *sq*, quæque conſtituat angulum *vsp* angulo *bsq* & angulum *vsb* angulo *psq* æquales, triangula *svb*, *spq* erunt ſimilia; & propterea *vb* erit ad *pq* ut eſt *sb* ad *sq*, id eſt (ob ſimilia triangula VSP, *bsq*) ut eſt VS ad SP ſeu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vb* & *ab*. Porro ob ſimilia triangula VSH, *vsb*, eſt VH ad SH ut *vb* ad *sb*; id eſt, axis conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sb*; & propterea figura jam deſcripta ſimilis eſt figuræ *apb*. Tranſit autem hæc figura per punctum P, eo quòd triangulum PSH ſimile ſit triangulo *psb*; & quia VH æquatur ipſius axi, & VS biſecatur perpendiculariter à rectâ TR, tangit eadem rectam TR. Q. E. F.

LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas, quarum differentiæ vel dantur vel nullæ ſunt.

Caſ. 1. Sunto puncta illa data A, B, C, & punctum quartum Z, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum AZ, BZ, locabitur punctum Z in Hyperbolâ cujus umbilici ſunt A & B, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille MN. Cape PM ad MA ut eſt MN ad AB, & erectâ PR perpendiculari ad AB, demiſſâque ZR perpendiculari ad PR; erit, ex naturâ hujus hyperbolæ, ZR ad AZ ut eſt MN ad AB. Simili diſcurſu punctum Z locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici ſunt A, C, & principalis axis differentia inter AZ & CZ; ducique poteſt QS ipſi AC perpendicularis, ad quam ſi ab hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS, hæc fuerit ad AZ ut eſt differentia inter AZ & CZ ad AC. Dantur ergo rationes ipſarum ZR & ZS ad AZ, & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque ſi rectæ RP, SQ concurrant in T, & agantur TZ & TA, figura TRZS dabitur ſpecie; & recta TZ, in quâ punctum Z alicubi locatur,



locatur, dabitur poſitione. Dabitur etiam recta TA, ut & angulus ATZ; &, ob datas rationes ipſarum AZ ac TZ ad ZS, dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum ATZ, cujus vertex eſt punctum Z. Q. E. I. LIBER PRIMUS.

Caſ. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ, æquantur, ita age rectam TZ, ut biſecet rectam AB; dein quære triangulum ATZ, ut ſuprà.

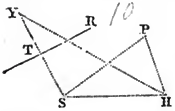
Caſ. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta A, B, C tranſeuntis. Q. E. I.

Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum Tactionum *Apollonii* à *Vietâ* reſtitutum.

PROP. XXI. PROB. XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

Detur umbilicus S, punctum P, & tangens TR, & inveniendus ſit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum ST, & produc idem ad Y, ut ſit TY æqualis ST, & erit YH æqualis axi principali. Junge SP, HP, & erit SP differentia inter HP & axem principalem. Hoc modo ſi dentur plures tangentes TR, vel plura puncta P, devenietur ſemper ad lineas totidem YH, vel PH, à



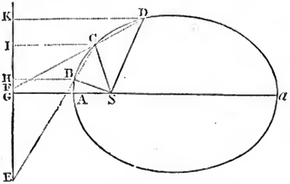
dictis punctis Y, vel P, ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iiſdem, atque ideo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis unà cum axis longitudine (quæ vel eſt YH; vel, ſi trajectoria Ellipſis eſt, PH+SP; ſin Hyperbola, PH−SP) habetur trajectoria. Q. E. I.

Scholium.

Ubi trajectoria eſt Hyperbola, ſub nomine hujus trajectoriæ oppoſitam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu ſuo in oppoſitam hyperbolam tranſire non poteſt.

Caſus

Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditiùs. Dentur puncta B, C, D. Junctas BC, CD produc ad E, F, ut ſit EB ad EC ut SB ad SC, & FC ad FD ut SC ad SD. Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH, inque GS infinitè productâ cape GA ad AS, & G*a* ad *a*S, ut eſt HB ad BS; & erit A vertex, & A*a* axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis, vel minor fuerit quàm AS, erit Ellipſis, Parabola vel Hyperbola; puncto *a* in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF. Nam ſi demittantur ad GF perpendicula CI, DK; erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc eſt, ut SC ad SB; & viciſſim IC ad SC ut HB ad SB, ſive ut GA ad SA. Et ſimili argumento probabitur eſſe KD ad SD in eâdem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in coni ſectione circa umbilicum S ita deſcriptâ, ut rectæ omnes, ab umbilico S ad ſingula ſectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula à punctis iiſdem ad rectam GF demiſſa in datâ illâ ratione.



Methodo haud multum diſſimili hujus Problematis ſolutionem tradit clariſſimus Geometra *De la Hire*, Conicorum ſuorum Lib. 8. Prop. XXV.

SECTIO V.

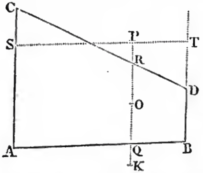
Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

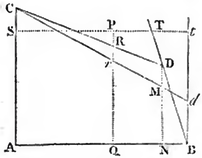
Si à datæ conicæ ſectionis puncto quovis, P, *ad trapezii alicujus,* ABCD, *in conicâ illâ ſectione inſcripti, latera quatuor infinitè producta,* AB, CD, AC, DB, *totidem rectæ,* PQ, PR, PS, PT, *in datis angulis ducantur, ſingulæ ad ſingula: rectangulum ductarum ad oppo-ſita*

ſita duo latera, PQ×PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera oppoſita,* PS×PT, *in datâ ratione.* LIBER PRIMUS.

Caſ. 1. Ponamus primò lineas ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, puta PQ & PR lateri AC, & PS ac PT lateri AB. Sintque inſuper latera duo ex oppoſitis, puta AC & BD, ſibi invicem parallela. Et recta, quæ biſecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ ſectionis, & biſecabit etiam RQ. Sit O punctum in quo RQ biſecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc PO ad K, ut ſit OK æqualis PO, & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cùm igitur puncta A, B, P & K ſint ad conicam ſectionem, & PK ſecet AB in dato angulo, erit (per Prop. XVII, XIX, XXI & XXIII. Lib. 3. Conicorum *Apollonii*) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in datâ ratione. Sed QK & PR æquales ſunt; utpote æqualium OK, OP, & OQ, OR differentiæ; & inde etiam rectangula PQK & PQ×PR æqualia ſunt; atque ideo rectangulum PQ×PR eſt ad rectangulum AQB, hoc eſt ad rectangulum PS×PT, in datâ ratione. Q. E. D.

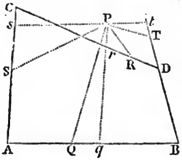


Caſ. 2. Ponamus jam trapezii latera oppoſita AC & BD non eſſe parallela. Age B*d* parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in *t*, tum conicæ ſectioni in *d*. Junge C*d* ſecantem PQ in *r*, & ipſi PQ parallelam age DM ſecantem C*d* in M, & AB in N. Jam ob ſimilia triangula BT*t*, DBN; eſt B*t*, ſeu PQ, ad T*t* ut DN ad NB. Sic & R*r* eſt ad AQ, ſeu PS, ut DM ad AN. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes, & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum PQ in R*r* eſt ad rectangulum PS in T*t*, ita rectangulum NDM eſt ad rectangulum ANB, & (per Caſ. 1.) ita rectangulum PQ in P*r* eſt ad rectangulum PS in P*t*,



ac diviſim ita rectangulum PQ×PR eſt ad rectangulum PS×PT. Q. E. D.

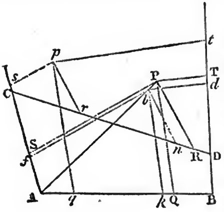
Caſ. 3. Ponamus denique lineas quatuor PQ, PR, PS, PT, non eſſe parallelas lateribus AC, AB, ſed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age P*q*, P*r* parallelas ipſi AC; & P*s*, P*t* parallelas ipſi AB; & propter datos angulos triangulorum PQ*q*, PR*r*, PS*s*, PT*t*, dabuntur rationes PQ ad P*q*, PR ad P*r*, PS ad P*s*, & PT ad P*t*; atque ideo rationes compoſitæ, PQ×PR ad P*q*×P*r*, & PS×PT ad P*s*×P*t*. Sed, per ſuperiùs demonſtrata, ratio P*q*×P*r* ad P*s*×P*t* data eſt: ergo & ratio PQ×PR ad PS×PT. Q. E. D.



LEMMA XVIII.

Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera trapezii, PQ×PR, *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera,* PS×PT, *in datâ ratione; punctum* P, *à quo lineæ ducuntur, tanget conicam ſectionem circa trapezium deſcriptam.*

Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P, puta *p*, concipe conicam ſectionem deſcribi: dico punctum P hanc ſemper tangere. Si negas, junge AP ſecantem hanc conicam ſectionem alibi quàm in P, ſi fieri poteſt, puta in *b*. Ergo ſi ab his punctis, *p* & *b*, ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt*, & *bk*, *bn*, *bf*, *bd*; erit ut *bk*×*bn* ad *bf*×*bd* ita (per Lem. XVII.) *pq*×*pr* ad *ps*×*pt*, & ita (per hypoth.) PQ×PR ad PS×PT. Eſt & propter ſimilitudinem trapeziorum *bk*A*f*, PQAS, ut *bk* ad *bf* ita PQ ad PS. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correſpondentes hujus, erit *bn* ad *bd* ut PR ad PT. Ergo trapezia æquiangula



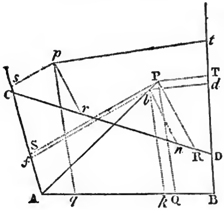
æquiangula D*nbd*, DRPT ſimilia ſunt, & eorum diagonales D*b*, DP propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in interſectionem rectarum AP, DP, ideoque coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunque ſumatur, incidit in aſſignatam conicam ſectionem. Q. E. D. LIBER PRIMUS.

Corol. Hinc ſi rectæ tres, PQ, PR, PS, à puncto communi P ad alias totidem poſitione datas rectas, AB, CD, AC, ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitque rectangulum ſub duabus ductis, PQ × PR, ad quadratum tertiæ PS in datâ ratione: punctum P, à quo rectæ ducuntur, locabitur in ſectione conicâ, quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contrà. Nam coeat linea BD cum lineâ AC, manente poſitione trium AB, CD, AC; dein coeat etiam lineâ PT cum lineâ PS: & rectangulum PS × PT evadet PS *quad.* rectæque AB, CD, quæ curvam in punctis A & B, C & D ſecabant, jam curvam in punctis illis coeuntibus non ampliùs ſecare poſſunt, ſed tantùm tangent.

Scholium.

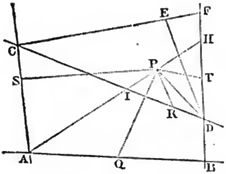
Nomen conicæ ſectionis in hoc Lemmate latè ſumitur, ita ut ſectio tam rectilinea, per verticem coni tranſiens, quam circularis, baſi parallela, includatur. Nam ſi punctum *p* incidit in rectam, quâ puncta A & D, vel C & B, junguntur, conica ſectio vertetur in geminas rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera eſt recta, quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera ejus, vel perpendiculariter, vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitque rectangulum ſub duabus ductis, PQ × PR, æquale rectangulo ſub duabus aliis, PS × PT, ſectio conica evadet circulus. Idem fiet, ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis, & rectangulum ſub duabus ductis, PQ × PR, ſit ad rectangulum ſub aliis duabus, PS × PT, ut rectangulum ſub ſinubus angulorum, S, T, in quibus duæ ultimæ, PS, PT, ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum, Q, R, in quibus duæ primæ, PQ, PR, ducuntur. Cæteris in caſibus locus puncti P erit aliqua trium figurarum, quæ vulgò nominantur ſectiones conicæ. Vice autem trapezii ABCD ſubſtitui poteſt

De Motu Corporum



poteſt quadrilaterum, cujus latera duo oppoſita ſe mutuò, inſtar diagonalium, decuſſant. Sed & è punctis quatuor A, B, C, D poſſunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in caſu ſectio conica tranſibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEMMA XIX.



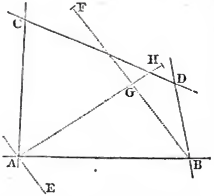
Invenire punctum P, *à quo ſi rectæ quatuor*, PQ, PR, PS, PT, *ad alias totidem poſitione datas rectas*, AB, CD, AC, BD, *ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, rectangulum ſub duabus ductis*, PQ×PR, *ſit ad rectangulum ſub aliis duabus*, PS×PT, *in datâ ratione.*

Lineæ AB, CD, ad quas rectæ duæ PQ, PR unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus poſitione datis lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo, A, age rectam quamlibet, AH, in quâ velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppoſitas BD, CD; nimirum BD in H, & CD in I; & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA, & PA ad PS, ideoque ratio PQ ad PS. Auferendo hanc à datâ ratione PQ×PR ad PS×PT, dabitur ratio PR ad PT; & addendo datas rationes PI ad PR, & PT ad PH, dabitur ratio PI ad PH, atque ideo punctum P. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam ad locum punctorum infinitorum, P, punctum quodvis D tangens duci poteſt. Nam chorda PD, ubi puncta P ac D conveniunt, hoc eſt, ubi AH ducitur per punctum D, tangens evadit. Quo in caſu, ultima ratio evaneſcentium IP & PH invenietur,

inveniet ur, ut ſuprà. Ipſi igitur AD duc parallelam CF, occurrentem BD in F, & in eà ultimâ ratione ſectam in E; & DE tangens erit, propterea quòd CE & evaneſcens IH parallelæ ſunt, & in E & P ſimiliter ſectæ.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium P definiri poteſt. Per quodvis punctorum A, B, C, D, puta A, duc loci tangentem AE, & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occurrentem loco in F. Invenietur autem punctum F per Lem. XIX. Biſeca BF in G, & acta indefinita AG erit poſitio diametri, ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat loco in H, & erit AH diameter ſive latus tranſverſum, ad quod latus rectum erit ut BG*q* ad AG×GH. Si AG nuſquam occurrit loco, lineâ AH exiſtente infinitâ, locus erit Parabola, & latus rectum ejus ad diametrum AG pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus Hyperbola erit, ubi puncta A & H ſita ſunt ad eaſdem partes ipſius G: & Ellipſis, ubi G intermedium eſt; niſi forte angulus AGB rectus ſit, & inſuper BG *quad.* æquale rectangulo AGH, quo in caſu Circulus habebitur.



Atque ita Problematis Veterum de *Quatuor Lineis*, ab Euclide incœpti & ab Apollonio continuati, non calculus, ſed compoſitio geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc corollario exhibetur.

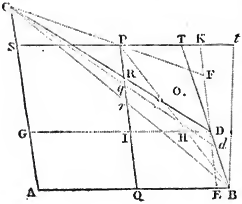
LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis, ASPQ, *angulis duobus oppoſitis,* A & P, *tangit ſectionem quamvis conicam in punctis* A & P; & *lateribus unius angulorum illorum infinitè productis,* AQ, AS, *occurrit eidem ſectioni conicæ in* B & C; *à punctis autem occurſuum,* B & C, *ad quintum quodvis ſectionis conicæ punctum,* D, *agantur rectæ duæ,* BD, CD, *occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus,* PS, PQ, *in* T & R: *erunt ſemper abſciſſæ laterum partes,* PR & PT, *ad invicem in datâ ratione. Et*

 contrà,

contrà, ſi partes illæ abſciſſæ ſunt ad invicem in datâ ratione, punctum D *tanget ſectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *tranſeuntem.*

Caſ. 1. Jungantur BP, CP, & à puncto D agantur rectæ duæ DG, DE, quarum prior DG ipſi AB parallela ſit, & occurrat PB, PQ, CA, in H, I, G; altera DE parallela ſit ipſi AC, & occurrat PC, PS, AB in F, K, E: & erit (per Lem. XVII.) rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH in ratione datâ. Sed eſt PQ ad DE (ſeu IQ) ut PB ad HB, ideoque ut PT ad DH; & viciſſim PQ ad PT ut DE ad DH. Eſt & PR ad DF ut RC ad DC, ideoque ut (IG vel) PS ad DG, & viciſſim PR ad PS ut DF ad DG; &, conjunctis rationibus, fit rectangulum PQ×PR ad rectangulum PS×PT ut rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur PQ & PS, & propterea ratio PR ad PT datur. Q. E. D.



Caſ. 2. Quòd ſi PR et PT ponantur in datâ ratione ad invicem, tum ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH in ratione datâ; ideoque punctum D (per Lem. XVIII.) contingere conicam ſectionem tranſeuntem per puncta A, B, C, P. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi agatur BC ſecans PQ in *r*, & in PT capiatur P*t* in ratione ad P*r* quam habet PT ad PR: erit B*t* tangens conicæ ſectionis ad punctum B. Nam concipe punctum D coire cum puncto B, ita ut, chordâ BD evaneſcente, BT tangens evadat; & CD ac BT coincident cum CB et B*t*.

Corol. 2. Et vice verſâ ſi B*t* ſit tangens, & ad quodvis conicæ ſectionis punctum D conveniant BD, CD; erit PR ad PT ut P*r* ad P*t*. Et contrà, ſi ſit PR ad PT ut P*r* ad P*t*; convenient BD, CD ad conicæ ſectionis punctum aliquod D.

Corol. 3. Conica ſectio non ſecat conicam ſectionem in punctis

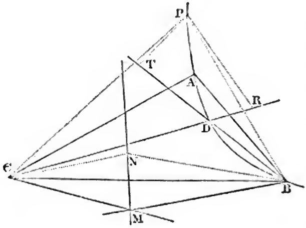
5 pluribus

pluribus quàm quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ conicæ ſectiones per quinque puncta A, B, C, P, O; eaſque ſecet recta BD in punctis D, *d*, & ipſam PQ ſecet recta C*d* in *q*. Ergo PR eſt ad PT ut P*q* ad PT; unde PR & P*q* ſibi invicem æquantur, contra hypotheſin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ, BM, CM, *per data puncta,* B, C, *ceu polos ductæ, concurſu ſuo,* M, *deſcribant tertiam poſitione datam rectam,* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ,* BD, CD, *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos,* MBD, MCD, *efficientes ducantur: dico, quòd hæ duæ,* BD, CD, *concurſu ſuo,* D, *deſcribent ſectionem conicam per puncta* B, C *tranſeuntem. Et vice verſâ, ſi rectæ* BD, CD *concurſu ſuo* D *deſcribant ſectionem conicam per puncta data* B, C, A *tranſeuntem, & ſit angulus* DBM *ſemper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *ſemper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam poſitione datam.*

Nam in rectâ MN detur punctum N, & ubi punctum mobile M incidit in immotum N, incidat punctum mobile D in immotum P. Junge CN, BN, CP, BP, & à puncto P age rectas PT, PR occurrentes ipſis BD, CD in T & R, & facientes angulum BPT æqualem angulo dato BNM, & angulum CPR æqualem angulo dato CNM.

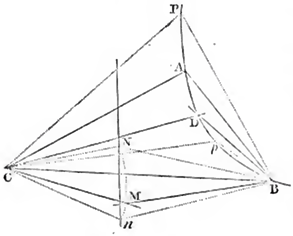


Cùm ergo (ex hypotheſi) æquales ſint anguli MBD, NBP, ut & anguli MCD, NCP; aufer communes NBD & NCD, & reſtabunt æquales NBM & PBT, NCM & PCR: ideoque triangula NBM, PBT ſimilia ſunt, ut & triangula NCM, PCR. Quare PT eſt ad NM ut PB ad NB, & PR ad NM ut PC ad NC. Sunt autem puncta B, C, N, P

De Motu Corporum

N, P immobilia. Ergo PT & PR datam habent rationem ad NM, proindeque datam rationem inter ſe; atque ideo (per Lem. XX.) punctum D, perpetuus rectarum mobilium BT & CR concurſus, contingit ſectionem conicam, per puncta B, C, P tranſeuntem. Q. E. D.

Et contrà, ſi punctum mobile D contingat ſectionem conicam tranſeuntem per data puncta B, C, A, & ſit angulus DBM ſemper



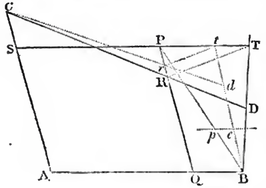
æqualis angulo dato ABC, & angulus DCM ſemper æqualis angulo dato ACB, & ubi punctum D incidit ſucceſſivè in duo quævis ſectionis puncta immobilia p, P, punctum mobile M incidat ſucceſſivè in puncta duo immobilia n, N: per eadem n, N agatur recta nN, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis M. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum M in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum D ſectionem conicam per puncta quinque B, C, A, p, P tranſeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum D ſectionem conicam per eadem quinque puncta B, C, A, p, P, tranſeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ ſectiones conicæ tranſibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lemmat. XX. Igitur punctum M verſari in lineâ curvâ abſurdum eſt. Q. E. D.

PROP. XXII. PROB. XIV.

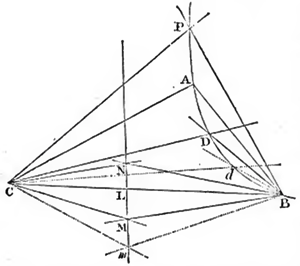
Trajectoriam per data quinque puncta deſcribere.

Dentur puncta quinque, A, B, C, P, D. Ab eorum aliquo, A, ad alia duo quævis, B, C, quæ poli nominentur, age rectas AB, AC; hiſque parallelas TPS, PRQ per punctum quartum P. Deinde à polis duobus B, C age per punctum quintum, D, duas BDT, CRD, noviſſimè ductis, TPS, PRQ, (priorem priori & poſteriorem poſteriori) occurrentes in T & R. Denique de rectis PT, PR, actâ rectâ tr ipſi

ipſi TR parallelâ, abſcinde quaſvis P*t*, P*r* ipſis PT, PR proportionales; & ſi per earum terminos, *t*, *r*, & polos B, C actæ B*t*, C*r* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in trajectoriâ quæſitâ. Nam punctum illud *d* (per Lem. XX.) verſatur in conicâ ſectione per puncta quatuor A, B, C, P tranſeunte; & lineis R*r*, T*t* evaneſcentibus, coit punctum *d* cum puncto D. Tranſit ergo ſectio conica per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. E. D.

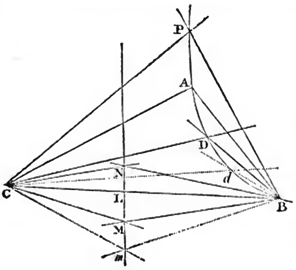


Idem aliter.



E punctis datis junge tria quævis, A, B, C; & circum duo eorum, B, C, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC, ACB, applicentur crura BA, CA primò ad punctum D, deinde ad punctum P, & notentur puncta M, N in quibus altera crura BL, CL caſu utroque ſe decuſſant. Agatur recta infinita MN, & rotentur anguli illi mobiles circum polos ſuos B, C, eâ lege, ut crurum, BL, CL, vel BM, CM, interſectio, quæ jam ſit *m*, incidat ſemper in rectam illam infinitam MN; & crurum BA, CA, vel BD, CD, interſectio, quæ jam ſit *d*, trajectoriam quæſitam PAD*d*B delineabit. Nam punctum *d* (per Lem. XXI.) continget ſectionem conicam per puncta B, C tranſeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta L, M, N, punctum *d* (per conſtructionem) accedet ad puncta A, D, P. Deſcribetur itaque ſectio conica tranſiens per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. E. F.

Corol.



Corol. 1. Hinc recta expeditè duci poteſt, quæ trajectoriam quæſitam in puncto quovis dato B continget. Accedat punctum *d* ad punctum B, & recta B*d* evadet tangens quæſita.

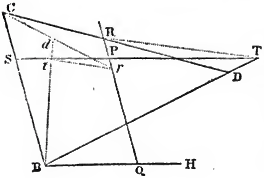
Corol. 2. Unde etiam trajectoriarum centra, diametri, & latera recta inveniri poſſunt, ut in corollario ſecundo Lemmatis XIX.

Scholium.

Conſtructio prior evadet paulo ſimplicior jungendo BP, & in eâ, ſi opus eſt productâ, capiendo B*p* ad BP ut eſt PR ad PT; & per *p* agendo rectam infinitam *pe* ipſi SPT parallelam, & in eâ capiendo ſemper *pe* æqualem P*r*; & agendo rectas B*e*, C*r* concurrentes in *d*. Nam cùm ſint P*r* ad P*t*, PR ad PT, *p*B ad PB, *pe* ad P*t* in eâdem ratione; erunt *pe* & P*r* ſemper æquales. Hâc methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditiſſimè, niſi mavis curvam, ut in conſtructione ſecundâ, deſcribere mechanicè.

PROP. XXIII. PROB. XV.

Trajectoriam deſcribere, quæ per data quatuor puncta tranſibit, & rectam continget poſitione datam.



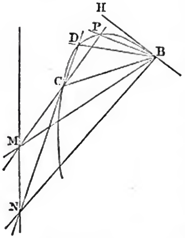
Caſ. 1. Dentur tangens HB, punctum contactûs B, & alia tria puncta C, D, P. Junge BC, & agendo PS parallelam rectæ BH, & PQ parallelam rectæ BC, comple parallelogrammum BSPQ. Age BD ſecantem SP in T, & CD ſecantem

PQ

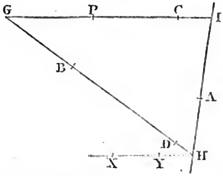
PQ in R. Denique, agendo quamvis *tr* ipſi TR parallelam, de PQ, PS abſcinde P*r*, P*t* ipſis PR, PT proportionales reſpective; & actarum C*r*, B*t* concurſus *d* (per Lem XX.) incidet ſemper in trajectoriam deſcribendam.

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus, CBH, circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus, DC, circa polum C. Notentur puncta, M, N, in quibus anguli crus BC ſecat radium illum, ubi crus alterum, BH, concurrit cum eodem radio in punctis P & D. Deinde & actam infinitam MN concurrant perpetuò radius ille CP, vel CD, & anguli crus BC, & cruris alterius BH concurſus cum radio delineabit trajectoriam quæſitam.



Nam ſi in conſtructionibus Problematis ſuperioris accedat punctum A ad punctum B, lineæ CA & CB coincident, & linea AB in ultimo ſuo ſitu fiet tangens BH; atque ideo conſtructiones ibi poſitæ evadent eædem cum conſtructionibus hîc deſcriptis. Delineabit igitur cruris BH concurſus cum radio ſectionem conicam per puncta C, D, P tranſeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B. Q. E. F.



Caſ. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P, extra tangentem HI ſita. Junge bina lineis BD, CP concurrentibus in G, tangentique occurrentibus in H & I. Secetur tangens in A, ita ut ſit HA ad IA, ut eſt rectangulum ſub mediâ proportionali inter CG & GP & mediâ proportionali inter BH & HD, ad rectangulum ſub mediâ proportionali inter DG & GB & mediâ proportionali inter

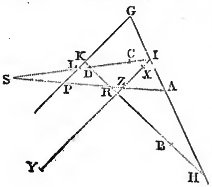
ter PI & IC; & erit A punctum contactûs. Nam ſi rectæ PI parallela HX trajectoriam ſecet in punctis quibuſvis, X & Y: erit (ex conicis) punctum A ita locandum, ut fuerit HA *quad.* ad AI *quad.* in ratione compoſitâ ex ratione rectanguli XHY ad rectangulum BHD, ſeu rectanguli CGP ad rectangulum DGB, & ex ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIC. Invento autem contactûs puncto A, deſcribetur trajectoria ut in caſu primo. Q. E. F.

Capi autem poteſt punctum A vel inter puncta H & I, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter deſcribi.

PROP. XXIV. PROB. XVI.

Trajectoriam deſcribere, quæ tranſibit per data tria puncta, & rectas duas poſitione datas continget.

Dentur tangentes HI, KL, & puncta B, C, D. Per punctorum duo quævis, B, D, age rectam infinitam, BD, tangentibus occurrentem in punctis H, K. Deinde etiam per alia duo quævis, C, D, age infinitam CD tangentibus occurrentem in punctis I, L. Actas ita ſeca in R & S, ut ſit HR ad KR ut eſt media proportionalis inter BH & HD ad mediam proportionalem inter BK & KD; & IS ad LS ut eſt media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL & LD. Seca autem pro lubitu vel inter puncta K & H, I & L, vel extra eadem; dein age RS ſecantem tangentes in A & P, & erunt A & P puncta contactuum. Nam ſi A & P ſupponantur eſſe puncta contactuum alicubi in tangentibus ſita; & per punctorum H, I, K, L quodvis I, in tangente alterutrâ HI ſitum, agatur recta IY tangenti alteri KL parallela, quæ occurrat curvæ in X & Y, & in eâ ſumatur IZ media proportionalis inter IX & IY: erit, ex conicis, rectangulum XIY, ſeu IZ *quad.* ad LP *quad.* ut rectangulum CID ad rectangulum CLD, id eſt (per conſtructionem) ut SI *quad.* ad SL *quad.* atque ideo IZ ad LP ut SI ad SL. Jacent ergo puncta



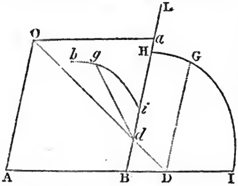
punſta s, P, Z in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in G, erit (ex conicis) rectangulum XIY, ſeu IZ *quad.* ad IA *quad.* ut GP *quad.* ad GA *quad.* ideoque IZ ad IA ut GP ad GA. Jacent ergo puncta P, Z & A in unâ rectâ; ideoque puncta S, P & A ſunt in unâ rectâ. Et eodem argumento probabitur quòd puncta R, P & A ſunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum A & P in rectâ RS. Hiſce autem inventis, trajectoria deſcribetur ut in caſu primo Problematis ſuperioris. Q. E. F.

In hâc Propoſitione, & caſu ſecundo Propoſitionis ſuperioris, conſtructiones eædem ſunt, ſive recta XY trajectoriam ſecet in X & Y, ſive non ſecet; eæque non pendent ab hâc ſectione. Sed demonſtratis conſtructionibus ubi recta illa trajectoriam ſecat, innoteſcunt conſtructiones, ubi non ſecat; iiſque ultrà demonſtrandis, brevitatis gratiâ, non immoror.

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

Tranſmutanda ſit figura quævis HGI. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ, AO, BL, tertiam quamvis poſitione datam, AB, ſecantes in A & B; & à figuræ puncto quovis, G, ad rectam AB ducatur quævis GD, ipſi OA parallela. Deinde à puncto aliquo O, in lineâ OA dato, ad punctum D ducatur recta OD, ipſi BL occurrens in *d*, & à puncto occurſûs erigatur recta *dg* datum quemvis angulum cum rectâ BL continens, atque eam habens rationem ad *od*, quam habet DG ad OD; & erit *g* punctum in figurâ novâ *bgi* puncto G reſpondens. Eâdem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ.

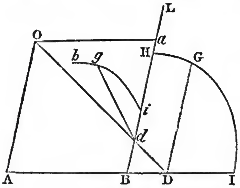


Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratiâ nominemus DG ordinatam primam, *dg* ordinatam

De Motu Corporum

natam novam; AD abſciſſam primam, *ad* abſciſſam novam; O polum, OD radium abſcindentem, OA radium ordinatum primum, & O*a* (quo parallelogrammum OAB*a* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quòd, ſi punctum G tangit rectam lineam poſitione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam poſitione datam. Si punctum G tangit conicam ſectionem, punctum G tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro ſi punctum G tangit lineam tertii ordinis analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis analytici quas puncta G, *g* tangunt. Etenim ut eſt *ad* ad OA ita ſunt O*d* ad OD, *dg* ad DG, & AB ad AD; ideoque AD æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum G tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abſciſſam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantùm dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hâc æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producetur æquatio nova; in quâ abſciſſa nova, *ad*, & ordinata nova, *dg*, ad unicam tantùm dimenſionem aſcendent, atque ideo quæ deſignat lineam rectam. Sin AD & DG, vel earum alterutra, aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione primâ, aſcendent itidem *ad* & *dg* ad duas in æquatione ſecundâ. Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ, *ad*, *dg*, in æquatione ſecundâ, & AD, DG in prima, aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, *g* tangunt, ſunt ejuſdem ordinis analytici.



Dico præterea, quòd ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta, eodem modo cum curvâ in figuram novam tranſlata, tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contrà. Nam ſi curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt

coeunt in figurâ primâ, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi poſſent harum aſſertionum demonſtrationes more magis geometrico. Sed brevitati conſulo.

Igitur ſi figura rectilinea in aliam tranſmutanda eſt, ſufficit rectarum, à quibus conflatur, interſectiones transferre, & per eaſdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam tranſmutare oportet, transferenda ſunt puncta, tangentes, & aliæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inſervit autem hoc Lemma ſolutioni difficiliorum Problematum, tranſmutando figuras propoſitas in ſimpliciores. Nam rectæ quævis convergentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concurſum convergentium tranſit; idque quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ ſunt, quæ nuſquam concurrunt. Poſtquam autem Problema ſolvitur in figurâ novâ; ſi per inverſas operationes tranſmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur ſolutio quæſita.

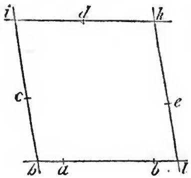
Utile eſt etiam hoc Lemma in ſolutione ſolidorum Problematum. Nam quoties duæ ſectiones conicæ obvenerint, quarum interſectione Problema ſolvi poteſt, tranſmutare licet earum alterutram, ſi Hyperbola ſit vel Parabola, in Ellipſin: deinde Ellipſis facile mutatur in Circulum. Rectam item & ſectio conica, in conſtructione planorum Problematum, vertuntur in rectam & circulum.

PROP. XXV. PROB. XVII.

Trajectoriam deſcribere, quæ per data duo puncta tranſibit, & rectas tres continget poſitione datas.

Per concurſum tangentium quarumvis duarum cum ſe invicem, & concurſum tangentis tertiæ cum rectâ illâ, quæ per puncta duo data tranſit, age rectam infinitam; eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, tranſmutetur figura, per Lemma ſuperius, in figuram novam. In hâc figurâ tangentes illæ duæ evadent ſibi invicem

De Motu Corporum



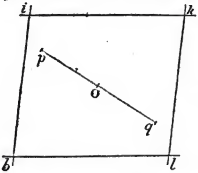
inviceem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto *bi*, *kl* tangentes illæ duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela tranſiens per puncta illa, *a*, *b*, per quæ conica ſectio in hâc figurâ novâ tranſire debet, & parallelogrammum *bikl* complens. Secentur rectæ *bi*, *ik*, *kl* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *bc* ad latus quadratum rectanguli *abh*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd*, ut eſt ſumma rectarum *bi* & *kl* ad ſummam trium linearum, quarum prima eſt recta *ik*, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *abb* & *alb*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex conicis, ſunt *bc* quadratum ad rectangulum *abb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad rectangulum *alb* in eâdem ratione; & propterea *bc* ad latus quadratum ipſius *abb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd*, & *el* ad latus quadratum ipſius *alb* ſunt in ſubduplicatâ illâ ratione; & compoſitè, in datâ ratione omnium antecedentium *bi* & *kl* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *abb*, & recta *ik*, & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur, ex datâ illâ ratione, puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figurâ novâ. Per inverſas operationes Lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per Prob. XIV.) deſcribetur trajectoria. Q. E. F. Cæterùm perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *b*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *b*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *b*, *l*, & alterum extra, Problema impoſſibile eſt.

PROP. XXVI. PROB. XVIII.

Trajectoriam deſcribere, quæ tranſibit per punctum datum, & rectas quatuor poſitione datas continget.

Ab interſectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interſectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita; &, eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur

figura (per Lem. XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent

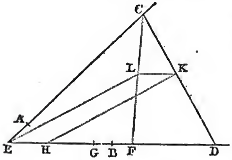


parallelæ. Sunto illæ *bi* & *kl*, *ik* & *bl*, continentes parallelogrammum *bikl*. Sitque *p* punctum, in hâc novâ figurâ, puncto in figurâ primâ dato reſpondens. Per figuræ centrum o agatur *pq*, & exiſtente *oq* æquali *op*, erit *q* punctum alterum, per quod ſectio conica in hâc figurâ novâ tranſire debet. Per Lemmatis XXII. operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria deſcribenda eſt. Per eadem vero deſcribi poteſt trajectoria illa per Problema XVII. Q. E. F.

LEMMA XXII.

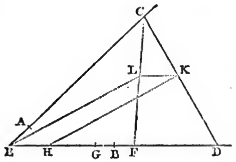
Si rectæ duæ poſitione datæ, AC, BD, *ad data puncta,* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* CD, *quâ puncta indeterminata* C, D *junguntur, ſecetur in ratione datâ in* K: *dico, quòd punctum* K *locabitur in rectâ poſitione datâ.*

Concurrant enim rectæ AC, BD in E, & in BE capiatur BG ad AE ut eſt BD ad AC, ſitque FD ſemper æqualis datæ EG; & erit



ex conſtructione EC ad GD, hoc eſt, ad EF, ut AC ad BD, ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur ſpecie triangulum EFC. Secetur CF in L, ut ſit CL ad CF in ratione CK ad CK; &, ob datam illam rationem, dabitur etiam ſpecie triangulum EFL; proindeque punctum L locabitur in rectâ EL poſitione datâ. Junge LK, & ſimilia erunt triangula CLK, CFD; & ob datam FD & datam rationem LK ad FD, dabitur LK. Huic æqualis capiatur EH, & erit

De Motu Corporum



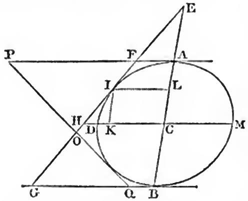
erit ſemper ELKH parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere poſitione dato HK. Q. E. D.

Corol. Ob datam ſpecie figuram EFLC, rectæ tres EF, EL & EC, id eſt, GD, HK & EC, datas habent rationes ad invicem.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni ſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico, quòd ſectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto AF, GB parallelæ duæ coni ſectionem ADB tangentes in A & B; EF recta tertia coni ſectionem tangens in I, & occurrens prioribus tangentibus in F & G; ſitque CD ſemidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quòd AF, CD, BG ſunt continuè proportionales.



Nam ſi diametri conjugatæ AB, DM tangenti FG occurrant in E & H, ſeque mutuò ſecent in C, & compleatur parallelogrammum IKCL; erit, ex naturâ ſectionum conicarum, ut EC ad CA ita CA ad CL, & ita diviſim EC−CA ad CA−CL, ſeu EA ad AL, & compoſitè EA ad EA+AL, ſeu EL, ut EC ad EC+CA, ſeu EB; ideoque, ob ſimilitudinem triangulorum EAF, ELI, ECH, EBG, AF ad LI ut CH ad BG. Eſt itidem, ex naturâ ſectionum conicarum, LI ſeu CK ad CD ut CD ad CH; atque ideo ex æquo perturbatè AF ad CD ut CD ad BG. Q. E. D.

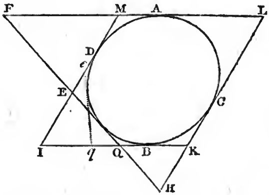
Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ FG, PQ tangentibus parallelis AF,

AF, BG occurrant in F & G, P & Q, ſeque mutuò ſecent in O; erit ex æquo perturbatè AF & BQ ut AP ad BG, & diviſim ut FP ad GQ, atque ideo ut FO ad OG.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ, PG, FQ, per puncta P & G, F & Q ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum figuræ & puncta contactuum, A, B, tranſeuntem.

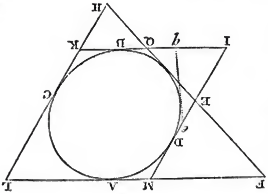
LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinitè producta tangant ſectionem quamcunque conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico, quòd abſciſſa alterutra ſit ad latus illud à quo eſt abſciſſa, ut pars lateris alterius contermini, inter punctum contactûs & latus tertium, eſt ad abſciſſarum alteram.



Tangant parallelogrammi MLIK latera quatuor, ML, IK, KL, MI, ſectionem conicam in A, B, C, D; & ſecet tangens quinta, FQ, hæc latera in F, Q, H & E; ſumantur autem laterum MI, KI abſciſſæ ME, KQ, vel laterum KL, ML abſciſſæ KH, MF: dico, quòd ſit ME ad MI ut BK ad KQ; & KH ad KL ut AM ad MF. Nam per corollarium primum Lemmatis ſuperioris eſt ME ad EI ut AM, ſeu BK, ad BQ; & componendo, ME ad MI ut BK ad KQ. Q. E. D. Item KH ad HL ut BK, ſeu AM, ad AF; & dividendo, KH ad KL ut AM ad MF. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi datur parallelogrammum IKLM, circa datam ſectionem conicam deſcriptum, dabitur rectangulum KQ × ME, ut & huic æquale rectangulum KH × MF. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum KQH, MFE.



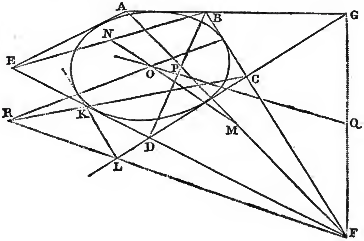
Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens, *eq*, tangentibus KI, MI occurrens in *q* & *e*; rectangulum KQ × ME æquabitur rectangulo K*q* × M*e*; eritque KQ ad M*e* ut K*q* ad ME, & diviſim ut Q*q* ad E*e*.

Corol. 3. Unde etiam ſi E*q*, *e*Q jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum ſectionis conicæ. Nam cùm ſit Q*q* ad E*e* ut KQ ad M*e*, tranſibit eadem recta per medium omnium E*q*, *e*Q, MK (per Lem. XXIII.) & medium rectæ MK eſt centrum ſectionis.

PROP. XXVII. PROB. XIX.

Trajectoriam deſcribere, quæ rectas quinque poſitione datas continget.

Dentur poſitione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA. Figuræ quadrilateræ ſub quatuor quibuſvis contentæ, ABFE, diagonales, AF, BE, biſeca in M & N, & (per Corol. 3. Lem. XXV.) recta MN, per



puncta

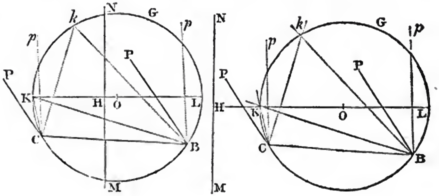
puncta biſectionum acta, tranſibit per centrum trajectoriæ. Rurſus figuræ quadrilateræ, BGDF, ſub aliis quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) BD, GF biſeca in P & Q: & recta PQ, per puncta biſectionum acta, tranſibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concurſu biſecantium. Sit illud O. Tangenti cuivis, BC, parallelam age KL, ad eam diſtantiam, ut centrum O in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget trajectoriam deſcribendam. Secet hæc tangentes alias quaſvis duas, GCD, FDE, in L & K. Per harum tangentium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL concurſus, C & K, F & L, age CK, FL concurrentes in R, & recta OR ducta & producta ſecabit tangentes parallelas CF, KL in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per conſtruct. Prob. XIV. trajectoriam deſcribere. Q. E. F.

Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel aſymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus unà cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ ejus parte æqualiter diſtantes. Aſymptotos autem pro tangente habenda eſt, & ejus terminus infinitè diſtans (ſi ita loqui fas ſit) pro puncto contactûs. Concipe tangentis cujuſvis punctum contactûs abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtructiones Problematum præcedentium vertentur in conſtructiones ubi Aſymptotos datur.

Poſtquam trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hâc methodo. In conſtructione & figurâ Lemmatis XXI. fac ut angulorum mobilium PBN, PCN crura, BP, CP, quorum concurſu trajectoria deſcribebatur, ſunt ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos B, C in figurâ illâ. Interea verò deſcribant altera angulorum illorum crura, CN, BN, concurſu ſuo K vel *k*, circulum BGKC. Sit circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad regulam MN, ad quam altera illa crura, CN, BN, interea concurrebant, dum trajectoria deſcribebatur demitte normalem OH circulo occurrentem in K & L. Et ubi

P 2 crura



crura illa altera CK, BK concurrunt ad punctum illud K, quod regulæ propius eſt, crura prima, CP, BP, parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde ſi detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium verò quadrata ſunt ad invicem ut KH ad LH, & inde facile eſt trajectoriam ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli C, B, tertium dabit angulos mobiles, PCK, PBK; his autem datis deſcribi poteſt circulus BGKC. Tum, ob datam ſpecie trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK, ideoque ipſa OH. Centro O, & intervallo OH, deſcribe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & tranſit per concurſum crurum CK, BK, ubi crura prima, CP, BP, concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa MN cujus ope trajectoria deſcribetur. Unde etiam viciſſim trapezium ſpecie datum (ſi caſus quidam impoſſibiles excipiantur) in datâ quâvis ſectione conicâ inſcribi poteſt.

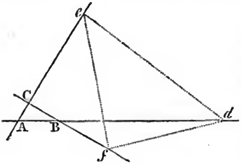
Sunt & alia Lemmata, quorum ope trajectoriæ ſpecie datæ, datis punctis & tangentibus, deſcribi poſſunt. Ejus generis eſt quòd, ſi recta linea per punctum quodvis poſitione datum ducatur, quæ datam coni ſectionem in punctis duobus interſecet, & interſectionum intervallum biſecetur, punctum biſectionis tanget aliam coni ſectionem ejuſdem ſpeciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

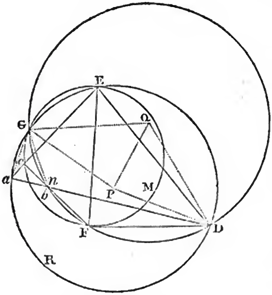
LEMMA

LEMMA XXVI.

Trianguli, ſpecie & magnitudine dati, tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.

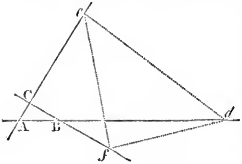
Dantur poſitione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC, & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam AC, & angulus F lineam BC tangat. Super DE, DF & EF deſcribe tria circulorum ſegmenta DRE, DGF, EMF; quæ capiant angulos angulis BAC, ABC, ACB æquales reſpectivè. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum DE, DF, EF, ut literæ D, R, E, D eodem ordine cum literis B, A, C, B; literæ D, G, F, D eodem cum literis A, B, C, A; & literæ E, M, F, E eodem cum literis A, C, B, A in orbem redeant; deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores ſe mutuò in G, ſintque centra eorum P & Q. Junctis GP, PQ, cape *Ga* ad AB ut eſt GP ad PQ; & centro G, intervallo *Ga*, deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum, DGE, in *a*. Jungatur tum *a*D ſecans circulum ſecundum, DFG, in *b*, tum *a*E ſecans circulum tertium, EMF, in *c*. Et jam licet figuram ABC*def* conſtituere

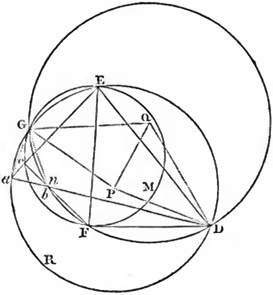




ſtituere ſimilem & æqualem figuræ *abc*DEF. Quo facto perficitur Problema.

Agatur enim F*c* ipſi *a*D occurrens in *n*, & jungantur *a*G, *b*G, QG, QD, PD. Ex conſtructione eſt angulus E*a*D æqualis angulo CAB, & angulus *ac*F æqualis angulo ACB, ideoque triangulum *anc* triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus *anc*, ſeu F*n*D, angulo ABC, ideoque angulo F*b*D æqualis eſt; & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus GPQ, qui dimidius eſt anguli ad centrum GPD, æqualis eſt angulo ad circumferentiam G*a*D; & angulus GQP, qui dimidius eſt anguli ad centrum GQD, æqualis eſt complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam G*b*D, ideoque æqualis angulo G*ba*; ſuntque ideo triangula GPQ, G*ab* ſimilia; & G*a* eſt ad *ab* ut GP ad PQ; id eſt (ex conſtructione) ut G*a* ad AB. Æquantur itaque *ab* & AB; & propterea triangula *abc*, ABC, quæ modò ſimilia eſſe probavimus, ſunt etiam æqualia. Unde, cùm tangant inſuper trianguli DEF anguli, D, E, F trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc*, reſpectivè, compleri poteſt figura ABC*def* figuræ *abc*DEF ſimilis & æqualis, atque eam complendo ſolvetur Problema. Q. E. F.





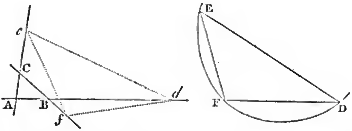
Corol. Hinc recta duci poteſt, cujus partes, longitudine datæ, rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe triangulum DEF, puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE, DF in directum

rectum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data, DE, rectis poſitione datis AB, AC, & pars data, DF, rectis poſitione datis AB, BC, interponi debet; & applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur Problema.

PROP. XXVIII. PROB. XX.

Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus, poſitione datis, interjacebunt.

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſit ſimilis & æqualis lineæ cur-



væ DEF, quæque à rectis tribus, AB, AC, BC, poſitione datis, in partes datis hujus partibus, DE & EF, ſimiles & æquales ſecabitur. Age rectas DE, EF, DF, & trianguli hujus, DEF, pone angulos D, E, F ad rectas illas poſitione datas (per Lem. XXVI.) dein circa triangulum deſcribe trajectoriam curvæ DEF ſimilem & æqualem. Q. E. F.

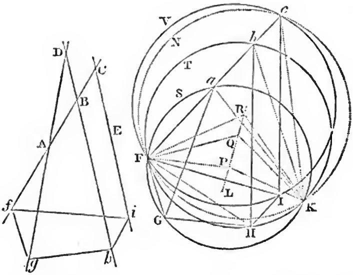
LEMMA XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere, cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor, ABC, AD, BD, CE; quarum prima ſecet ſecundam in A, tertiam in B, & quartam in C: & deſcribendum ſit trapezium *fghi*, quod ſit trapezio FGHI ſimile; & cujus angulus *f*, angulo dato F æqualis, tangat rectam ABC; cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis G, H, I æquales, tangant cæteras lineas AD, BD, CE reſpectivè. Jungatur FH, & ſuper FG, FH, FI deſcribantur totidem circulorum ſegmenta FSG, FTH, FVI;

FVI;

De Motu Corporum FVI; quorum primum FSG capiat angulum æqualem angulo BAD; ſecundum FTH capiat angulum æqualem angulo CBD; ac tertium



FVI capiat angulum æqualem angulo ACE. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum FG, FH, FI, ut literarum F, S, G, F idem ſit ordo circularis, qui literarum B, A, D, B; utque literæ F, T, H, F eodem ordine cum literis C, B, D, C; & literæ F, V, I, F eodem cum literis A, C, E, A in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros, ſitque P centrum circuli primi FSG, & Q centrum ſecundi FTH. Jungatur & utrinque producatur PQ, & in eâ capiatur QR, in eâ ratione ad PQ, quam habet BC ad AB. Capiatur autem QR ad eas partes puncti Q, ut literarum P, Q, R idem ſit ordo atque literarum A, B, C: centroque, R & intervallo RF, deſcribatur circulus quartus, FN*c*, ſecans circulum tertium, FVI, in *c*. Jungatur F*c* ſecans circulum primum in *a*, & ſecundum in *b*. Agantur *a*G, *b*H, *c*I, & figuræ *abc*FGHI ſimilis conſtitui poteſt figura ABC*fghi*. Quo facto erit trapezium *fghi* illud ipſum, quod conſtituere oportebat.

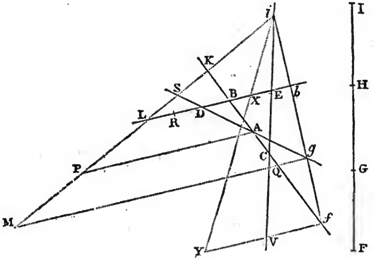
Secent enim circuli duo primi, FSG, FTH, ſe mutuò in K. Jungantur PK, QK, RK, *a*K, *b*K, *c*K, & producatur QP ad L. Anguli ad circumferentias, F*a*K, F*b*K, F*c*K, ſunt ſemiſſes angulorum FPK, FQK, FRK ad centra; ideoque angulorum illorum dimidiis, LPK,

LQK,

LQK, LRK, æquales. Eſt ergo figura PQRK figuræ *abc*K æquiangula & ſimilis; & propterea *ab* eſt ad *bc* ut PQ ad QR, id eſt, ut AB ad BC. Angulis inſuper F*a*G, F*b*H, F*c*I æquantur *f*A*g*, *f*B*b*, *fci*, per conſtructionem. Ergo figuræ *abc*FGHI figura ſimilis ABC*fgbi* compleri poteſt. Quo facto trapezium *fgbi* conſtituetur ſimile trapezio FGHI, & angulis ſuis, *f*, *g*, *b*, *i*, tanget rectas ABC, AD, BD, CE. Q. E. F.

Corol. Hinc recta duci poteſt, cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH, GHI uſque eo, ut rectæ FG, GH, HI in directum jaceant; & in hoc caſu, conſtruendo Problema, ducetur recta *fgbi*, cujus partes, *fg*, *gb*, *bi*, rectis quatuor poſitione datis, AB & AD, AD & BD, BD & CE, interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG, GH, HI, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem verò ſic fit expeditiùs.

Producantur AB ad K, & BD ad L, ut ſit BK ad AB ut HI ad GH; & DL ad BD ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in *i*.



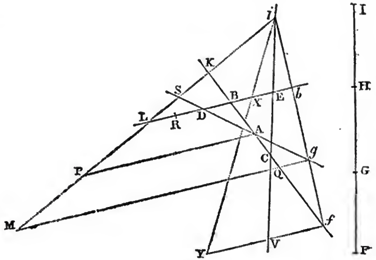
Producatur *i*L ad M, ut ſit LM ad *i*L ut GH ad HI, & agatur tum MQ ipſi LB parallela, rectæque AD occurrens in *g*, tum *gi* ſecans AB, BD in *f*, *b*. Dico factum.

Secet enim M*g* rectam AB in Q; & AD, rectam KL in S; & agatur

De Motu Corporum

gatur AP, quæ ſit ipſi BD parallela, & occurrat iL in P; & erunt gM ad Lb (gi ad bi, Mi ad Li, GI ad HI, AK ad BK) & AP ad BL in eâdem ratione. Secetur DL in R, ut ſit DL ad RL in eâdem illâ ratione; &, ob proportionales gs ad gM, AS ad AP, & DS ad DL, erit, ex æquo, ut gs ad Lb ita AS ad BL, & DS ad RL; & mixtim, BL−RL ad Lb−BL ut AS−DS ad gs−AS. Id eſt, BR ad Bb ut AD ad Ag, ideoque ut BD ad gQ. Et viciſſim, BR ad BD ut Bb ad gQ, ſeu fb ad fg. Sed, ex conſtructione, linea BL eâdem ratione ſecta fuit in D & R, atque linea FI in G & H: ideoque eſt BR ad BD ut FH ad FG. Ergo fb eſt ad fg ut FH ad FG. Cùm igitur ſit etiam gi ad bi ut Mi ad Li, id eſt, ut GI ad HI, patet lineas FI, fi, in g & b, G & H, ſimiliter ſectas eſſe. Q. E. F.

In conſtructione Corollarii hujus, poſtquam ducitur LK ſecans



CE in i, producere licet iE ad V, ut ſit EV ad Ei ut FH ad HI, & agere Vf parallelam ipſi BD. Eodem recidit ſi centro i, intervallo IH, deſcribatur circulus ſecans BD in X, & producatur iX ad Y, ut ſit iY æqualis IF, & agatur Yf ipſi BD parallela.

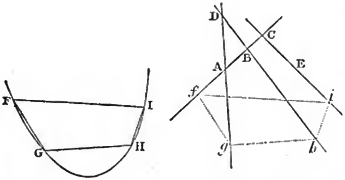
Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitârunt.

PROP.

PROP. XXIX. PROB. XXI.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ à rectis quatuor, poſitione datis, in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſimilis ſit lineæ curvæ FGHI, & cujus partes, illius partibus FG, GH, HI ſimiles & proportionales, rectis AB & BD, AD & BD, BD & CE poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis FG, GH, HI, FI, deſcribatur (per Lem. XXVII.) Trapezium *fghi* quod ſit trapezio FGHI ſimile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas AB, AD, BD, CE, ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium deſcribatur trajectoria curvæ lineæ FGHI conſimilis.

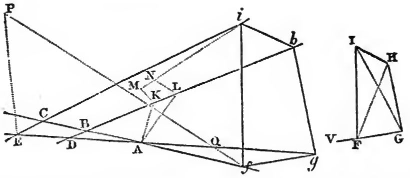


Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc Problema ut ſequitur. Junctis FG, GH, HI, FI, produc GF ad V, jungeque FH, IG, & angulis FGH, VFH fac angulos CAK, DAL æquales. Concurrant AK, AL cum rectâ BD in K & L, & inde agantur KM, LN; quarum KM conſtituat angulum AKM æqualem angulo GHI, ſitque ad AK ut eſt HI ad GH; & LN conſtituat angulum ALN æqualem angulo FHI, ſitque ad AL ut HI ad FH. Ducantur autem AK, KM, AL, LN ad eas partes linearum AD, AK, AL, ut literæ C,A,K,M,C; A,L,K,A; D,A,L,N,D; eodem ordine cum literis F,G,H,I,F in orbem redeant; & acta MN occurrat rectæ CE in *i*. Fac angulum *i*EP æqualem angulo IGF; ſitque PE ad E*i* ut FG ad GI; & per P agatur PQ*f*, quæ cum rectâ ADE contineat angulum PQE æqualem angulo FIG, rectæque AB occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem PE ad PQ, ad eas partes linearum CE, PE, ut literarum P,E,*i*,P & P,E,Q,P idem ſit ordo circularis qui literarum F,G,H,I,F; & ſi ſuper lineâ *fi*, eodem

 quoque

quoque literarum ordine, conſtituatur trapezium, *fgbi*, trapezio



FGHI ſimile, & circumſcribatur trajectoria ſpecie data, ſolvetur Problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROP. XXX. PROB. XXII.

Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Sit S umbilicus, & A vertex principalis Parabolæ, ſitque $4AS \times M$ æquale

(a) A puncto H in PO deducatur ad perpendiculum recta HR. Propter angulum ad G rectum, rectaſque GA, GS inter ſe æquales, junctæ HA, HS inter ſe æquales erunt. Punctum igitur A eſt ad circulum centro H radio HS ſcriptum, ad quem eſt etiam punctum parabolæ P. Duæ igitur HA, HP inter ſe æquales; et quadrata ex HG, AG ſimul ſumpta, cùm propter angulum ad G rectum quadrato ex HA æqualia ſint, quadrato quoque ex HP erunt æqualia. Sed propter angulum ad R rectum, quadratum ex HP duobus quadratis ex HR, RP ſimul ſumptis æquale eſt. Et cùm propter ſiguram HROG parallelogrammam, æquales inter ſe ſint illæ HR, GO, necnon illæ HG, RO, erit $HR^2 = GO^2 = \overline{AO - AG}|^2$, et $PR^2 = \overline{PO - GH}|^2$. Quare HP^2, ſive $AG^2 + GH^2 = \overline{AO - AG}|^2 + \overline{PO - GH}|^2$. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier.)*

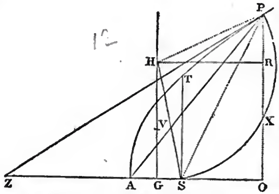
(b) $2AG \times AO = SA \times AO$; nempe cùm GA ipſius SA ſemiſſis ſit. Et $SA \times AO = \frac{1}{4} PO^2$, propter parabolam. Quare $AO^2 + PO^2 - 2GAO = AO^2 + PO^2 - \frac{1}{4} PO^2 = AO^2 + \frac{3}{4} PO^2$. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier, et in notis ſuis MSS. Gregorius.)*

(c) $\frac{4AS - 3SO}{6} \times PO = \frac{2}{3} AO \times OP - \frac{1}{2} SO \times OP$. Sed ſpatium $\frac{2}{3} AO \times OP$ æquale eſt areæ parabolicæ APO. (Hamilton. Conic. Lib. III. 13.) & $\frac{1}{2} SO \times OP$ æquale eſt triangulo SOP. Quare $\frac{2}{3} AO \times OP - \frac{1}{2} SO \times OP$ æquale erit areæ parabolicæ APS. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier, et in notis ſuis MSS. Gregorius.)*

• Verùm tota hæc demonſtratio magis geometricè ad hunc ferè modum concinnari poteſt.

Capiatur

æquale areæ parabolicæ abſcindendæ APS, quæ, radio SP, vel poſt exceſſum corporis de vertice deſcripta fuit, vel ante appulſum ejus ad verticem deſcribenda eſt. Innoteſcit quantitas areæ illius abſcindendæ ex tempore ipſi proportionali. Biſeca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale 3M; & circulus centro H, intervallo HS, deſcriptus ſecabit Parabolam in loco quæſito P. Nam, demiſſa ad axem perpendiculari PO, & ducta PH, eſt $AGq + GHq$ ($= HPq = \overline{AO - AG} : quad. + \overline{PO - GH} : quad.$) (a) $= AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2GH \times PO$ ($= AOq + POq - 2GAO$) $= AOq + \frac{3}{4} POq$ (b). Pro AOq ſcribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad $3PO$, ductiſque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3} GH \times AS$ ($= \frac{1}{6} AO \times PO + \frac{1}{2} AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ areæ $APO - SPO$) (c) $=$ areæ APS. Sed GH erat 3M, & inde $\frac{4}{3} GH \times AS$ eſt $4AS \times M$. Ergo area abſciſſa APS æqualis eſt abſcindendæ $4AS \times M$. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc GH eſt ad AS, ut tempus, quo corpus deſcripſit arcum AP, ad tempus, quo corpus deſcripſit arcum inter verticem A &

(b) Capiatur AZ tripla ipſius AS; jungantur AP, ZP. Recta autem PO circulo, centro H, radio HS ſcripto, iterum in puncto X occurrat. Jam cùm puncta quatuor A, S, P, X ad circulum illum ſint, idcirco rectangula POX, AOS erunt inter ſe æqualia. (El. III. 36.) Quare ſi rectangulum OAS utrique æqualium addatur, duo POX, OAS ſimul ſumpta duobus AOS, OAS ſimul ſumptis, hoc eſt (per El. II. 2.) quadrato ex AO, æqualia erunt. Addatur utrinque rectangulum $PO \times XR$: erunt tria illa, POX, $PO \times XR$, OAS, ſimul ſumpta duobus, quadrato ex AO et rectangulo $PO \times XR$, ſimul ſumptis æqualia. Sed è tribus illis POX, $PO \times XR$, OAS, duo quidem, POX, $PO \times XR$, rectangulum POR conficiunt. (El. II. 2.) Quare duo POR, OAS ſimul ſumpta, duobus, quadrato ex AO rectanguloque $PO \times XR$, erunt æqualia. Sive, cùm rectæ XR, PR inter ſe æquales ſint (El. III. 3.) duo POR, OAS, duobus, quadrato ex AO rectanguloque $PO \times PR$, æqualia erunt. Additoque utrinque rectangulo POR, fiet duplum rectanguli POR cum rectangulo OAS, quadratis ex AO, PO ſimul ſumptis æquale. Hoc eſt, cùm recta OR ipſi GH ſit æqualis, et rectangulum OAS (propter parabolam) æquale ſit parti quartæ quadrati ex PO, erit rectangulum $2GH \times PO$ cum parte quartâ quadrati ex PO, æquale quadratis duobus ex AO, PO ſimul ſumptis. Ablatâque utrinque parte quartâ quadrati ex PO, erit $GH \times 2PO = AO^2 + \frac{3}{4} PO^2$. Sed $\frac{3}{4} PO^2 = OA \times 3AS$ (propter parabolam) $= OA \times AZ$. Quare $AO^2 + \frac{3}{4} PO^2 = AO^2 + OA \times AZ = ZO \times OA$. Erit igitur $GH \times 2PO = ZO \times OA$. Quapropter $GH \times 2PO : GH \times 4AS = ZO \times OA : GH \times 4AS$. (El. V. 7.) Sed $GH \times 2PO : GH \times 4AS = 2PO : 4AS$ (El. VI. 1.) $= PO : 2AS$ (El. V. 15.) $= AO : \frac{1}{2} PO$ (propter parabolam). Quare $ZO \times OA : GH \times 4AS = AO : \frac{1}{2} PO$. (El. V. 11.) Sed ut AO ad $\frac{1}{2} PO$ ita eſt quadratum ex AO ad triangulum POA. (El. I. 41. & VI. 1.) Quare $ZO \times OA$ eſt ad $GH \times 4AS$ ut AO^2 ad triangulum POA. Et permutando ZO ad AO ut $GH \times 4AS$ ad triangulum POA. Sed ut ZO ad AO ita eſt triangulum POZ ad triangulum POA.

A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum (d).

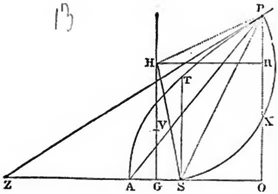
Corol. 2. Et circulo ASP per corpus motum P perpetuò tranſeunte, velocitas puncti H eſt ad velocitatem, quam corpus habuit in vertice A, ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione eſt linea GH ad lineam rectam, quam corpus, tempore motûs ſui ab A ad P, eâ cum velocitate quam habuit in vertice A, deſcribere poſſet (e).

Corol. 3. Hinc etiam vice versâ inveniri poteſt tempus, quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H (f).

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis, cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.

Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod, ceu polum, revolvatur perpetuò linea recta, uniformi cum motu, & interea in rectâ illâ exeat punctum mobile de polo, pergatque ſemper eâ cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet ſpiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ ovalis, à rectâ illâ abſciſſæ, portio per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia



POA. (El. VI. 1.) Triangulum igitur POZ et rectangulum GH × 4AS ad triangulum POA eandem utrumque rationem habet. Triangulum igitur ZOP rectangulo GH × 4AS æquale erit. Et cùm recta M pars tertia ſit rectæ GH, ac proinde rectangulum M × 4AS triens rectanguli GH × 4AS, ideirco pars tertia trianguli ZOP rectangulo M × 4AS æquale erit. Jam veró triangulum ZOP è duobus componitur, PAZ, PAO. Horum alterius quidem, PAZ, triangulum PSA pars tertia eſt (nempe per El. VI. 1. cùm recta AZ facta eſt tripla ipſius AS). Alterius autem, PAO, ſegmentum parabolicum ATP pars tertia eſt. (Hamilton. Conic. Lib. III. 13.) Ex triangulo igitur PSA cum ſegmento parabolico ATP conſit pars tertia trianguli POZ. Sed ex eodem triangulo PSA cum ſegmento parabolico ATP conſit ſector parabolicus SAP. Sector igitur ille trianguli POZ parti tertiæ eſt æqualis, hoc eſt rectangulo M × 4AS. Q. E. D.

(e) Recta

tia puncti à polo, quæ huic areæ proportionalis eſt; ideoque omnia ſpiralis puncta per æquationem finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujuſvis poſitione datæ interſectio cum ſpirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinitè producta ſpiralem ſecat in punctis numero infinitis; & æquatio, quâ interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem, ideoque aſcendit ad tot dimenſiones, quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuò ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, quâ interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri, niſi per æquationem quatuor dimenſionum, quâ omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque, & propterea eadem ſemper concluſio; quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones ſectionum conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eò quòd ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum; & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſariò fieret, reducere liceret Problemata omnia ſolida ad plana, & pluſquam ſolida ad ſolida. Loquor hic de curvis LIBER PRIMUS.

(d) Recta ab umbilico S ad perpendiculum cum axe educta Parabolæ in T occurrat, et capiatur recta GV tripla ejus, quæ cum 4AS rectangulum claudat ſpatio ATS æquale. Erit $\frac{1}{3}GV \times AS =$ ATS. Sed $ATPS = \frac{1}{3}GH \times AS$. Quare ATPS erit ad ATS, hoc eſt, tempus quo conficitur arcus AP ad tempus quo conficitur arcus AT, ut GH ad GV. Præterea cùm area ATS ſit $\frac{2}{3}AS \times ST$, et ST æqualis ſit duplæ AS, erit $ATS = \frac{4}{3}AS^2$. Sed $ATS = \frac{1}{3}GV \times AS$. Quare $AS^2 = GV \times AS$. Ac proinde $GV = AS$. Tempus igitur quo conficitur arcus AP erit ad tempus quo conficitur AT ut GH ad AS. Q. E. D. *(Eadem ferè Le Seur & Jacquier.)*

(e) Nascente arcu AP, ſector parabolicus ASP triangulo rectilineo ASP fit primò æqualis, ſive dimidio rectanguli $AS \times PO$. Quare cùm rectangulum $\frac{1}{3}GH \times AS$ ſectori ASP ſemper ſit æqualis, erit primò, congruentibus punctis P, A, $\frac{1}{3}GH \times AS = \frac{1}{8}PO \times AS$. Ac propterea $\frac{1}{3}GH = \frac{1}{8}PO$, et $8GH = 3PO$. Quare $GH : PO = 3 : 8$; primò ſcilicet, arcu AP naſcente. Sed cùm recta PO arcuſque AP naſcentes ſint primò inter ſe æquales (Lem. VII.) ratio prima naſcentis rectæ GH, motu puncti H ſcriptæ, ad naſcentem PO, ea erit quam celeritas puncti H (ſaltem quà motum ſuum incipiet) habebit ad velocitatem corporis, per parabolam delati, in ipſo vertice A. Sed æquabilis eſt motus puncti H, propter æquabilem areæ ASP deſcriptionem, cujus utique rationem recta GH, creſcendo, conſtanter ſervat. Velocitas igitur æquabilis puncti H ad celeritatem corporis in parabolæ vertice A, rationem habebit eam quam 3 ad 8. Q. E. D.

(f) Propter æquales HP, HA, punctum H erit ad rectam à medio puncto rectæ AP ad perpendiculum eductam.

poteſtate

poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum; ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis, per æquationes trium; quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis, per æquationes dimenſionum quatuor; & ſic in infinitum. Ergo rectæ & ſpiralis interſectiones numero infinitæ, cùm curva hæc ſit ſimplex, & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus interſectiones omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam ſi à polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud, unà cum ſecante, revolvatur circa polum, interſectiones ſpiralis tranſibunt in ſe mutuò, quæque prima erat, ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit; poſt duas, tertia; & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio, niſi pro mutatâ magnitudine quantitatum, per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cùm quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam; ideoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & ſpiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis, cujus area, rectis imperatis abſciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo ſpiralis deſcribatur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt, quòd longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De ovalibus autem hîc loquor, quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

Hinc area Ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile finitam;

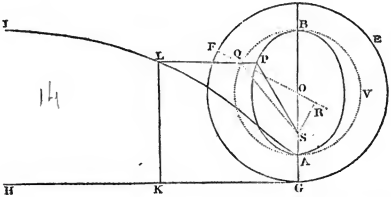
(f) Sicut ante Newtonum Walliſius fecerat. Nempe ejus eſt conſtructio Problematis Kepleriani

ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per deſcriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello, quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſque (ut ſpirales, quadratrices, trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) ſunt arithmeticè rationes vel irrationales. Aream igitur Ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per Curvam geometricè irrationalem (g), ut ſequitur.

PROP. XXXI. PROB. XXIII.

Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Ellipſeos APB ſit A vertex principalis, S umbilicus, & O centrum, ſitque P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G, ut ſit OG ad OA ut OA ad OS. Erige perpendiculum GH, centroque O, & intervallo OG, deſcribe circulum GEF, & ſuper regulâ GH, ceu fundo, progrediatur rota GEF, revolvendo circa axem ſuum, & interea, puncto ſuo A, deſcribendo Trochoidem ALI. Quo facto,

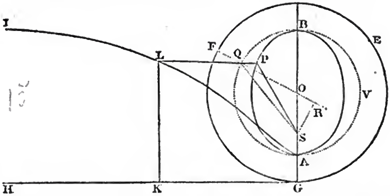


cape GK in ratione ad rotæ perimetrum GEFG, ut eſt tempus, quo corpus progrediendo ab A deſcripſit arcum AP, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Erigatur perpendiculum KL occurrens

riani quam Newtonus traditurus eſt. *Vide Walliſii libellum de Cycloide & Ciſſoide.*

 Trochoidi

De Motu Corporum



Trochoidi in L, & acta LP, ipſi KG parallela, occurret Ellipſi in corporis loco quæſito P.

Nam centro O, intervallo OA, deſcribatur ſemicirculus AQB; & arcui AQ occurrat LP, ſi opus eſt producta, in Q; junganturque SQ, OQ. Arcui EFG occurrat OQ in F, & in eandem OQ demittatur perpendiculum SR. Area APS eſt ut area AQS, id eſt, ut differentia inter ſectorem OQA & triangulum OQS, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}$OQ × AQ & $\frac{1}{2}$OQ × SR; hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}$OQ, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR, ideoque (cùm eædem ſint datæ rationes SR ad ſinum arcûs AQ, OS ad OA, OA ad OG, AQ ad

(b) Hæc quidem explicatiùs dici poſſint hoc modo. Area APS eſt ad aream totam Ellipſeos APB, ut area AQS ad aream circuli ABV (Lemma LV. Cor. H. 1): hoc eſt ut differentia ſectoris OQA trianguliqne OQS ad aream circuli ABV, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}$OQ × AQ & $\frac{1}{2}$OQ × SR ad rectangulum ſub $\frac{1}{2}$OQ & toto ambitu circuli ABV: ſive rurſum, ut differentia arcûs AQ rectæque SR ad totum ambitum circuli ABV. Arcus autem AQ eſt ad ambitum circuli ABV, ut arcus GF ad ambitum circuli GFE. Et recta SR ad ambitum circuli ABV rationem habet, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ SR ad ſinum arcûs AQ, ſinûſque ejus ad ambitum ABV. Sed, propter angulum ad R rectum, recta SR erit ad SO ut ſinus anguli SOR, ſive, arcûs AQ, ad radium OA. Permutando, SR erit ad ſinum arcûs AQ, ut SO ad OA. Sed SO : OA = OA : OG. Ita enim factum eſt. Et OA eſt ad OG ut ambitus circuli ABV ad ambitum circuli GFV. Erit igitur SR ad ſinum arcûs AQ ut ambitus circuli ABV ad ambitum circuli GFV. (El. V. 11.) Quæ igitur è rationibus rectæ SR ad ſinum arcûs AQ, ſinûſque illius ad ambitum ABV, compoſita eſt ratio, ea quidem componetur è rationibus ambitûs ABV ad ambitum GFE, ſinûſque arcûs AQ ad ambitum ABV. Verùm ex eiſdem compoſita eſt ratio, quam ſinus arcûs AQ habet ad ambitum circuli GFE. Quare recta SR erit ad ambitum circuli ABV ut ſinus arcûs AQ ad ambitum circuli GFE. Cùm igitur ſit arcus AQ ad ambitum ABV ut arcus GF ad ambitum GFE; atque rurſum recta SR ad ambitum ABV ut ſinus arcûs AQ ad ambitum GFE: idcirco differentia arcûs AQ rectæque SR erit ad ambitum ABV, ut differentia arcûs GF ſinûſque arcûs AQ ad ambitum GFE (El. V. 24.)

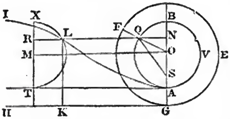
Quare area APS erit ad aream totam Ellipſeos ut differentia arcûs GF ſinûſque arcûs AQ ad ambitum circuli GFE. Sed recta GK differentiæ arcûs GF ſinûſque arcûs AQ æqualis eſt. Quare area APS erit ad aream ellipſeos ut recta GK ad ambitum GFE; hoc eſt, ut tempus, quo confecta eſt area APS, ad tempus converſionis integræ per ambitum Ellipſeos. Namque ſumpta eſt GK, quæ haberet ad ambitum GFE hanc rationem. Q. E. D.

Rectam autem GK æqualem eſſe differentiæ arcûs GF ſinûſque arcûs AQ, id oſtendimus hoc modo. Lineæ Trochoidis, ALI, ea eſt deſcriptio, ut rotâ GFE, circum centrum ſuum O, æquabiliter ſe convertente, centrum ipſum O motu æquabili transferatur ſecundum rectam cum rectâ GH parallelam; atque

ad GF, & diviſim AQ−SR ad GF − ſinu arcûs AQ) ut GK differentia inter arcum GF & ſinum arcûs AQ(h). Q. E. D. LIBER PRIMUS.

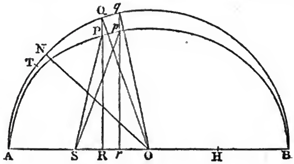
Scholium.

Cæterùm, cùm difficilis ſit hujus Curvæ deſcriptio, præſtat ſolutionem vero proximam exhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57.29578, quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia SH ad Ellipſeos diametrum AB; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eâdem ratione inverſe. Quibus ſemel inventis, Problema deinceps confit per ſequentem analyſin. Per conſtructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoſcatur corporis locus P proximus vero ejus loco *p*. Demiſſâque ad axem ellipſeos ordinatim applicatâ PR, ex proportione diametrorum ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti, AQB, ordinatim applicata RQ, quæ ſinus eſt anguli AOQ exiſtente AO radio, quæque ellipſin ſecat in P. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus, quo corpus deſcripſit arcum A*p*, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli AOQ ad radium; & angulus E ad angulum N − AOQ + D,



(h) atque eâ quidem velocitate, ut ſpatium, quod tempore integræ converſionis rotæ emenſum fuerit, rotæ ambitui GFB æquale ſit. Sit igitur M locus centri rotæ, O, quo tempore punctum ejus A locum L occupat. Circulus centro M, radio ML, ſcriptus poſitionem circuli AQB referet, quo tempore centrum rotæ in locum M pervenerit; junctaque OM cum rectâ GH parallela erit. Et ſi per A ducatur recta AT cum rectâ GK parallela, quæ circulo TLX in T occurrat, hæc circulos æquales, AQB, TLX, in punctis A, T continget; junctaque MT rectam AT ad perpendiculum inſiſtet; ac proinde cum rectâ OA parallela erit. Recta igitur LQ rectis inter ſe parallelis OA, TM, in punctis N, R occurrat. Erunt duæ NR, OM, necnon duæ TR, AN inter ſe æquales. Quare in circulis æqualibus, AQB, TLX, cum diametrorum AB, TX partes illæ, AN, TR, inter ſe æquales ſint; ordinatim eductæ, NQ, RL, erunt etiam inter ſe æquales. Quapropter arcus etiam AQ, TL, quorum ſinus ſunt illæ NQ, RL, erunt inter ſe æquales. Jam verò cùm centrum rotæ O, rectâ progrediendo, & punctum A, converſione rotæ circumactum, in loca M, L ſimul devenerint, recta OM et arcus TL ſpatia erunt, quæ puncta illa ſimul confecerint. Recta igitur OM erit ad arcum TL, ſive illi æqualem AQ, ut velocitas puncti O ad velocitatem puncti A. Eſt autem ambitus circuli GFE ad ambitum circuli ABV ut velocitas puncti O ad velocitatem puncti A. Recta igitur OM erit ad arcum AQ ut ambitus circuli GFE ad ambitum circuli ABV. (El. V. 11.) Fit autem arcus GF ad arcum AQ ut ambitus circuli GFE ad ambitum circuli ABV. Recta igitur OM arcuſque GF ad arcum AQ eandem proportionem habent. Recta igitur OM, ſive illi æqualis RN, arcui GF æqualis erit. (El. V. 9.) Quare NL, cui æqualis eſt GK, arcûs GF rectæque RL differentia erit. Sed oſtenſa eſt RL ſinui arcûs AQ æqualis. Quare GK differentia erit arcûs GF ſinûſque arcûs AQ. Q. E. D.

ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli AOQ+E ad radium, tum angulus G ad angulum N−AOQ−E+F ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem coſinu anguli AOQ+E diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eſt ſinus anguli AOQ+E+G ad radium; & angulus I ad angulum N−AOQ−E−G+H, ut eſt longitudo L ad eandem longitudinem coſinu anguli AOQ+E+G diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AO*q* æqualis angulo AOQ+E+G+I+ &c. Et ex coſinu ejus O*r* & ordinatâ *pr*, quæ eſt ad ſinum ejus *qr* ut ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. Si quando angulus N−AOQ+D negativus eſt, debet ſignum + ipſius E ubique

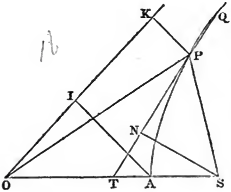


(ⁱ) Capiatur ſcilicet arcus AN, qui ſit ad ambitum Circuli AQB, ut tempus quo conficitur area ASP ad tempus converſionis integræ per ambitum Ellipſeos; et jungantur ON, SQ. Jam cùm ſector AON ſit ad aream circuli AQB ut arcus AN ad ambitum; cùm ſit etiam area ASQ ad aream circuli ut area elliptica PSA ad aream totam ellipſeos, hoc eſt ut arcus AN ad ambitum circuli ANB; idcirco ſector AON et area ASQ inter ſe æquales erunt. Quare ſi æqualium hoc et illud ſectori AOQ dematur, quæ relinquentur, ea quoque inter ſe æqualia erunt. Sector igitur NOQ triangulo SOQ æqualis. Quare arcus NQ rectæ à puncto S in radium OQ ad perpendiculum demiſſæ æqualis erit. Circuli AQB ſit arcus QT anguli B menſura. Et cùm arcus circuli cujuſvis ſint inter ſe ut anguli quos metiuntur, erit arcus ille circuli AQB qui radio OA æqualis eſt, ad arcum TQ ut angulus 57°,29578 ad angulum B, hoc eſt ut OA ad OS. Arcus igitur TQ rectæ SO æqualis erit. Et cùm arcus NQ rectæ à puncto S in rectam OQ ad perpendiculum deductæ æqualis ſit, erit TQ ad NQ ut radius ad ſinum anguli AOQ.

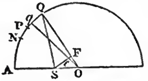
Jam cùm angulus AON, motûs utique medii, ex dato temporis ſpatio, quod elapſum fuerit ab appulſu planetæ ad apſidem A, datus ſit, et cùm ex angulo illo dato punctum N detur, ſi quo modo definiri poſſet amplitudo arcûs NQ, datum eſſet punctum Q. Et ex dato Q, ad circulum, daretur P ad ellipſin. Daretur autem arcus NQ, ſi quidem angulus QOA ad centrum circuli datus eſſet. Nimirum cùm arcus ille NQ is ſit, ad quem datus arcus TQ rationem habeat, quam radius ad ſinum anguli QOA. Atqui cùm ignotus ſit angulus PSA, ſeu motûs veri, angulus QOA æquè ignorabitur. Neque è ratione radii ad anguli ignoti ſinum arcus NQ, exquiſitâ ſaltem ratione, definiri poteſt. Illud igitur agendum, quoniam via recta indaginis nulla pateat, ut anguli QOA æſtimatio quædam conjecturâ fiat; et, elicitâ arcûs NQ magnitudine, quæ conjecturæ illi reſpondeat, videndum, an arcus AN, arcu illo NQ auctus, aſſumpto AQ æqualis ſit, vel quantum ab eo diſcrepet. Ita errorem aſſumptionis æſtimare liceat, et novam anguli AOQ conjecturam, vero propriorem, capere. Quæ quidem ipſa ſimili examini ſubjicienda, et novis rurſus aſſumptionibus emendanda erit; donec, errores ſenſim amoliendo, tantùm non ipſam veritatem aſſecuti ſimus. Nempe invento puncto N, ponatur arcus N*q* (in figurâ appoſitâ) æqualis menſuræ anguli D, quo Newtonus docet modo definiend.

E ubique mutari in –, & ſignum – in +. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli N – AOQ – E + F, & N – AOQ – E – G + H negativi prodeunt. Convergit autem ſeries infinita AOQ + E + G + I + &c. quàm celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultrà progredi quàm ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quòd area APS ſit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in radium OQ perpendiculariter demiſſam (i).

Non diſſimili calculo conficitur Problema in Hyperbolâ. Sit ejus centrum O, vertex A, umbilicus S, & Aſymptotos OK. Cognoſcatur quantitas areæ abſcindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ SP, quæ aream APS abſcindat veræ proximam. Jungatur OP, & ab A & P ad Aſymptoton agantur AI, PK Aſymptoto alteri parallelæ, & per tabulam logarithmorum dabitur area AIKP, eique æqualis area OPA (k), quæ ſubducta de tri-



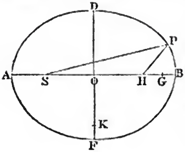
definiendi. Si locus P in ellipſi (in figurâ Newtonianâ) pro planetæ loco verè aſſumptus fuerit, verè etiam æſtimatus fuerit angulus AOQ. Itaque arcus NQ illi Nq lineationis noſtræ æqualis erit, et punctum q in ipſum Q incidet. Si q in ipſum Q non incidat, minùs exquiſitè collocatum erit punctum Q. Sit P punctum ubi Q collocari oportuit. Junctâ Oq, à puncto S in OQ ad perpendiculum demittatur SF, quæ rectæ Oq in e occurrat. Exiguo exiſtente angulo QOq, id enim ponimus, angulus SeO tantùm non rectus erit, et recta eF differentiæ rectarum, quæ à puncto S in rectas Oq, OQ ad perpendiculum demittantur, tantùm non æqualis erit. Sed earum differentiæ arcus Pq tantum non æqualis eſt. Nempe cùm alteri rectarum arcus Nq æqualis ſit, alteri arcus NP propemodum ſaltem æqualis. Quare Pq : Qq = eF : qQ. Sed eF : Qq = OF : OQ propemodum. Ergo Pq : Qq = OF : OQ, et PQ : Qq = OF + OQ : OQ propemodum. Sed cùm OQ, QF propè ſint æquales, ut OQ + OF ad OQ ita erit OQ ad QF quàm proximè. Quare PQ : Qq = OQ : QF quàm proximè. Jam verò capiatur L quæ ſit ad R, hoc eſt ad ipſam OQ, ut OQ ad OS. Erit igitur quadratum ex OQ æquale rectangulo SO × L. Eſt autem SO ad OF, ut radius, hoc eſt ut OQ, ad coſinum anguli AOQ (propter angulum ad F rectum). Quare coſin. AOQ × SO = OQ × OF. Quare L × SO : coſin. AOQ × SO = OQ² : OQ × OF. Quare rurſum L : coſ. AOQ = OQ : OF. Et convertendo L : L – coſin. AOQ = OQ : QF. Sed OQ : QF = PQ : Qq quàm proximè (ex priùs oſtenſis). Quare L : L – coſin. AOQ = PQ : Qq quàm proximè. Ac proinde junctâ OP, angulus QOP erit quàm proximè ad angulum QOq ut longitudo L ad eandem L coſinu anguli AOQ imminutam. Sed ut L ad L – coſin. AOQ ita eſt angulus E Newtonianus ad angulum N – AOQ + D. Et angulus N – AOQ + D = AON – AOQ + NOq = – qOQ. Quare E = – QOP quàm proximè. Angulo igitur E illi AOQ ablato, reſtabit AOP quàm proximè. Et calculis ad Newtoni præcepta refectis, ſi quid reliquum eſt erroris, penitus id tandem amoliri licebit. [*Hæc ferè Keillius, vel horum ſaltem non multum diſſimilia, in Actis Philoſoph. & in 25ª Lectionum ſuarum Aſtronomicarum.*]



(k) Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. XV. & Cor.

angulo OPS relinquet aream abſciſſam APS. Applicando areæ abſcindendæ A & abſciſſæ APS differentiam duplam, 2APS − 2A, vel 2A − 2APS, ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem TP perpendicularis eſt, orietur longitudo chordæ PQ. Inſcribatur autem chorda illa PQ inter A & P, ſi area abſciſſa, APS, major ſit areâ abſcindendâ A; ſecus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratior (l). Et computatione repetitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.

Atque his calculis Problema generaliter conſit analyticè. Verùm uſibus aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis, qui ſequitur. Exiſtentibus AO, OB, OD ſemiaxibus Ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentiâ inter ſemiaxem minorem OD & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt rectangulum ſub differentiâ illâ D, & ſemiſummâ axium, AO + OD, ad quadratum



(l) Puta enim Q verum eſſe planetæ locum; junctis PQ, SQ, ſi locus P pro vero aſſumptus à vero non multum aberraverit, ſector hyperbolicus SPQ parvus erit, et triangulo SPQ haud multo major. Sed triangulum SPQ, rectanguli SN × PQ dimidium erit; nimirum cùm, ob parvitatem arcûs PQ, angulus TPQ duobus rectis tantùm non æqualis fiat, ut duæ rectæ TP, PQ pro unâ haberi poſſint. Sector igitur hyperbolicus SPQ, ſeu differentia areæ abſciſſæ ASP, et abſcindendæ ASQ, dimidio rectanguli SN × PQ haud multo major erit. Quare dupla illa differentia, ſive 2APS − 2A, rectangulo illo haud multo major. Ac proinde recta PQ non multo minor erit quàm recta $\frac{2APS - 2A}{SN}$. Si igitur, aut verſus verticem, A, aut ad partes puncti P contrarias, prout area APS major quàm abſcindenda minorve fuerit, inſcribatur chorda PQ rectæ $\frac{2APS - 2A}{SN}$ æqualis, erit Q locus planetæ accuratior; vero tamen ejus loco promotior citeriorve, prout area APS juſto minor majorve ſumpta fuerit. Calculis autem refectis error ſenſim amoliendus erit. *(Eadem ferè Le Seur & Jacquier, & in notis ſuis MSS Gregorius.)*

(m) Vel quod eodem redit, ſicut mox oſtendam (Lemm. H. VII.) capiatur angulus Y cujus ſinus ſit ad radium, vel potius qui ipſe ſit ad angulum 57°,29578 ut parallelopipedon ſuper quadratum ex OS, altitudine quæ rectæ OD æqualis ſit, ad quadruplum cubi è dimidio axe tranſverſo.

(n) Vel, quod eodem redit, capiatur angulus Z qui ſit ad Y ut 8SH ad 3.$\overline{AO + OD}$.

(o) Hujus computationis rationes abditiſſimas ut in lucem proferamus, ante omnia ex angulo mediæ quem vocant anomaliæ, anguli BHP, ad umbilicum orbitæ ſuperiorem conſtituti, formula quædam generalis conficienda eſt (quæ alia ſanè ac ſeries infinita eſſe nequit) cujus ope angulorum illorum differentiam æſtimare liceat. Huic differentiæ æquationem Newtonianam, X ± V, in orbibus quorum exigua eſt umbilicorum diſtantia ratione axis tranſverſi, ita non æqualem oſtendemus, ut illud quo hæc ab illâ aberit, in omnium quidem planetarum orbitis, ſi unum Mercurium exceperis, pro nihilo habendum ſit. Sed ad formulæ illius inventionem, et ad alia quæ polliciti ſumus præſtanda, nonnullis è Geometriâ aſſumptis via nobis munienda eſt.

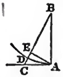
LEMMA

tum axis majoris AB (m); tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantiâ, SH, & differentiâ illâ, D, ad triplum quadratum ſemiaxis majoris AO (n). His angulis ſemel inventis; locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori, quo arcus BP deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V, primam medii motûs æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut eſt ſinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem ſecundam, ad angulum Z, æquationem maximam ſecundam, ut eſt cubus ſinûs anguli T ad cubum radii. Angulorum, T, V, X, vel ſummæ, T+X+V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ, T+X−V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum BHP, motum medium æquatum (o); & ſi HP occurrat ellipſi in P, acta SP abſcindet aream BSP tempori proportionalem quàm proximè. LIBER PRIMUS.

Hæc

L E M M A H. III.

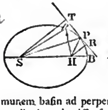
Si trianguli ABC *angulus ad* A *rectus ſit, angulusque ad* B *ſit perexiguus, longitudo quâ latus* BC, *angulo recto adverſum, ſuperat latus* BA, *recto angulo exiguoque contiguum, cum duplo latere* BC, *lateréque* AC, *quod exiguo angulo adverſum eſt, quàm proximè proportione tertia erit.*



Centro B, radio BA, ſcribatur circulus, qui rectæ BC in D occurrat. Erit CD longitudo illa, quâ latus BC latus BA ſuperat. Dico 2BC : CA = CA : CD quàm proximè. A puncto enim A in rectam BD deducatur ad perpendiculum recta AE. Propter angulos ad A et E rectos, erit BC : BA = BA : BE (El. VI. 8.) Hoc eſt, cùm BA, BD, propter circulum, ſint inter ſe æquales, BC : BD = BD : BE. Convertendo, BC : CD = BD : DE. Sed propter perexiguam anguli ABC amplitudinem, illæ BC, BD inter ſe tantùm non æquales erunt. Quare et illæ CD, DE, inter ſe tantùm non æquales. (El. V. 14.) Quare CD tantùm non ſemiſſis erit rectæ CE. Sed propter angulos ad A et E rectos, erit BC : CA = CA : CE. Ac proinde 2BC : CA = 2CA : CE = CA : ½CE. Hoc eſt, cùm CD tantùm non æqualis ſit dimidiæ CE, 2BC : CA = CA : CD. Q. E. D.

L E M M A H. IV.

Si à puncto quovis, P, *ad Ellipſin, cujus* S, H *umbilici, ducantur rectæ* PS, PH *ad umbilicos, puncto* P *per circuitum ellipſeos utcunque tranſlato, fluxio ſectoris* BHP *erit ad fluxionem ſectoris* BSP *ut recta* HR, *ad rectam* SP.



Ducatur enim recta TPR quæ ellipſin in puncto P contingat, & in illam à punctis S, H ad perpendiculum deducantur ST, HR. Sit *p* aliud punctum ad ellipſin, et jungantur S*p*, H*p*, P*p*. Jam fluxio ſectoris BHP ad fluxionem ſectoris BSP rationem habebit eam, quæ, coeuntibus punctis P, *p*, ſectoris PH*p* naſcentis ad naſcentem PS*p* prima erit: ſive (per Lemma VI.) quæ trianguli naſcentis PH*p* ad naſcens triangulum PS*p* prima erit. Sed cùm triangula illa baſin P*p* ſemper communem habeant, eadem ſemper erit triangulorum ratio, quæ rectarum ab horum verticibus, H, S, in communem baſin ad perpendiculum demiſſarum. Et rectæ in communem naſcentium baſin ad perpendiculum demiſſæ ſunt ipſæ HR, ST. Quare fluxio ſectoris BHP erit ad fluxionem ſectoris BSP ut

HR

Hæc praxis ſatis expedita videtur, propterea quòd angulorum perexiguorum v & x, in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum, figuras duas treſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad theoriam Planetarum. Nam in orbe vel Martis ipſius, cujus æquatio

HR ad ST. Verùm anguli HPR, SPT inter ſe æquales ſunt (Hamilton. Conic. Lib. II. 16.) et anguli ad R et T ſunt recti. Quare triangula HPR, SPT erunt inter ſe ſimilia, et $HR : ST = HP : SP$. Fluxio igitur areæ BHP erit ad fluxionem areæ BSP ut HP ad SP. (El. v. 11.) Q. E. D.

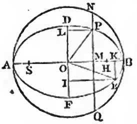
L E M M A H. V.

Si à puncto quovis P in Ellipſi, cujus umbilici, S, H, centrum O, axes AOB, FOD, ducatur PM ad axem tranſverſum AB ordinatim, ſpatium, quo quadratum ex ſemidiametro, quæ ſemidiametri OP eſt conjugata, ſuperat quadratum ex ſemiaxe ſecundo, ad quadratum ex ordinatâ PM rationem habebit eam, quam quadratum ex dimidiâ umbilicorum diſtantiâ ad quadratum ex ſemiaxe ſecundo.

Per centrum Ellipſeos O ducatur ſemidiameter OE conjugata ejus quæ per P ducitur.

Dico $OE^2 - OD^2 : PM^2 = OH^2 : OD^2$.

A punctis E, P, diametrorum conjugatarum OE, OP verticibus, ducantur EK, PL, in axes AB, FD ordinatim. Ducatur etiam EI in axem FD ordinatim. Centroque O, radio OB, qui eſt ſemiaxis tranſverſus ellipſeos, ſcribatur circulus, qui rectæ PM in punctis N, Q occurrat. Propter angulum ad K rectum, quadratum ex OE, duobus quadratis ex EK, OK, ſive duobus ex OI, OK ſimul ſumptis, æquale eſt. Horum autem illud ex OI rectangulo FLD, alterum ex OK rectangulo AMB æquale eſt. (Hamilton. Conic. Lib. IV. 2.) Quadratum igitur ex OE, rectangulis duobus FLD, AMB ſimul ſumptis æquale erit. Utrique æqualium auferatur quadratum ex OD; relinquentur $OE^2 - OD^2$, $AMB - OL^2$ inter ſe æqualia. Sed, propter circulum, rectangulum $AMB = NM^2$; et, propter figuram LPMO parallelogrammam, $OL^2 = PM^2$. Quare $OE^2 - OD^2 = NM^2 - PM^2 = NPQ$. Jam verò cùm propter Ellipſin, rectangulum AMB (hoc eſt quadratum ex NM) ſit ad quadratum ex PM ut quadratum ex OB ad quadratum ex OD; dividendo, erit $NPQ : PM^2 = OH^2 : OD^2$. Quare cùm NPQ ſpatio $OE^2 - OD^2$ modò oſtenſum ſit æquale, erit etiam $OE^2 - OD^2 : PM^2 = OH^2 : OD^2$. Q. E. D.



Cor. 1. Deductâ PM à quovis puncto P, eorum quæ ad ellipſin, in axem tranſverſum ordinatim, erit illud quo rectangulum AMB, ſub ſegmentis axis, ſuperat quadratum ex ordinatâ PM, æquale illi quo quadratum ex ſemidiametro OE, conjugatâ utique ejus quæ per P ducitur, ſuperat quadratum ex ſemiaxe ſecundo OD.

Cor. 2. Deductâ PL à quovis puncto P, eorum quæ ad ellipſin, in axem ſecundum OD ordinatim, erit illud quo quadratum ex ordinatâ PL ſuperat rectangulum FLD, ſub ſegmentis axis, æquale illi quo quadratum ex ſemiaxe tranſverſo OB ſuperat quadratum ex ſemidiametro OE conjugatâ utique ejus, quæ per P ducitur. Nam cùm quadratum ex OE æquale ſit duobus rectangulis AMB, FLD ſimul ſumptis, ſi æqualium hoc et illud quadrato ex OB auferatur, relinquentur $OB^2 - OE^2$, $OM^2 - FLD$, ſive $PL^2 - FLD$, inter ſe æqualia.

Cor. 3. Deductâ PL in axem ſecundum ordinatim, ſpatium quo quadratum ex ſemidiametro OE, conjugatâ quidem ejus quæ per P ducitur, ſuperatur à quadrato ex ſemiaxe tranſverſo OB, erit ad quadratum ex ordinatâ PL, ut quadratum ex dimidiâ umbilicorum diſtantiâ ad quadratum ex ſemiaxe tranſverſo. Dico $OB^2 - OE^2 : PL^2 = OH^2 : OB^2$. Nam, propter ellipſin, $PL^2 : FLD = OB^2 : OD^2$. Convertendo, $PL^2 : PL^2 - FLD = OB^2 : OH^2$. Et invertendo, $PL^2 - FLD : PL^2 = OH^2 : OB^2$. Sed $PL^2 - FLD = OB^2 - OE^2$. (Cor. 2.) Quare $OB^2 - OE^2 : PL^2 = OH^2 : OB^2$. Q. E. D. Sunt hæc quidem Corollaria à negotio noſtro aliena: ſed rerum convenientias contemplari juvat.

L E M M A

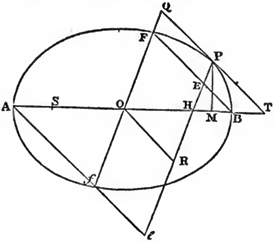
æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motûs medii æquati, BHP, angulus veri motûs BSP & diſtantia SP in promptu ſunt per methodum notiſſimam. LIBER PRIMUS.

Hactenus

LEMMA H. VI.

Lineâ rectâ Ellipſin in quovis puncto contingente, ſi à puncto illo recta ducatur ad alterutrum umbilicorum ellipſeos, aliaque ad axem tranſverſum ordinatim, tum ſi per verticem axis tranſverſi ducatur recta cum contingente parallela, hæc ab illâ, quæ per umbilicum ducta eſt, partem abſcindet, contingentem verſus, illi quam ordinatim deducta ab axe tranſverſo abſciderit, verticem verſus per quem ducta fuerit recta cum contingente parallela, æqualem.

Ellipſin, cujus axis tranſverſus AB, centrum O, umbilici S, H, in puncto quolibet P recta PT contingat. A puncto P ad alterutrum umbilicorum, puta ad H, ducatur recta PH, rectaque PM ad axem tranſverſum AB ordinatim. Per verticem alterutrum axis tranſverſi, puta per B, ducatur recta BE cum contingente PT parallela, quæ rectæ ad umbilicum ductæ, PH, in E occurrat. Dico rectæ PH ſegmentum PE, quod recta EB ab illâ abſciderit à parte contingentis, æquale eſſe illi MB, quod ordinata PM ab axe tranſverſo abſciderit à parte verticis B. Occurrat enim axis tranſverſus productus rectæ PT in T. Ducatur per O, centrum ellipſeos, recta OQ cum illâ PH parallela, quæ contingenti TP in Q occurrat, rectæque BE in F *. Erit OT : OB = OB : OM (Hamilton. Conic. Lib. 1. XLVIII.) Convertendo OT : TB = OB : BM. Sed propter rectas TQ, BF inter ſe parallelas, OT : TB = OQ : QF. (El. VI. 2.) Quare OB : BM = OQ : QF. Sunt autem OB, OQ inter ſe æquales. (Hamilton. Conic. Lib. 2. XXIII.) Quare BM, QF inter ſe æquales. (El. V. 14.) Sed, propter figuram PEFQ parallelogrammam, erunt PE, QF inter ſe æquales. Quare et BM, PE inter ſe æquales erunt. Q. E. D.



Et ſi ab altero axis tranſverſi vertice, A, ducatur Ae cum contingente parallela, quæ rectæ PH per umbilicum ductæ in e occurrat, ſimilibus argumentis efficientur AM, Pe inter ſe æquales. Rectæ enim Ae recta QO producta in f occurrat. Jam cùm ſit OT : OB = OB : OM, erit etiam OT + OB, ſive AT, ad OB + OM, ſive AM, ut OT ad OB. Permutando AT : OT = AM : OB. Sed, propter rectas TQ, Ae inter ſe parallelas, erit AT : TO = fQ : QO. Quare AM : OB = fQ : QO. Sunt autem OB, QO inter ſe æquales. Quare AM, fQ, ac propterea AM, eP inter ſe æquales. Q. E. D.

COR. 1. Rectæ per umbilicum pars illa, Ee, quæ rectis parallelis BE, Ae intercepta eſt, duplæ diſtantiæ ordinatæ PM à centro, hoc eſt, duplæ OM æqualis erit. Nam cùm Pe = AM, et PE = BM, erit Ee = AM − BM = 2OB − 2BM = 2OM.

COR. 2. Segmentum rectæ per umbilicum, inter umbilicum et rectam cum contingente parallelam, eſt ad ſegmentum axis inter ordinatam et centrum, ut diſtantia umbilici à vertice illo, per quem ducta eſt recta cum contingente parallela, ad dimidium axis tranſverſi. Per centrum enim O ducatur recta OR cum contingente PT parallela, quæ rectæ PH, per umbilicum ductæ, in R occurrat. Propter figuram PROQ parallelogrammam erit PR æqualis illi OQ, cui oſtenſa eſt æqualis OB. Quare PR, OB inter ſe æquales. Sed PE, BM inter ſe æquales. Æquales igitur OM, ER. Ad utramque igitur æqualium OM, ER illa EH eandem rationem habet. (El. V. 7.) Sed, propter

* *Cave credas punctum F neceſſariò ad Ellipſin eſſe. Id enim in appoſitâ figurâ fortuitum eſt.*

 rectas

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem poteſt ut mobile rectâ deſcendat vel rectâ aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi motus ſpectant, pergo jam exponere.

SECTIO

rectas EL, RO inter ſe parallelas, $EH : ER = HB : BO$. Quare $EH : OM = HB : BO$.

Similibus argumentis efficietur $EH : OM = AH : AO$. Q. E. D.

LEMMA H. VII.

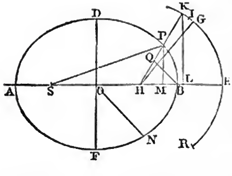
In Ellipſi rectangulum ſub dimidiâ axium ſummâ dimidiâque lateris recti et axis ſecundi differentiâ ad quadratum è dimidiâ umbilicorum diſtantiâ rationem habet quam axis ſecundus ad axem tranſverſum.

Sit Ellipſis cujus axis tranſverſus AB, ſecundus DF, centrum O umbilici S, H (fig. text. p. 134.) Capiatur OG dimidio axi ſecundo OD æqualis, et OK æqualis dimidio lateri recto. Ita erit AG dimidia axium ſumma, et FK dimidia axis ſecundi laterisque recti differentia erit. Dico eſſe $FK \times AG : OH = OF : OA$.

Erit enim $FK \times AG$ duobus $FK \times AO$, $FK \times OG$ ſimul ſumptis æquale. Quorum illud $FK \times AO = OF \times OA - OK \times OA = OF \times OA - OF^2$ (nempe cùm propter trium AO, OF, OK continuam proportionis convenientiam rectangulum $OK \times AO$ quadrato ex OF æquale ſit.) Verùm, propter OG, OF inter ſe æquales, $FK \times OG = OF^2 - OF \times OK$. Quare $FK \times AO + FK \times OG = AO \times OF - OF \times OK$. Quare $FK \times AG = AO \times OF - OF \times OK$. Jam verò $AO \times OF : AO^2 = OF : AO = OK : OF = OF \times OK : OF^2$. Quare (per El. v. 12.) $AO \times OF - OF \times OK : AO^2 - OF^2 = OK : OF = OF : OA$. Hoc eſt, cùm $AO \times OF - OF \times OK$ æquale ſit rectangulo $FK \times AG$ (ex modò oſtenſis), et cum $AO^2 - OF^2$ æquale ſit quadrato ex OH (propter ellipſin) idcirco erit $FK \times AG : OH^2 = OF : OA$. Q. E. D.

Horum tandem ope facilis erit formulæ, quâ opus eſt, inventio; quæ, ſi omnia calculorum vi perficere voluiſſemus, magno quidem conſtitiſſet labore.

1. In orbe Elliptico cujus axes, tranſverſus quidem AB, ſecundus FD, centrum O, umbilici S, H, ſit S umbilicorum is quem vires centripetæ reſpiciant, punctum P locus quilibet planetæ in hoc orbe circumacti. Junctis PS, PH, centro H, radio HE, qui dimidio axi tranſverſo OB æqualis ſit, ſcribatur circulus; et hujus circuli capiatur arcus EG, qui ad totum circuli circuitum rationem habeat, quam ſector BSP ad aream totam ellipſeos. Junctâ igitur HG erit angulus EHG mediæ quem vocant anomaliæ, ejuſque menſura pro radio HE erit arcus EG. Et ſi producatur HP circulum uſque, cui in K occurrat, erit arcus EK menſura anguli, EHP, ad umbilicum orbitæ ſuperiorem conſtituti.



2. Significetur arcus EG literâ T, arcus EK literâ z. A punctis K, P in axem ellipſeos AB deducantur ad perpendiculum KL, PM. Erit KL ſinus, HL coſinus arcûs EK; quorum KL ſignificetur literâ s, HL literâ x. Jungatur HD, et per O ducatur ſemidiameter ON, conjugata ejus quæ per P. Æquales OB, HE, HD literâ a communiter ſignificentur. Semiaxis ſecundus OD ſignificetur literâ c; et OH, dimidia umbilicorum diſtantia, literâ n.

3. Jam puncto P per ellipſeos circuitum tranſlato, fluxio ſectoris circularis EHK erit ad fluxionem ſectoris elliptici BHP ut quadratum ex HK ad quadratum ex HP. (Ideo ſcilicet quia naſcentia ſectorum EHK, BHP incrementa ſunt primò inter ſe ſicut triangula inter ſe ſimilia, quorum triangulorum ſunt HK, HP latera homologa.) Sed fluxio ſectoris elliptici BHP ad fluxionem ſectoris elliptici BSP erit ut HP ad PS (Lemma H. 4.) hoc eſt ut quadratum ex HP ad rectangulum $HP \times PS$. vel ut quadratum ex HP ad quadratum ex ON; nam quadratum ex ON rectangulo $HP \times PS$ eſt æquale.

SECTIO VII.

De corporum aſcenſu & deſcenſu rectilineo.

PROP.

quale. (Hamilton. Conic. Lib. II. 19.) Cùm igitur ſit fluxio ſectoris circularis EHK ad fluxionem ſectoris elliptici BHP ut quadratum ex HK ad quadratum ex HP, et fluxio ſectoris elliptici BHP ad fluxionem ſectoris elliptici BSP ut quadratum ex HP ad quadratum ex ON, erit ex æquo fluxio ſectoris circularis EHK ad fluxionem ſectoris elliptici BSP ut quadratum ex HK ad quadratum ex ON. Hoc eſt $\dot{\overline{EHK}} : \dot{\overline{BSP}} = HK^2 : ON^2$. Quare cùm $\dot{\overline{EHK}}$ æqualis ſit rectangulo $\frac{1}{2} HE \times \dot{\overline{EK}}$, ſive $\frac{1}{2} a\dot{z}$, erit $\dot{\overline{BSP}} = \frac{ON^2}{2a}\dot{z}$.

4. Sed (per Lemma H. v.) eſt $ON^2 - OD^2 : PM^2 = OH^2 : OD^2$. Quare $\overline{ON^2 - OD^2} \times \frac{OD^2}{OH^2}$, ſive $\overline{ON^2 - cc} \times \frac{cc}{nn}, = PM^2$. Sed propter rectas PM, KL parallelas, erit $KL : PM = KH : HP$. Quare $KL^2 \times \frac{HP^2}{KH^2}$, ſive $\frac{ss \times HP^2}{a^2}, = PM^2$. Quare $\overline{ON^2 - cc} \times \frac{cc}{nn} = \frac{ss}{a^2} \times HP^2$. Et $ON^2 = cc + \frac{nn.ss}{cca^2} HP^2$.

5. Agatur per B recta BQ cum rectâ ON parallela, quæ rectæ HP in Q occurrat. Ita dividetur HP in partes duas, PQ, QH; quarum altera quidem, PQ, æqualis erit abſciſſæ ab axe BM, altera vero $QH = \frac{OM \times HB}{OB}$. (Lemma H. vi. & Cor. ejus 2.) Propter rectas KL, PM inter ſe parallelas, erit $HL : HM = HK : HP$. Quare $HM = \frac{HL \times HP}{HK} = \frac{x \times HP}{a}$. Sed $HB = a - n$. Quare $BM = a - n - \frac{x \times HP}{a}$. Et $OM = n + \frac{x \times HP}{a}$. Quare $QH \left(= \frac{OM \times HB}{OB}\right) = \overline{n + \frac{x \times HP}{a}} \times \frac{a-n}{a} = n + \overline{\frac{x \times HP}{a}} - \frac{n^2}{a} - \overline{\frac{nx \times HP}{a^2}}$. Quare rurſum $PH = (BM + QH) = a - \frac{n^2}{a} - \frac{nx \times HP}{a^2} = \frac{a^2 - n^2}{a} - \frac{nx \times HP}{a^2} = \frac{c^2}{a} - \frac{nx \times HP}{a^2}$. Et tranſponendo $HP \times \frac{a^2 + nx}{a^2} = \frac{c^2}{a}$. Quare $HP = \frac{ac^2}{a^2 + nx}$. Et $HP^2 = \frac{a^2.c^4}{\overline{a^2 + nx}|^2}$. Quare $\frac{nn.ss}{cca^2} HP^2 = \frac{nn.ss.cc}{\overline{a^2 + nx}|^2}$. Additoque utrinque cc, erit $cc + \frac{nnss}{cca^2} HP^2$, hoc eſt ex ſuprà oſtenſis (§ 4.) $ON^2, = cc + \frac{nn.ss.cc.}{\overline{a^2 + nx}|^2}$. Quare fluxioni areæ BSP, cui illud $\frac{ON^2}{2a}\dot{z}$ jam ſuprà (§ 3.) oſtenſum eſt æquale, erit hoc etiam æquale, $\frac{cc\dot{z}}{2a} + \frac{nn.ss.cc}{2a \times \overline{a^2 + nx}|^2}\dot{z}$. Erit inquam $\dot{\overline{BPS}} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nn.cc.ss}{2a \times \overline{a^4 + 2a^2nx + n^2x^2}|}\dot{z}$.

6. Hujus membro poſteriore in ſeriem infinitam, diviſionis operâ, explicato, erit $\dot{\overline{BPS}} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nn.cc.ss}{2a^5}\dot{z} - \frac{n^3cc.ss.x}{a^7}\dot{z} + \frac{3n^4c^2ssx^2}{2a^9}\dot{z} -$. Hæc ſeries, ſi exigua ſit n, dimidia umbilicorum diſtantia ratione dimidii axis tranſverſi, a, qualiſcunque ſuerit arcûs z amplitudo, celerrimè quidem ad metam properabit: ut tria prima ejus membra pro ſummâ totius haberi poſſint. Ponatur igitur $\dot{\overline{BPS}} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nnccss}{2a^5}\dot{z} - \frac{n^3ccssx}{a^7}\dot{z}$.

7. Jam cùm ſit $\dot{z} : \dot{x} = a : s$ (Excerpt. ex Epiſt. IV. Not. [k]. Cor.) erit $s\dot{z} = a\dot{x}$. Rurſum, cùm ſit $\dot{z} : \dot{s} = a : x$ (Excerpt. ex Epiſt. IV. Not. [l]. Cor.) erit $x\dot{z} = a\dot{s}$. Quare quantitatis ejus, cui inventa eſt $\dot{\overline{BPS}}$ æqualis, ejus inquam membro ſecundo erit hoc æquale, $\frac{nnccs}{2a^4}\dot{x}$; tertio autem, hoc,

$\frac{n^3cc.s^2.}{a^6}$

PROP. XXXII. PROB. XXIV.

Poſito quòd vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, ſpatia definire, quæ corpus, rectâ cadendo, datis temporibus deſcribit.

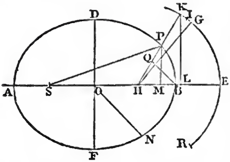
Caſ.

$\frac{n^3 ccs^2\dot{s}}{a^6}$.

Hinc $\dot{\overline{EPS}} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nnccs\dot{x}}{2a^4} - \frac{n^3 ccs^2\dot{s}}{a^6}$.

Atque hinc efficitur $EPS = \frac{ccz}{2a} + \boxed{\frac{n^2 ccs\dot{x}}{2a^4}} - \frac{n^3 ccs^3}{3a^6}$.

Sed $\boxed{\frac{n^2 ccs\dot{x}}{2a^4}} = \frac{n^2 c^2}{2a^4} EKL$. Et $EKL = HKE - HKL = \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}xs$. Quare $EPS = \overline{\frac{cc}{2a} + \frac{n^2 cc}{4a^3}}\,z - \frac{n^2 cc}{4a^4}xs - \frac{n^3 ccs^3}{3a^6}$.



8. Atque formulam hujus quidem ſimillimam, vel re potius eandem, notis autem aliam, et aliâ longè ratione inventam, in notationibus ſuis Anglicis Emerſonus tradidit. Qui tamen formulâ quam invenerat, ad explicationem eorum, quæ à Newtono ſunt præcepta, minùs feliciter uſus eſt; calculorum ut opinor faſtidio, haud enim ingenii tarditate lapſus; à quâ ſuſpicione vir ille acutiſſimus procul abeſt. Nos autem ad propoſitum revertamur. Cùm arcus circularis EG ſit ad totum circuli circuitum ut area BPS ad aream totam ellipſeos (ita enim factum eſt), erit ſector circularis EHG ad aream circuli ut ſector ellipticus BPS ad aream ellipſeos. Et permutando, ſector EHG erit ad ſectorem BPS ut circulus ad ellipſin; hoc eſt, ut quadratum ex HE ad rectangulum $OB \times OD$; vel, cùm æquales ſint HE, OB, ut HE ad OD, ſive ut a ad c. Quare ſector $EHG = \frac{BPS \times a}{c}$. Quare arcus EG, ſive $T, = \frac{2BPS}{c} = \overline{\frac{c}{a} + \frac{n^2 c}{2a^3}}\,z - \frac{n^2 c}{2a^4}xs - \frac{2n^3 c}{3a^6}s^3$. Capiatur igitur arcus ER ad quem EK, vel z, rationem habeat quam $2a^3$ ad $\overline{2a^2 + n^2}\,c$. Erit $T = ER - \frac{n^2 c}{2a^4}xs - \frac{2n^3 c}{3a^6}s^3$.

9. Jam cùm n, dimidia umbilicorum diſtantia, exigua ſit ratione ipſius a, dimidii axis tranſverſi (id enim ſemper ponimus) hoc eſt, cùm in triangulo DOH, cujus angulus ad O rectus eſt, angulus ODH ſit exiguus, erit OH^2, ſive $n^2, = 2DH \times \overline{DH - DO} = 2a \times \overline{a - c}$ (Lemma H. III.) et $n^2 c = 2a^2 c - 2ac^2$. Hinc $2a^3 : \overline{2a^2 + n^2}\,c = 2a^3 : \overline{4a^2 - 2ac}\,c = a^2 : 2ac - c^2$. Differentia duarum a, c deſignetur literâ p, ut ſit $a - c = p$. Erit igitur $2ac - c^2 = a^2 - p^2$. Hinc $a^2 : 2ac - c^2 = a^2 : a^2 - p^2$. Quare $2a^3$ erit ad $\overline{2a^2 + n^2}\,c$, hoc eſt arcus EK ad arcum ER ut a^2 ad $a^2 - p^2$. Sed cùm p non niſi pars multeſſima ſit ipſius a; hinc ratio illorum a^2, $a^2 - p^2$, tantùm non æqualium ratio erit, et arcus ER, EK inter ſe tantùm non æquales. Pro æqualibus igitur habendi ſunt. Inde erit $T = EK - \frac{n^2 c}{2a^4}xs - \frac{2n^3 c}{3a^6}s^3$.

Vel tranſponendo, $T + \frac{n^2 c}{2a^4}xs + \frac{2n^3 c}{3a^6}s^3 = EK$. Ablatoque $EG = T$, erit $\frac{n^2 c}{2a^4}xs + \frac{2n^3 c}{3a^6}s^3 = GK$. Atqui arcus GK menſura eſt anguli GHK, ſeu differentiæ anguli anomaliæ mediæ angulique BHP ad umbilicum orbitæ ſuperiorem. Hæc ita ſe habent ſi angulus BHP recto minor ſit. Quòd ſi recto major ille fuiſſet, calculis ſimili modo ſubductis, proveniſſet arcus $GK = -\frac{n^2 c}{2a^4}xs + \frac{2n^3 c}{3a^6}s^3$.

10. Osten-

Caſ. I. Si corpus non cadit perpendiculariter, deſcribet id (per Corol. I. Prop. XIII.) ſectionem aliquam conicam, cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit ſectio illa conica ARPB, & umbilicus ejus S. Et primò ſi figura Ellipſis eſt, ſuper hujus axe majore, AB, deſcribatur ſemicirculus ADB; & per corpus deci- LIBER PRIMUS.

10. OSTENDENDUM eſt igitur menſuram æquationis Newtonianæ, X ± V, pro radio HE, arcui GH modò invento æqualem eſſe.

Diviſum puta arcum GK in duos GI, IK, quorum alter GI æqualis ſit illi $\frac{n^2c}{2a^4}xs$, alter IK æqualis ſit $\frac{2n^3c}{3a^6}s^3$.

11. Cùm litera s ſinum, x coſinum arcûs EK ſignificet, exiſtente a radio, erit rectangulum $2xs =$ $a \times$ ſin. 2EK. Duplum enim rectanguli ſub ſinu et coſinu arcûs cujuſpiam circularis rectangulo ſub radio & ſinu arcûs dupli æquale eſt. (Keill. Trigonom. Plan. Prop. IV. Cor.) Quare $\frac{n^2c}{2a^4}xs =$ $\frac{n^2c}{4a^3}$ ſin. 2T propemodum. Arcus igitur GI illi $\frac{n^2c}{4a^3}$ ſin. 2T tantùm non æqualis erit.

12. Jam verò ſinus anguli Y Newtoniani eſt ad radium ut $D \times \overline{AO + OD}$ ad $4AO^2$. Quare ſinus anguli Y, ſive cùm angulus Y exiguus ſit, arcus, qui menſura eſt anguli Y pro radio AO, erit $\frac{D \times \overline{AO + OD}}{4AO}$, ſive $D \times \frac{a+c}{4a}$. Et cùm arcus ille ſit ad alium, qui menſura erit anguli V, ut radius ad ſinum dupli arcûs T, erit arcus ille quem angulus V menſuram habet, $\frac{D \times \overline{a+c} \times \text{ſin. } 2T}{4a^2}$. Sed (per Lemma H. VII.) $D = \frac{OH^2 \times OD}{\overline{AO + OD} \times AO} = \frac{n^2c}{\overline{a+c} \times a}$. Quare $\frac{D \times \overline{a+c}}{4a^2} = \frac{n^2c}{4a^3}$. Quare arcus, quem angulus Newtoni V menſuram habet pro radio a vel AE, erit $\frac{n^2c}{4a^3}$ ſin. 2T, cui oſtenſus eſt arcus GI tantùm non æqualis (§ 11). Angulus igitur V Newtonianus angulo GHI tantùm non æqualis.

13. Rurſum propter arcus EG, EK tantùm non æquales, eorum ſinus tantùm non æquales erunt. Quare $s^3 = \overline{\text{ſin. } T}|^3$ propemodum. Hinc arcus IK $= \frac{2n^3c}{3a^6}\overline{\text{ſin. } T}|^3$ propemodum.

14. Verùm ſinus anguli Z Newtoniani, vel, ſi angulus exiguus ſit, arcus ipſe, quem angulus ille Z menſuram habet, eſt ad radium ut $4D \times OH$ ad $3AO^2$, ſive ut $4D \times n$ ad $3a^2$. Quare arcus ille $= \frac{4n \times D}{3a} = \frac{4n^3c}{3a^2 \times \overline{a+c}}$. Et cùm arcus ille ſit ad alium, quem angulus X menſuram habet, ut a^3 ad $\overline{\text{ſin. } T}|^3$, erit arcus, quem angulus X menſuram habet, $= \frac{4n^3c}{3a^5 \times \overline{a+c}} \times \overline{\text{ſin. } T}|^3$. Vel ſi pro $a+c$ ponatur $2a$, nempe cùm perexigua ſit illarum a, c differentia, erit menſura anguli X Newtoniani pro radio a, vel HE, $= \frac{4n^3c}{6a^6}\overline{\text{ſin. } T}|^3 = \frac{2n^3c}{3a^6}\overline{\text{ſin. } T}|^3$, cui oſtenſus eſt arcus IK tantùm non æqualis (§ 13). Quare angulus X Newtonianus angulo IHK tantùm non æqualis eſt. Quare X ± V angulo KHI ± IHG, hoc eſt angulo KHG, tantùm non æqualis. Q. E. D.

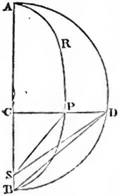
		Y	Z
		° ′ ″	° ′ ″
In orbita	☿	0 — 38 — 5	0 — 21 — 30
	♀	0 — 00 — 2½	0 — 00 — 00,04
	⊖	0 — 00 — 14	0 — 00 — 00, 6
	♂	0 — 7 — 4	0 — 1 — 42
	♃	0 — 1 — 57	0 — 0 — 15
	♄	0 — 2 — 58	0 — 0 — 28

14. CALCULIS ſubductis invenio angulos Y, Z in orbitis planetarum, quales hæc Tabella indicat.

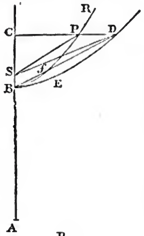
15. Cæterùm in orbitâ Mercurii, computatio ex Newtoni præceptis inſtituta æquationem maximam dabit 24°—7′—31″; quam Halleius partibus, 25′—02″, minorem ſtatuit.

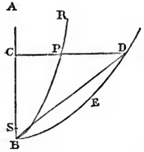
dens

dens tranſeat recta DPC perpendicularis ad axem; actiſque DS, PS, erit area ASD areæ ASP, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB, minuatur perpetuò latitudo ellipſeos; & ſemper manebit area ASD tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: &, orbe APB jam coincidente cum axe AB, & umbilico S cum axis termino B, deſcendet corpus in rectâ AC, & area ABD evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque ſpatium AC, quod corpus de loco A, perpendiculariter cadendo, tempore dato deſcribit, ſi modò tempori proportionalis capiatur area ABD, & à puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC. Q. E. I.



Caſ. 2. Si figura illa RPB Hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem AB hyperbola rectangula BED: & quoniam areæ CSP, CB*f*P, SP*f*B ſunt ad areas CSD, CBED, SDEB, ſingulæ ad ſingulas, in datâ ratione altitudinum CP, CD (*); & area SP*f*B proportionalis eſt tempori quo corpus P movebitur per arcum P*f*B; erit etiam area SDEB eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ RPB in infinitum, manente latere tranſverſo, & coibit arcus PB cum rectâ CB, & umbilicus S cum vertice B, & recta SD cum rectâ BD. Proinde area BDEB proportionalis erit tempori quo corpus C, recto deſcenſu, deſcribit lineam CB. Q.E.I.





Caſ. 3. Et ſimili argumento ſi figura RPB Parabola eſt, & eodem vertice principali, B, deſcribatur alia Parabola BED, quæ ſemper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ CB; fiet ſegmentum

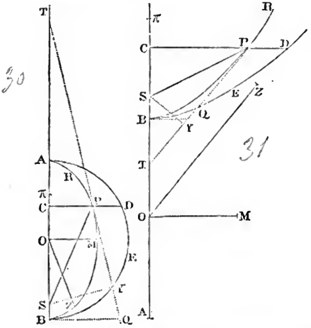
(*) Spatiis utique hyperbolicis CP*f*P, CBED eadem inter ipſa eſt ratio, quæ rectis CP, CD. (Lemma IV.

ſegmentum parabolicum BDEB proportionale tempori, quo corpus illud, P vel C, deſcendet ad centrum S vel B. Q. E. I.

PROP. XXXIII. THEOR. IX.

Poſitis jam inventis, dico, quòd corporis cadentis velocitas, in loco quovis C, *eſt ad velocitatem corporis, centro* B, *intervallo* BC, *Circulum deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione quam* AC, *diſtantia corporis à Circuli vel Hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$ AB.

Biſecetur AB, communis utriuſque figuræ RPB, DEB diameter, in O; & agatur recta PT, quæ tangat figuram RPB in P, atque etiam ſecet communem illam diametrum AB (ſi opus eſt productam) in T; ſitque SY ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ RPB latus rectum ponatur L. Conſtat per Corol. 9. Prop. XVI. quòd corporis, in lineâ RPB circa centrum S moventis, velocitas in loco quovis P ſit ad velocitatem corporis, intervallo SP, circa idem centrum, Circulum deſcribentis in ſubduplicatâ ratione rectanguli $\frac{1}{2}$ L × SP ad SY quadratum.



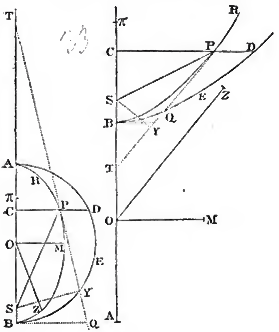
Eſt autem ex conicis ACB ad CPq ut 2AO ad L; ideoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicatâ ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad SY *quad.* Porro ex conicis, eſt CO ad BO ut BO ad TO (b); & compoſitè, vel diviſim, ut CB ad BT. Unde, vel dividendo, vel componendo, fit BO − vel + CO ad BO ut CT ad

IV. Cor. H. I.) Sed eadem quoque triangulis CSP, CSD. (El. VI. I.) Quare & ſectoribus hyperbolicis SPfB, SDEB inter ipſos ratio eadem intercedet. (El. V. 12.)

(b) Hamilton. Conic. Lib. I. XLVIII. XLIX.

BT,

De Motu Corporum



BT, id eſt, AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum figuræ RPB latitudo CP; ſic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum lineâ BC, lineaque SY cum lineâ BQ; & corporis, jam rectâ deſcendentis in lineâ CB, velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circulum deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad SYq, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad SYq) in ſubduplicatâ ratione AC ad AO ſive $\frac{1}{2}$AB. Q. E. D (c).

Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. Corpus ad datam à centro diſtantiam in circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam à centro diſtantiam.

PROP. XXXIV. THEOR. X.

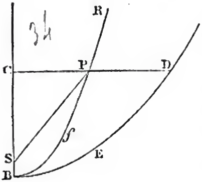
Si figura BED *Parabola eſt, dico, quòd corporis cadentis velocitas, in loco*

(c) ALITER.

Per centrum O ducatur OM, ſemiaxis ſecundus orbitæ RPB, et OZ, ſemidiameter ejus cum contingente TP parallela; & ſit m ad n ut velocitas corporis, circum umbilicum S in orbitâ RPB lati, in loco P, ad velocitatem corporis, circum centrum S ad diſtantiam SP, in circulo circumacti. Erit igitur m^2 ad n^2 ut rectangulum $\frac{1}{2}L \times SP$ ad quadratum ex SY (XVI. Cor. 9.) Jam verò rectangulum $\frac{1}{2}L \times SP$ ad quadratum ex SY rationem habet, quæ componitur è rationibus rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad quadratum ex SP, quadratique ex SP ad quadratum ex SY; ſive è rationibus rectæ $\frac{1}{2}L$ ad rectam SP, quadratique ex SP ad quadratum ex SY; ſive rurſum è rationibus rectæ $\frac{1}{2}L$ ad rectam SP, quadratique ex OZ ad quadratum ex OM. Eſt enim $SP^2 : SY^2 = OZ^2 : OM^2$ (Hamilton. Conic. Lib. II. 31.) Habet igitur m^2 ad n^2 rationem eam, quæ componitur è rationibus rectæ $\frac{1}{2}L$ ad SP, quadratique ex OZ ad quadratum ex OM; ſive eam, quæ eſt parallelepipedi $\frac{1}{2}L \times OZ^2$ ad parallelepipedon $\frac{1}{2}L \times AO \times SP$; rectangulum enim $\frac{1}{2}L \times AO$ quadrato ex OM æquale eſt.

loco quovis C, *æqualis eſt velocitati quâ corpus, centro* B, *dimidio intervalli ſui* BC, *circulum uniformiter deſcribere poteſt.* LIBER PRIMUS.

Nam corporis Parabolam RPB circa centrum S deſcribentis velocitas in loco quovis P (per Corol. 7. Prop. XVI.) æqualis eſt velocitati corporis, dimidio intervalli SP, circulum circa idem centrum S uniformiter deſcribentis. Minuatur parabolæ latitudo CP in infinitum eo, ut arcus parabolicus P*f*B cum rectâ CB, centrum S cum vertice B, & intervallum SP cum intervallo BC coincidat, & conſtabit propoſitio. Q. E. D.



PROP. XXXV. THEOR. XI.

Iiſdem poſitis, dico quòd area figuræ DES, *radio indefinito* SD *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.*

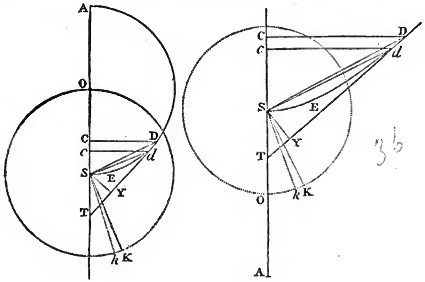
Nam concipe corpus C, quàm minimâ temporis particulâ, lineolam C*c* cadendo deſcribere, & interea corpus aliud K, uniformiter in circulo OK*k* circa centrum S gyrando, arcum K*k* deſcribere. Erigantur perpendicula CD, *cd* occurrentia figuræ DES in D, *d*. Jungantur SD, S*d*, SK, S*k*, & ducatur D*d* axi AS occurrens in T, & ad eam demittatur perpendiculum SY.

Caſ. 1. Jam ſi figura DES Circulus eſt vel Hyperbola rectangula, biſecetur ejus tranſverſa diameter AS in O, & erit SO dimidi-

eſt. Eſt autem $\frac{1}{2}$ L × OZ² : $\frac{1}{2}$ L × AO × SP = OZ² : AO × SP. Habet igitur m^2 ad n^2 rationem eam quam quadratum ex OZ ad rectangulum AO × SP. Capiatur Bπ = SP. Ita erit Aπ æqualis diſtantiæ puncti P ab altero curvæ RPB umbilico (Hamilton. Conic. Lib. II 14) ac propterea quadratum ex OZ rectangulo Bπ × πA æquale erit. (Hamilton. Conic. Lib. II. 19). Habebit igitur m^2 ad n^2 rationem eam quam rectangulum Bπ × πA ad rectangulum AO × SP; ſive, propter æquales Bπ, SP, eam quam recta Aπ habet ad rectam AO. Et quâcunque fuerit figura RPB latitudine, perinde obtinebit hæc proportionum ſimilitudo. Latitudine igitur illâ in infinitum imminutâ, ratio ultima illorum m^2, n^2 inter ipſa, ea erit, quæ rectæ mutabilis Aπ ad datam AO ultima quoque erit. Latitudine autem CP in infinitum imminutâ, ut puncta P, S tandem cum illis C, B coeant, punctum etiam π cum illo C coibit, & Aπ evadit ipſi AC æqualis. Ratio igitur ultima duorum m^2, n^2 ea rectæ AC ad AO ratio erit; unde ratio ultima m ad n, quæ eſt velocitatis corporis rectâ cadentis in loco C ad velocitatem corporis in circulo, radio SP, circumacti, hæc inquam ratio ejus quam AC habet ad AO ſubduplicata erit. Q. E. D.

De Motu Corporum

um lateris recti. Et quoniam eſt TC ad TD ut C*c* ad D*d*, & TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TC ad TS ut CD × C*c* ad SY × D*d*. Sed (per Corol. 1. Prop. XXXIII.) eſt TC ad TS ut AC ad AO, puta ſi in coitu punctorum D, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC eſt ad AO, ſeu SK, ut CD × C*c* ad SY × D*d*. Porro corporis deſcendentis velocitas in C eſt ad velocitatem corporis circulum, intervallo SC, circa centrum S, deſcribentis in ſubduplicatâ ratione AC ad AO, vel SK (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis circulum OK*k* in ſubduplicatâ ratione SK ad SC (per Corol. 6. Prop. IV.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola C*c* ad arcum K*k* in ſubduplicatâ ratione AC ad SC, id eſt in ratione AC ad CD. Quare eſt CD × C*c* æquale AC × K*k*, & propterea AC ad SK ut AC × K*k* ad SY × D*d*, indeque SK × K*k* æquale SY × D*d*, & $\frac{1}{2}$SK × K*k* æquale $\frac{1}{2}$SY × D*d*; id eſt area KS*k* æqualis areæ SD*d*. Singulis igitur temporis particulis gene-

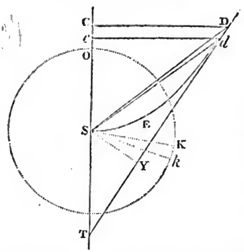


rantur arearum duarum particulæ KS*k*, & SD*d*, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV.) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. Q.E.D.

([d]) Hamilton. Conic. Lib. I. 47.

([e]) Quod ita ſcilicet effeceris, ſi arcum OK ſummæ arcûs AD rectæque DC æqualem ſumpſeris.

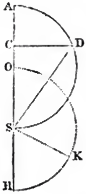
Caſ.



Caſ. 2. Quòd ſi figura DES Parabola ſit, invenietur eſſe ut ſupra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc eſt ut 2 ad 1 [d], ideoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale eſſe $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis eſt velocitati, quâ circulus intervallo $\frac{1}{2}$SC uniformiter deſcribi poſſit (per Prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio SK deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola Cc ad arcum Kk (per Corol. 6. Prop. IV.) eſt in ſubduplicatâ ratione SK ad $\frac{1}{2}$SC, id eſt, in ratione SK ad $\frac{1}{2}$CD. Quare eſt $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4} CD \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, hoc eſt, area KSk æqualis areæ SDd, ut ſuprà. Q. E. D.

PROP. XXXVI. PROB. XXV.

Corporis de loco dato A *cadentis determinare tempora deſcenſûs.*



Super diametro AS, diſtantiâ corporis à centro ſub initio, deſcribe ſemicirculum ADS, ut & huic æqualem ſemicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD. Junge SD, & areæ ASD æqualem conſtitue ſectorem OSK [e]. Patet per Prop. XXXV. quod corpus cadendo deſcribet ſpatium AC eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gyrando, deſcribere poteſt arcum OK. Q. E. F [f].

PROP. XXXVII. PROB. XXVI.

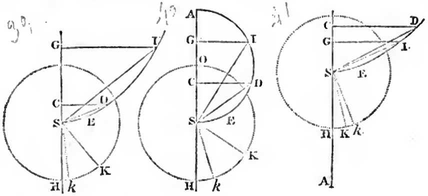
Corporis de loco dato ſurſum vel deorſum projecti definire tempora aſcenſûs vel deſcenſûs.

Exeat corpus de loco dato G ſecundum lineam GS cum veloci-

[f] *Cor. II.* Corpus igitur è loco A demiſſum, rectâ cadendo, eodem temporis ſpatio centrum uſque S pervenerit, quo corpus aliud circa centrum idem S motu æquabili ſemicirculum OKH abſolverit.

De Motu Corporum

tate quâcunque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum SG circa centrum S revolvi poſſet, cape GA ad $\frac{1}{2}$AS. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum A infinitè diſtat, quo caſu Parabola vertice S, axe SG, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per Prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major eſt quàm 2 ad 1, priore caſu circulus, poſteriore hyperbola rectangula ſuper diametro SA deſcribi debet. Patet per Prop. XXXIII (g). Tum centro S, intervallo æquante dimidium lateris



recti, deſcribatur circulus HkK, & ad corporis deſcendentis vel aſcendentis locum G, & locum alium quemvis C, erigantur perpendicula GI, CD occurrentia conicæ ſectioni vel circulo in I ac D.

(g) Nimirum recta GS, quâ corpus centrum verſus cadit, vel aſcenſu recto centrum fugit, pro ultimâ figurâ ſectionis conicæ habenda eſt, quæ umbilicum habeat S, axem verò ſuum in rectâ GS poſitum, ſi manente utique latere tranſverſo, latere autem recto in infinitum imminuto, ſectio illa conica ſenſim evaneſcat. Hoc enim è Prop. XXXII^a. efficitur. Quòd ſi velocitas corporis, rectâ cadentis vel aſcendentis, in loco quovis G, ad velocitatem corporis, circa centrum S ad diſtantiam SG motu æquabili circulum ſcribentis, rationem habeat eam, quæ ſubduplicata ſit ejus quam binarius ad unitatem, pro ultimâ evaneſcentis Parabolæ figurâ habenda eſt recta SG; pro Ellipſeos autem evaneſcentis ultimâ, ſi minor ſit velocitas illa prima; pro ultimâ denique Hyperbolæ, ſi major, quàm pro ratione binarii ad unitatem ſubduplicatâ. Hæc enim Propoſitionibus XXXIII^a & XXXIV^a. oſtenſa ſunt. Quamobrem ad hujus Problematis ſolutionem vel Parabola vel Circulus vel Hyperbola æquilateralis, pro variâ velocitatum ratione, uſurpanda eſt, quemadmodum à Newtono præceptum eſt. *Eadem fere Le Seur & Jacquier.*

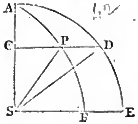
(h) Nam ſi viribus iſtiuſmodi centripetis ſollicitatum corpus aliquod rectâ non cadat, id utique per Ellipſin deferetur, cujus Ellipſeos centrum ipſum virium centrum erit (per Prop. X. Cor. 1.) Sit APF ellipſis illa, & centrum ejus ſit S, ſemiaxis SA. Et per P, locum quemvis corporis per ellipſin lati, ad axem SA agatur ad perpendiculum recta PE, quæ circulo, qui centro A radio SA ſcriptus fuerit, in D occurrat. Junctis. SP, SD, ſector ASD ſectoris elliptici ASP, atque propterea temporis proportionem ſervabit. (Lemma IX. Cor. II.) Et manente ſemiaxe SA, ſi latitudo ellipſeos infinitè minuatur, manebit tamen ſectori ASD temporis proportio. Quare cum circulorum ſectores arcuum,

D. Dein junctis SI, SD, fiant ſegmentis SEIS, SEDS ſectores HSK, HSk æquales, & per Prop. XXXV. corpus G deſcribet ſpatium GC eodem tempore quo corpus K deſcribere poteſt arcum Kk. Q. E. F. LIBER PRIMUS.

PROP. XXXVIII. THEOR. XII.

Poſito quòd vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum à centro; dico, quòd cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpectivè proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A ſecundum rectam AS; & centro virium S, intervallo AS, deſcribatur circuli quadrans AE, ſitque CD ſinus rectus arcûs cujuſvis AD; & corpus A, tempore AD, cadendo deſcribit ſpatium AC, inque loco C acquiret velocitatem CD.



Demonſtratur eodem modo ex Propoſitione X. quo Propoſitio XXXII. ex Propoſitione XI. demonſtrata fuit (h).

Corol. 1. Hinc æqualia ſunt tempora, quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem ADE.

cuum, quibus inſiſtunt, inter ſe proportionem gerant, arcus quoque AD, temporis quo conficitur arcus ellipſeos AP proportionem ſervabit, idque quæcunque fuerit ellipſeos latitudo. Quare & latitudine illâ in nihilum abeunte, & arcu AP cum rectâ AC congruente, arcus circularis AD temporis caſûs recti per AC proportionem ſervabit. Q. E. D.

Arcus igitur AD temporum caſûs recti inter ſe proportiones ſervare eodem ex Prop. xª. ejuſque corollario oſtenſum eâ modo, quo propoſitio poſt triceſimam ſecunda ex propoſitione undecimâ oſtenſa fuit.

Quod præterea verò Newtonus dicit, arcuum AD ſinus rectos, CD, velocitatum, quas corpus in locis C adeptum fuerit, proportiones inter ſe ſervare, id nos ſic oſtendimus.

Si per orbes ADE, APE quorum communis eſt axis tranverſus SA corpora duo deferantur è vertice A ſimul digreſſa, vigente, qualis poſita eſt, virium centralium lege; arcus AD, AP à corporibus ſimul abſolventur, quæcunque ſuerit orbis interioris latitudo (Prop. X. Cor. II.) Quare & latitudine illâ infinitè imminutâ, eodem tempore abſolvetur arcus AD, quo recta AC caſu recto. Erit igitur velocitas corporis rectâ cadentis, in loco C, ad velocitatem æquabilem corporis, in circulo ADE circumacti, ſicut fluxio ſinûs verſi AC ad fluxionem arcûs AD, ſive ut ſinus rectus CD ad datam SD, circuli utique radium. (Tom I. Excerpt. IV. Not. k. Cor.) Expoſitâ igitur datâ quâdam recta V, ſit v alia recta, eâ quidem lege mutabilis, ut ad datam V eam ſemper illa rationem habeat, quam velocitas corporis rectâ cadentis in loco quovis C ad datam corporis in circulo circumacti velocitatem. Erit igitur $v : V = CD : SD$. Et permutando $v : CD = V : SD$. Datarum verò V, SD inter ſe ratio data. Quare et mutabilium, v, CD, ratio tamen data erit.



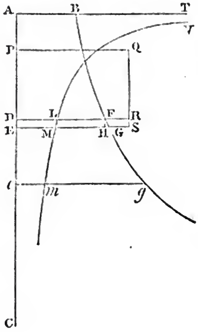
De Motu Corporum

Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. IV.) æquantur.

PROP. XXXIX. PROB. XXVII.

Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: et contrà.

De loco quovis A in rectâ ADEC cadat corpus E, deque loco ejus E erigatur ſemper perpendicularis EG, vi centripetæ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: ſitque BFG linea curva, quam punctum G perpetuò tangit. Coincidat autem EG ipſo motûs initio cum perpendiculari AB, & erit corporis velocitas, in loco quovis E, ut recta, quæ poteſt aream curvilineam ABGE. Q. E. I.



In EG capiatur EM rectæ, quæ poteſt aream ABGE, reciprocè proportionalis, & ſit VLM linea curva, quam punctum M perpetuò tangit, & cujus Aſymptotos eſt recta AB producta; & erit tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineam AE, ut area curvilinea ABTVME. Q. E. I.

Etenim in rectâ AE capiatur linea quàm minima, DE, datæ longitudinis; ſitque DLF locus lineæ EMG, ubi corpus verſabatur in D; & ſi ea ſit vis centripeta, ut recta, quæ poteſt aream ABGE, ſit ut deſcendentis velocitas; erit area ipſa in duplicatâ ratione velocitatis: id eſt, ſi pro velocitatibus in D & E, ſcribatur V & V+I, erit area ABFD ut VV,

(1) Namque *puta* A, P *eſſe loca à quibus ſi caſum unumquodque ſuum duo corpora inchoaverint, alterum*

VV, & area ABGE ut $VV + 2VI + II$; & diviſim, area DFGE ut $2VI + II$; ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI \times II}{DE}$; id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Eſt autem tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineolam DE, ut lineola illa directè & velocitas V inverſè; eſtque vis ut velocitatis incrementum I directè & tempus inverſè, ideoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo DF. Ergo vis ipſi DF, vel EG, proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate deſcendat, quæ ſit ut recta quæ poteſt aream ABGE. Q. E. D.

Porro cùm tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE deſcribatur, ſit ut velocitas inverſè, ideoque inverſè ut linea recta quæ poteſt aream ABFD; ſitque DL, atque ideo area naſcens DLME, ut eadem linea recta inverſè: erit tempus ut area DLME, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea AE deſcribitur ut area tota ATVME. Q. E. D.

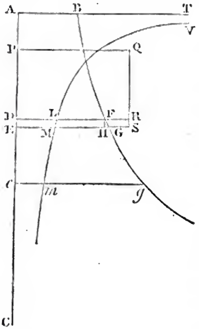
Corol. 1. Si P ſit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquiſivit eodem loco D; & in perpendiculari DF capiatur DR, quæ ſit ad DF, ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, & compleatur rectangulum PDRQ, eique æqualis abſcindatur area ABFD; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque ([i]) completo rectangulo DRSE, cùm ſit area ABFD ad aream DFGE ut VV ad 2VI, ideoque ut $\frac{1}{2}V$ ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area PQRD ad aream DRSE ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ DF, DR, ideoque ut areæ naſcentes DFGE, DRSE; erunt ex æquo areæ totæ ABFD, PQRD ad invicem ut ſe-

terum quidem vi inæquabili alterum verò æquabili incitatum, in loco D *æquales velocitates adepta fuerint.* Tum completo, &c.

miſſes

miſſes totarum velocitatum (k); & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunque D datâ cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut eſt recta, quæ poteſt rectangulum PQRD areâ curvilineâ DF*ge* vel auctum, ſi locus *e* eſt loco D inferior, vel diminutum, ſi is ſuperior eſt, ad rectam quæ poteſt rectangulum ſolum PQRD.



Corol. 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam *em* reciprocè proportionalem lateri quadrato ex PQRD + vel − DF*ge*, & capiendo tempus, quo corpus deſcripſit lineam D*e*, ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea DL*me* ad rectangulum 2PD × DL. Namque tempus, quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam PD, eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam PE, in ſubduplicatâ ratione PD ad PE, id eſt (lineolâ DE jamjam naſcente) in ratione PD ad PD+½DE, ſeu 2PD ad 2PD+DE; & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam DE ut 2PD ad DE, ideoque ut rectangulum 2PD×DL ad aream DLME; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam D*e*, ut area DLME ad aream DL*me*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum 2PD×DL ad aream DL*me*.

SECTIO

(k) Corporum quæ à locis A, P demiſſa fuerint, quorum illud vi inæquabili, hoc æquabili, incitari poſſumus, eorum in loco D velocitates literæ V, *v* deſignent. Literæ autem I, *i* velocitatum V, *v* incrementa deſignent ſimul genita. Jam conferendo primas quantitatum naſcentium rationes,

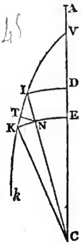
SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.

PROP. XL. THEOR. XIII.

Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectâ aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Deſcendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C; & moveatur corpus aliud à V in lineâ curvâ VIK*k*. Centro C, intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici DI, EK, rectæ AC in D & E, curvæque VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipſi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; ſitque circumferentiarum circulorum intervallum, DE vel IN, quàm minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam diſtantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & ſi vis una IN (per legum Corol. 2.) reſolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo ſecundum lineam NT corporis curſui ITK perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus à curſu rectilineo, facietque ipſum de orbis tangente perpetuò deflectere, inque viâ curvilineâ ITK*k* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera, IT, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quàm minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Proinde corporum in D & I accelerationes, æqualibus temporibus factæ, ſi ſumantur linearum naſcentium



rationes, erit area ABFD ad aream DFGE ut VV ad 2I × V (per hanc propoſitionem) ſive ut $\frac{1}{2}$ V ad I. Erit autem area DFGE ad aream DRSE ut DF ad DR, hoc eſt ut I ad *i*. Rurſum erit area DRSE ad aream PQRD ut 2*i* × *v* ad *vv* (per hanc propoſitionem) hoc eſt ut *i* ad $\frac{1}{2}$ *v*. Ex æquo igitur area ABFD erit ad aream PQRD ut $\frac{1}{2}$ V ad $\frac{1}{2}$ *v*.

De Motu Corporum

DE, IN, IK, IT, NT rationes primæ, ſunt ut lineæ DE, IT: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE & IK deſcribuntur, ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ DE & IK; ideoque accelerationes, in curſu corporum per lineas DE & IK, ſunt ut DE & IT, DE & IK conjunctim, id eſt ut DE *quad.* & IT×IK *rectangulum.* Sed *rectangulum* IT×IK æquale eſt IN *quadrato* (l), hoc eſt, æquale DE *quad.* & propterea accelerationes in tranſitu corporum à D & I ad E & K æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in E & K: & eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. Q. E. D.

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter à centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

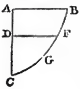
Corol. 1. Hinc ſi corpus vel oſcilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politiſſimo & perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ aſcendat vel deſcendat, ſintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo, vel impedimento vaſis abſolutè lubrici, idem præſtatur, quod vi tranſverſâ NT. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantùm cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima à centro diſtantia, ad quam corpus, vel oſcillans, vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitque quantitas A diſtantia corporis à centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index

$n-1$

(l) Propter angulos INK, NTK rectos.

(m) Nempe cùm ea ſit lex vis centripetæ, ut ad quamlibet à centro diſtantiam, literâ A ſignificatam, vis illius efficacia ſit ut A^{n-1}, literâ utique n numerum deſignante; Curva BFG Propoſitionis XXXIX. per ipſum virium centrum C tranſibit, ut in figurâ appoſitâ. Ponatur igitur CA rectæ P æqualis, ſitque CD æqualis indefinitæ A. Eductiſque AB, DF ad perpendiculum, velocitas corporis rectâ cadentis vel aſcendentis in loco D erit ut recta quæ poteſt aream ADFB, hoc eſt, ut $\sqrt{ADFB}$ ſive ut $\sqrt{CAB-CDF}$; eſt enim area ADFB duarum CAB, CDF differentia. Jam verò cùm DF ſit ut vis centripeta in loco D, erit



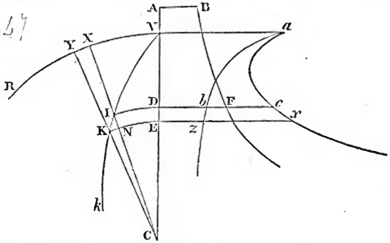
DF

$n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. Namque velocitas rectâ aſcendentis ac deſcendentis (per Prop. XXXIX.) eſt in hâc ipſâ ratione (b). LIBER PRIMUS.

PROP. XLI. PROB. XXVIII.

Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum C, & invenienda ſit trajectoria VIK*k*. Detur circulus VR, centro C, intervallo quovis, CV, deſcriptus; centroque eodem deſcribantur alii quivis circuli ID, KE trajectoriam ſecantes in I & K, rectamque CV in D & E. Age tum



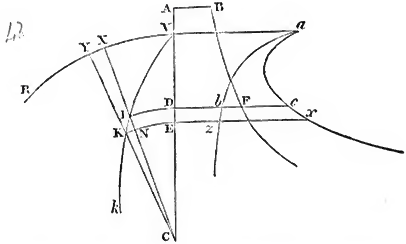
rectam CNIX ſecantem circulos KE, VR in N & X, tum rectam CKY occurrentem circulo VR in Y. Sint autem puncta I & K ſibi in-

DF ut CD^{n-1}. Quare fluxio areæ CDF erit ut $CD^{n-1} \times \dot{CD}$. Quare area CDF erit ut $\frac{1}{n} CD^n$ (Geometr. Flux. Th. IV.) Ac propterea area CAB erit ut $\frac{1}{n} CA^n$. Et ADFB ut $\frac{1}{n} \overline{CA^n - CD^n}$ ſive ut $\frac{1}{n} \overline{P^n - A^n}$ ſive denique dato numero n, ut $\overline{P^n - A^n}$. Quare velocitas corporis rectâ cadentis vel aſcendentis, in loco D, erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$.

vicem

De Motu Corporum

vicem viciniſſima, & pergat corpus ab V per I & K ad *k*; ſitque punctum A locus ille, de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in I. Et ſtantibus quæ in Propoſitione XXXIX, lineola IK, dato tempore quàm minimo deſcripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ poteſt aream ABFD; & triangulum ICK tempori proportionale dabitur; ideoque KN erit reciprocè ut altitudo IC, id



eſt, ſi detur quantitas aliqua Q, & altitudo IC nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius Q, ut ſit in aliquo caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut eſt

IK

(c) Per El. VI. 20. Nimirum cùm figuræ evaneſcentes CXY, CNK ſint ultimò inter ſe ſicut figuræ ſimiles, quarum CX, CN ſunt latera homologa.

(d) Nempe per quadraturam curvæ VD*ba*, quærendo abſciſſam axis VD, quæ datæ areæ longitudo eſt.

( ) Datâ enim VD dabitur areæ curvæ *a*VD*c* quæ datam habet abſciſſam VD, cujuſque ordinata D*c* datam aliquam relationem ad abſciſſam habet.

(f) ALITER.

Sint VC*b*, ICK ſectores orbitæ, qui motu corporis temporibus æqualibus conficiuntur, & à punctis *k*, K in rectas CV, CI deducantur ad perpendiculum *bl*, K*n*. Sectores VC*b*, ICK, temporibus æqualibus confecti, inter ſe æquales erunt (Prop. I.) Temporibus verò quibus conficiuntur infinitè imminutis, ita tamen ut maneant ſemper inter ſe æqualia, ſectores etiam manebunt ſemper inter ſe æquales. Unde et evaneſcentium ultima inter ipſos ratio æqualitas erit. Sectores autem illi evaneſcentes cum rectangulis CV × *bl*, CI × K*n*, quorum utique dimidiis ultimò æquales fiunt, proportione ultimò convenient. Rectangula igitur illa fiunt ultimò inter ſe æqualia. Recta V*a*, à puncto V ad perpendiculum cum rectâ CA educta, curvæ BFG in L occurrat. Exponantur rectæ UQ, RS; quarum illa UQ ea ſit quæ poſſit aream ABLV, altera verò RS

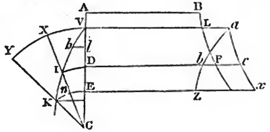
6

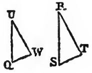
poſſit

IK ad KN; & erit in omni caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN, & ABFD ad ZZ ut IK*q* ad KN*q*, & diviſim ABFD−ZZ ad ZZ ut IN *quad.* ad KN *quad.* ideoque $\sqrt{ABFD-ZZ}$ ad Z, ſeu $\frac{Q}{A}$, ut IN ad KN, & propterea A×KN æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Unde cùm YX×XC ſit ad A×KN ut CX*q* ad AA (c), erit rectangulum XY×XC æquale. $\frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Igitur ſi in perpendiculo DF capiantur ſemper D*b*, D*c* ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$, $\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$ æquales reſpectivè, & deſcribantur Curvæ lineæ *ab*, *ac*, quas puncta *b*, *c* perpetuò tangunt; deque puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum V*a*, abſcindens areas curvilineas VD*ba*, VD*ca*, & erigatur etiam ordinatæ E*z*, E*x*: quoniam rectangulum D*b*×IN, ſeu D*bz*E, æquale eſt dimidio rectanguli, A×KN, ſeu triangulo ICK; & rectangulum D*c*×IN ſeu D*cx*E æquale eſt dimidio rectanguli YX×XC, ſeu triangulo XCY: hoc eſt, quoniam arearum VD*ba*, VIC æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ D*bz*E, ICK, & arearum VD*ca*, VCX æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ D*cx*E, XCY; erit area genita VD*ba* æqualis areæ genitæ VIC, ideoque tempori proportionalis, & area genita VD*ca* æqualis ſectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco V, dabitur area ipſi proportionalis VD*ba*, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI (d); & area VD*ca*, eique æqualis ſector VCX unà cum ejus angulo VCI (e). Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I, in quo corpus, completo illo tempore, reperietur. Q. E. I (f).

Corol.

poſſit aream ABFD. Erit igitur UQ ad RS ut velocitas corporis in loco V ad velocitatem ejus in loco I (Prop. XXXIX & XL.) Conſtituantur anguli QUW, SRT angulis *b*VC, KI*n*, quibus rectæ





CV, CI ad curvam in punctis, V, K inclinentur, ſingulatim æquales. Et à punctis Q, S, in rectas UW, RT demittantur ad perpendiculum QW, ST. Ita efformata erunt triangula rectangula UWQ,

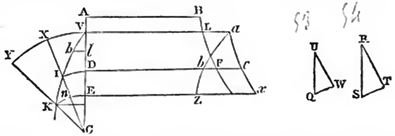
RTS,

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id eſt, apſides trajectoriarum expeditè inveniri poſſunt. Sunt enim apſides puncta illa, in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam VIK: id quod fit, ubi rectæ IK & NK æquantur, ideoque ubi area ABFD æqualis eſt ZZ.

Corol. 2. Sed & angulus KIN, in quo trajectoria alicubi ſecat lineam illam IC, ex datâ corporis altitudine IC expeditè invenitur; nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut KN ad IK, id eſt, ut Z ad latus quadratum areæ ABFD.

Corol.

RTS, ad quorum utique ſimilitudinem figuræ evaneſcentes V*lb*, INK ultimò accedent. Erit igitur ultimò V*b* ad *bl* ut UQ ad QW, necnon IK ad K*n* ut RS ad ST. Arcus autem evaneſcens V*b* ad evaneſcentem IK erit ultimò ut velocitas corporis in loco V ad velocitatem corporis in loco I; nimirum cùm arcus illi temporibus æqualibus conficiuntur. Arcus igitur evaneſcens V*b* ad evaneſcentem IK erit ultimò ut recta UQ ad rectam RS. (El. V. 11.) Cùm igitur ſit *bl* ad V*b* ultimò ut WQ ad QU, & V*b* ad IK ultimò ut UQ ad RS, atque rurſum IK ad K*n* ultimo ut RS ad ST, ex æquo erit *bl* ad K*n* ultimo ut QW ad ST. Quare & ratio illa quæ componitur è ratione rectæ VC ad rectam IC, atque eâ quæ ultima eſt evaneſcentis *bl* ad evaneſcentem K*n*, hæc eadem componetur è rationibus rectæ CV ad rectam IC, rectæque QW ad rectam ST. Hoc eſt, ratio ultima rectanguli evaneſcentis CV × *bl*, ad evaneſcens IC × K*n* eadem erit, quæ rectanguli VC × QW ad



rectangulum IC × ST. Fiunt autem evaneſcentia illa ultimò quidem inter ſe æqualia; id enim jam ſuprà oſtendimus. Quare & rectangula CV × QW, CI × ST erunt inter ſe æqualia. Si igitur in rectâ DF capiatur longitudo D*b*, ea utique quæ oritur applicando rectangulum CV × QW ad duplam rectam RT; atque rurſum longitudo D*c*, quæ habeat ad D*b* rationem eam quam quadratum ex CV ad quadratum ex CI, tum ſi ducantur curvæ *abz*, *acx*, ad quas collocentur ſemper puncta *b*, *c*; erit area quidem V*ab*D ſectori orbitæ VCI, area autem V*ac*D ſectori circulari VCX æqualis. Quod ſic oſtendo. Rectangulum $\overline{\text{D}b \times 2\text{RT}}$ cùm æquale ſit rectangulo CV × QW, ita enim factum eſt, idem rectangulo IC × ST æquale erit. Quare D*b* : IC = ST : 2RT, & D*b* : $\frac{1}{2}$IC = ST : RT. Quare cùm ST ſit ad RT ut K*n* ad I*n* ultimò erit D*b* : $\frac{1}{2}$IC = K*n* : I*n* ultimò. Quare rectangulum evaneſcens D*b* × I*n* triangulo evaneſcenti CIK ſit ultimò æquale. Sed fluxio areæ V*ab*D ad fluxionem areæ VCI rationem habet eam, quæ ultima eſt evaneſcentis rectanguli D*b* × I*n* ad evaneſcens triangulum CIK. Fluxiones igitur illæ ſunt inter ſe æquales. Quare & fluentes, areæ nimirum ipſæ V*ab*D, VCI, cùm in loco V ſimul à nihilo generari inceperint, inter ſe æquales erunt. Præterea cùm ſit D*c* ad D*b* ut quadratum ex CV ad quadratum ex CI, cùm ſit etiam fluxio areæ V*ac*D ad fluxionem areæ V*ab*D ut D*c* ad D*b*, & fluxio ſectoris VCX ad fluxionem ſectoris VCI ut quadratum ex VX vel VC ad quadratum ex CI, idcirco erit $\overline{\dot{\text{V}ac\text{D}}} : \overline{\dot{\text{V}ab\text{D}}} = \overline{\dot{\text{VCX}}} : \overline{\dot{\text{VCI}}}$ (per El. V. 11.) Sed oſtenſæ ſunt $\overline{\dot{\text{V}ab\text{D}}}$, $\overline{\dot{\text{VCI}}}$ inter ſe æquales. Quare & $\overline{\dot{\text{V}ac\text{D}}}$, $\overline{\dot{\text{VCX}}}$ inter ſe æquales erunt. (El. V. 14.) Quare & fluentes, areæ nimirum ipſæ V*ac*D, VCX (cùm in loco V ſimul à nihilo generari inceperint) inter ſe æquales erunt. (Geometr. Flux. Th. II.)

Hàc

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V deſcribatur ſectio quælibet conica VRS, & à quovis ejus puncto R agatur tangens RT occurrens axi infinitè producto CV in puncto T; dein, junctâ CR, ducatur recta CP, quæ æqualis ſit abſciſſæ CT, angulumque VCP ſectori VCR proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo diſtantiæ locorum à centro reciprocè proportionalis, & exeat corpus de loco V juſtâ cum velocitate ſecundum lineam rectæ CV perpendicularem: progredietur corpus illud in trajectoriâ VPQ, quam punctum P perpetuò tangit;

Hâc ratione ſectores VCI, VCK in areas tranſmutantur quæ ordinatis ad perpendiculum erectis, rectam VD, datæ utique diſtantiæ V & indefinitæ CD differentiam, longitudinem habent. Unde ſi ordinatæ D*b*, D*c* ad abſciſſam VD certas aliquas relationes gerant, Curvæ *abz*, *acx* per Newtoni inventa quadraturæ ſubjicientur: per earum vero quadraturas, vel invenientur Curvæ per quas corpora deferentur, vel, ſi datæ ſint curvæ illæ, dabuntur etiam tempora quibus data datarum curvarum ſpatia corpora abſolverint.

Primùm enim ſi datum ſit temporis ſpatium quo corpus aliquod è dato loco V egreſſum ad alium ignotum locum I orbitæ non datæ pervenerit, locus ille I hâc ratione inveniendus erit. Ex dato temporis ſpatio dabitur area *a*VD*b* magnitudine; hujus igitur baſis VD dabitur. (Analyſ. per Æquationes Infinitas, C. XI. Sect. 2.) Datâ autem VD dabitur area VD*ca* (ope Libri de Quadraturâ Curvarum). Huic areæ æqualis eſt ſector VCX, cujus etiam radius VC magnitudine & poſitione datus eſt (id enim poſuimus). Dato autem ſectore VCX, dabitur angulus VCX. Quare recta CX poſitione data; ſed CI magnitudine; cùm datarum VC, VD differentiæ CD æqualis ea ſit. Punctum igitur I datum. Datiſque aliis temporibus, dabuntur alia curvæ VIK puncta; datiſque pluribus punctis, quorum major tamen deſiderabitur numerus prout Curva genere elatior fuerit, ipſa tandem Curva poſitione dabitur.

E contrario ſi Curva VIK poſitione data ſit, tempora quibus corpus aliquod data ejus ſpatia confecerit, hâc ratione invenientur. Datis punctis V, I, propter datum C, dabuntur CV, CI, magnitudine. Quare illarum differentia VD dabitur. Datâque abſciſſâ VD, è naturâ curvæ *abz*, area ejus V*ab*D dabitur; cui æqualis eſt ſector VCI. Sector igitur VCI magnitudine datus erit. Si præterea detur punctum K, ſector VCK, per quadraturam curvæ *abz*, magnitudine datus erit. Unde ſi detur tempus, quo alterum è ſectoribus illis confectum fuerit, tempus, quo alterum etiam conficietur, datum erit. Vel ſi temporum illorum neutrum detur, ratio tamen, quæ illis mutuò intercedit, innoteſcet.

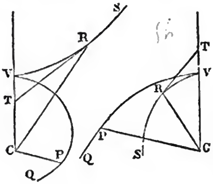
Cæterum curvarum *abz*, *acx* ordinatæ D*b*, D*c* ad abſciſſam VD relationes habent hiſce ferè formulis oſtenſas.

Datum rectangulum $CV \times QW$ nota q^2 deſignet, diſtantiam indefinitam CI litera A, rectamque $\frac{q^2}{A}$ litera Z. Jam cùm rectangula $TC \times ST$, $CV \times QW$, inter ſe æqualia ſint (id enim oſtenſum), erit $ST = \frac{q^2}{A} = Z$. Sed $RS = \sqrt{ABFD}$ (ita enim factum eſt). Unde in triangulo RTS, cujus angulus ad T rectus, $RT = \sqrt{ABFD - ZZ}$. Ergo D*b*, quæ facta eſt $\frac{CV \times QW}{2RT} = \frac{q^2}{2RT}$, hæc inquam $Db = \frac{q^2}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Rurſum cùm facta ſit D*c* ad D*b* ut CV^2 ad CI^2, crit $Dc = \frac{Db \times CX^2}{CI^2}$. Hoc eſt $Dc = \frac{q^2 \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Quæ ſane formulæ haud aliâ re à Newtonianis abſunt, niſi quòd pro litera ejus Q notam q^2 poſuerim, ut ſuperficiem ſcilicet apertiùs ſignificarem. Verùm illæ D*b*, D*c* ſimpliciùs quidem, neque ad computandi utilitates minùs ut opinor accommodatè, hiſce formulis indicantur: $Db = \frac{q^2}{2RT}$. $Dc = \frac{CV^2}{CI^2} \times \frac{q^2}{2RT}$.

ideoque

De Motu Corporum

ideoque ſi conica ſectio VRS Hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: ſin ea Ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuò & abibit in infinitum. Et contrà, ſi corpus quâcunque cum velocitate exeat de loco V, & perinde ut incœperit vel obliquè deſcendere ad centrum, vel ab eo obliquè aſcendere, figura VRS vel Hyperbola ſit vel Ellipſis, inveniri poteſt trajectoria, augendo vel minuendo angulum VCP in datâ aliquâ ratione. Sed &, vi centripetâ in centrifugam verſâ, aſcendet corpus obliquè in trajectoriâ VPQ, quæ invenitur, capiendo angulum VCP ſectori elliptico VRC proportionalem, & longitudinem CP longitudini CT æqualem, ut ſuprà. Conſequuntur hæc omnia ex propoſitione præcedente, per Curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem, ut ſatis facilem, brevitatis gratiâ miſſam facio (g).



PROP. XLII. PROB. XXIX.

Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum datam rectam egreſſi.

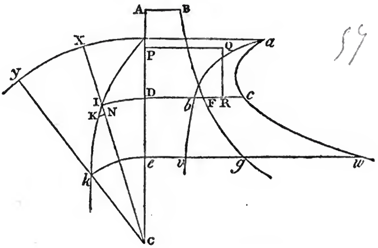
Stantibus quæ in tribus propoſitionibus præcedentibus: exeat corpus de loco I ſecundum lineolam IK, eâ cum velocitate, quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco P cadendo acquirere poſſet in D: ſitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in I, ut DR ad DF. Pergat autem corpus verſus *k*; centroque C, & intervallo C*k* deſcribatur circulus, *ke*, occurrens rectæ PD in *e*, & erigantur curvarum BF*g*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo PDRQ, datâque lege vis centripetæ, quâ corpus primum agitatur, datur curva linea BF*g*, per conſtructionem Problematis XXVII. & ejus Corol I. Deinde ex dato angulo CIK datur proportio naſcentium

IK,

(g) Vide Librum Noſtrum *De Viribus Centralibus quæ rationem triplicatæ diſtantiarum contrariam inter ſe conſtanter ſervant.*

(h) *Efficiendum*

IK, KN; & inde, per conſtructionem Prob. XXVIII. datur quantitas Q, unà cum curvis lineis *abv*, *acw*: ideoque, completo tempore quovis D*bve*, datur tum corporis altitudo C*e* vel C*k*, tum



area D*cwe*, eique æqualis ſector XC*y*, angulusque IC*k*, & locus *k* in quo corpus tunc verſabitur. Q. E. I.

Supponimus autem in his propoſitionibus vim centripetam, in receſſu quidem à centro, variari ſecundum legem quamcunque, quam quis imaginari poteſt; in æqualibus autem à centro diſtantiis, eſſe undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apſidum.

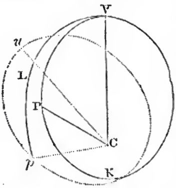
PROP. XLIII. PROB. XXX.

Efficiendum eſt ([a]) *ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quieſcente.*

([a]) *Efficiendum eſt.* i. e. Definienda eſt vis centripeta, quâ efficiatur illud; datâ nimirum lege vis centripetæ quâ corpus urgetur in orbitâ quieſcente.

DE MOTU CORPORUM

In orbe VPK poſitione dato revolvatur corpus P pergendo à V verſus K. A centro C agatur ſemper C*p*, quæ ſit ipſi CP æqualis, angulumque VC*p* angulo VCP proportionalem conſtituat; & area, quam linea C*p* deſcribit, erit ad aream VC*p*, quam linea CP ſimul deſcribit, ut velocitas lineæ deſcribentis C*p* ad velocitatem lineæ deſcribentis CP; hoc eſt, ut angulus VC*p* ad angulum VCP, ideoque in datâ ratione, & propterea tempori proportionalis. Cùm area tempori proportionalis ſit, quam linea C*p* in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt, quòd corpus, cogente juſtæ quantitatis vi centripetâ, revolvi poſſit unà cum puncto *p* in curvâ illâ lineâ, quam punctum idem *p*, ratione jam expoſitâ, deſcribit in plano immobili. Fiat angulus VC*u* angulo PC*p*, & linea C*u* lineæ CV, atque figura *u*C*p* figuræ VCP æqualis; & corpus in *p* ſemper exiſtens movebitur in perimetro figuræ revolventis *u*C*p*, eodemque tempore deſcribet arcum ejus, *up*, quo corpus aliud P arcum ipſi ſimilem & æqualem, VP, in figurâ quieſcente VPK deſcribere poteſt. Quæratur igitur, per Corollarium quintum Propoſitionis VI. vis centripeta, quâ corpus revolvi poſſit in curvâ illâ lineâ, quam punctum *p* deſcribit in plano immobili, & ſolvetur Problema (b). Q. E. F.



PROP.

(b) ANALYSIS PROBLEMATIS.

CORPUS quodpiam viribus centripetis, quæ centrum C reſpiciant, incitatum feratur per orbitam quandam immobilem VPK. Circum centrum immobile C converti intelligatur figura *u*C*p* immobilis illius, VCP, per omnia ſimilis et æqualis. Et per Curvam mobilem *up* ferri intelligatur corpus quoddam, eâ quidem lege, ut orbitæ ſuæ mobilis ſectorem quemvis *u*C*p* eodem tempore abſolvat, quo corpus primum ſimilem & æqualem orbitæ ſuæ immobilis VCP ſectorem. Vel quod eodem redit, poſitis rectis VC, *u*C æqualibus, item angulis VCP, *u*C*p*; corpora quæ ex punctis V, *u*, ipſo motûs initio congruentibus, exierint, loca P, *p* orbitæ unumquodque ſuæ ſimul appuliſſe intelligantur. Datâ lege vis centripetæ, quâ corpus retineatur in orbitâ immobili VPK, conſtituenda eſt lex vis alterius, quæ cùm idem centrum C reſpiciat, motum corporis, qualem perſcripſimus, in orbitâ mobili præſtare poſſit.

Sit VL*p* linea illa curva, quam corpus in orbitâ mobili latum, motu compoſito, proprio utique in orbita, orbitæque circum centrum, in plano immobili ſcripſerit. Areæ igitur VC*p*, VCP, quas

corpora

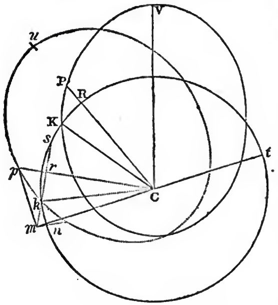
PROP. XLIV. THEOR. XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quieſcente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri poſſunt, eſt in triplicatâ ratione communis altitudinis inverſè.

Partibus orbis quieſcentis, VP, PK, ſunto ſimiles & æquales orbis revolventis partes *up*, *pk*; & punctorum, P, K, diſtantia intelligatur eſſe quàm minima. A puncto *k* in rectam *p*C demitte perpendiculum *kr*, idemque produc ad *m*, ut ſit *mr* ad *kr* ut angulus VC*p* ad angulum VCP. Quoniam corporum altitudines, PC & *p*C, KC, & *k*C, ſemper æquantur; manifeſtum eſt, quòd linearum PC & *p*C incrementa vel decrementa ſemper ſint æqualia; ideoque ſi corporum, in locis P & *p* exiſtentium, diſtinguantur motus ſinguli (per legum Corol. 2.) in binos, quorum hi verſus centrum, ſive ſecundum lineas, PC, *p*C, determinentur, & alteri prioribus tranſverſi ſint, & ſecundum lineas ipſis PC, *p*C perpendiculares directionem habeant; motus verſus centrum erunt æquales, & motus tranſverſus corporis *p* erit ad motum tranſverſum corporis P, ut motus angularis lineæ *p*C ad motum angularem lineæ PC, id eſt, ut angulus VC*p* ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu ſuo utroque pervenit ad punctum K, corpus *p*, æquali in centrum motu, æqualiter movebitur à *p* verſus C; ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ *mkr*, quæ per punctum *k* in lineam *p*C perpendicularis eſt; & motu tranſverſo acquiret diſtantiam à lineâ *p*C, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum P acquirit à lineâ PC, ut

corpora viribus centrum C reſpicientibus ſollicitata in plano immobili ſimul confecerint, datam inter ſe rationem gerent (per Prop. I[a]. hujus Libri). Quare & earum fluxionibus eadem data ratio intercedet. (Geom. Flux. Th. IV.) Sed propter radios CP, C*p* inter ſe æquales, arearum atque angulorum VC*p*, VCP fluxionibus eadem inter ipſas ratio erit. Angulorum igitur VC*p*, VCP fluxionibus data quædam ratio intercedit. Quare & anguli illi vel eandem inter ſe rationem gerent, vel alter altero dato major erit. (Geometr. Flux. Th. IV.) Puta angulum VCP infinitè minui, ut recta CP cum ipſâ CV congruat. Quo facto, area VCP unà cum angulo VCP, in nihilum abierit. Sed propter datam arearum VCP, VC*p* inter ipſas rationem, illâ VCP in nihilum abeunte, altera quoque VC*p* in nihilum abibit. Et cum illâ VC*p* angulus etiam VC*p* in nihilum abierit. Quare anguli VCP, VC*p* in nihilum ſimul abierint. Neuter igitur eorum altero dato major erit: ſed datam fluxionum ſuarum rationem anguli illi inter ſe habebunt. Ea igitur erit curvarum VCP, VC*p* inter ipſas cognatio, ut anguli quibus radii æquales, CP, C*p*, ad communem VC inclinentur, datam inter ſe rationem habeant. Curvâ igitur VKP poſitione datâ, altera VK*p* poſitione dabitur. Quare ope Corollarii 5. Prop. VI. dabitur lex vis centripetæ, quæ motum corporis in Curvâ illâ VK*p* poſitione datâ præſtare poterit.

 eſt



eſt motus tranſverſus corporis *p* ad motum tranſverſum corporis alterius P. Quare cùm *kr* æqualis ſit diſtantiæ quam corpus P acquirit à lineâ PC, ſitque *mr* ad *kr* ut angulus VC*p* ad angulum VCP, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis *p* ad motum tranſverſum corporis P; manifeſtum eſt, quòd corpus *p* completo illo tempore reperietur in loco *m*. Hæc ita ſe habebunt, ubi corpora *p* & P æqualiter ſecundum lineas *p*C & PC moventur, ideoque æqualibus viribus ſecundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus *pCn* ad angulum *pCk* ut eſt angulus VC*p* ad angulum VCP, ſitque *n*C æqualis *k*C, & corpus *p*, completo illo tempore, reverâ reperietur in *n*; ideoque vi majore urgetur quàm corpus P, ſi modò angulus *nCp* angulo *kCp* major eſt, id eſt ſi orbis *upk* vel movetur in conſequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quàm ſit dupla ejus quâ linea CP in conſequentia fertur; & vi minore, ſi orbis tardiùs movetur in antecedentia. Eſtque virium differentia ut locorum

(e) Siquidem à puncto *n* in rectam *cp* ad perpendiculum deductâ *ns*, erunt naſcentes *mr*, *np* primò quidem inter ſe æquales.

(f) EXPLICATIO DEMONSTRATIONIS NEWTONIANÆ.

Sint *p*, *n* loca corporis per orbitam mobilem lati, quando corpus alterum orbitæ immobilis loca P, K teneat. Erunt igitur illa, *p*, *n*, puncta duo lineæ VL*p* figuræ p. 162. Situs orbitæ mobilis, quo tempore corpus quod per eam fertur locum *p* teneat, is ſit quem figura *upc* repræſentat, & capiatur Curvæ *up* arcus *pk* arcui PK orbitæ immobilis æqualis. A puncto *k* in junctam *cp* ad perpendiculum demittatur *kr*, quæ junctæ *cn* in *m* occurrat. Punctum *n* erit ad circulum, centro c radio *ck* ſcriptum; nempe cùm æquales ſint *ck*, *cn*, quippe quarum hæc & illa rectæ CK æqualis eſt. Scribatur igitur circulus ille, rectiſque *nc*, *mk* productis in punctis, *t*, *s*, iterum occurrat. Denique jungatur *pm*. Ad motum corporis è loco *p* per arcum lineæ VL*p* naſcentem *pn* quatuor motus recti conſpirant. Primus per tangentem arcûs *pk*; alius verſus centrum c, qui fugam centri à motu primo oriundam ſiſtat, corpuſque à concurſu rectæ *ck* cum tangente arcûs P*k* in ipſum locum *k* transferat.

locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipſius actione, dato illo temporis ſpatio, transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck deſcribi intelligatur circulus ſecans lineas mr, mn productas in s & t, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cùm autem triangula pck, pcn, dato tempore, dentur magnitudine, ſunt kr & mr (c), earumque differentia mk, & ſumma ms, reciprocè ut altitudo pC; ideoque rectangulum $mk \times ms$ eſt reciprocè ut quadratum altitudinis pC. Eſt & mt directe ut $\frac{1}{2}mt$, id eſt, ut altitudo pC. Hæ ſunt primæ rationes linearum naſcentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id eſt lineola naſcens mn, eique proportionalis virium differentia, reciprocè ut cubus altitudinis pC (d). Q. E. D.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p, vel K & k, eſt ad vim, quâ corpus motu circulari revolvi poſſit ab R ad K, eodem tempore quo corpus P in orbe immobili deſcribit arcum PK, ut lineola naſcens mn ad ſinum verſum arcûs naſcentis RK; id eſt, ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates, F, G, in eâ ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp, ut GG−FF ad FF. Et propterea, ſi centro C, intervallo quovis CP, vel Cp, deſcribatur ſector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit: differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili & corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, ſectorem illum eodem tempore, quo deſcripta ſit area VPC, uniformiter deſcribere potuiſſet, ut

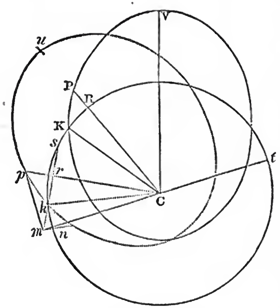
transferat. Hiſce duobus, propter angulorum PCK, pcn rationem datam, tertius accedere debet, tranſverſus quidem, ſecundum perpendiculum rectæ Cp directus, è converſione orbitæ mobilis circum centrum C natus, quo corpus è loco k in rectam Cn transferatur. Tribus hiſce motibus corpus è loco p in locum m tranſlatum eſſet, quo tempore corpus alterum, per orbitam immobilem, è loco P in locum K. Quartus igitur jungendus eſt, verſus centrum directus, qui fugam centri ex tranſverſo oriundam ſiſtat, atque corpus è loco p egreſſum, ſub finem temporis illius quo corpus alterum arcum PK confecerit, in loco ſuo n conſtituat. Ex quatuor igitur motibus rectis qui ad motum corporis per arcum pn conſpirare debent, duo verſus centrum diriguntur. Atque horum alter, qui fugæ centri à motu per tangentem arcûs pi, vel PK, oriundæ obluctetur, corporibus è locis p & P egredientibus communis eſt. Alter corporis è loco p ſecundum arcum pn iter occupantis peculiaris. Nempe qui fugæ centri obſiſtit, è motu tranſverſo ejuſdem corporis peculiari oriundæ. Atque hic motus motuum centralium in locis p, P differentia erit; et à virium centralium, quales in illis locis vigeant, differentiâ veniet; quæ proinde quantitate ſuâ illius rationem ſervabit. Ille verò naſcentis mn rationem primam. Jam verò naſcentium mn rationes primas cuborum è radiis PC contrarias eſſe, id ni fallor Newtonus ipſe luculentiſſimè oſtendit.

GG—

De Motu Corporum

GG − FF ad FF. Namque ſector ille & area *pck* ſunt ad invicem ut tempora, quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si orbis VPK Ellipſis ſit, umbilicum habens C, & apſidem ſummam V; eique ſimilis & æqualis ponatur ellipſis *upk*, ita ut ſit ſemper *p*C æqualis PC, & angulus VC*p* ſit ad angulum VCP in datâ ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel *p*C ſcribatur A, & pro Ellipſeos latere recto ponatur 2R: erit vis, quâ corpus in Ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$, & contrà. Exponatur enim vis, quâ corpus revolvatur in immotâ ellipſi, per quantitatem $\frac{FF}{AA}$; & vis in V erit $\frac{FF}{CV \text{ quad.}}$. Vis autem, quâ corpus in Circulo, ad diſtantiam CV, eâ cum velocitate revolvi poſſet, quam corpus in Ellipſi revolvens habet in V, eſt ad vim quâ corpus in Ellipſi revolvens urgetur in apſide V, ut dimidium lateris recti ellipſeos ad circuli ſemidiametrum CV (e), ideoque valet $\frac{RFF}{CV \text{ cub.}}$: & vis, quæ ſit ad hanc ut GG−FF ad FF, valet $\frac{RGG - RFF}{CV \text{ cub.}}$: eſtque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in V, quibus corpus P in ellipſi immotâ, VPK, & corpus *p* in ellipſi mobili, *upk*, revolvuntur. Unde cùm (per hanc Prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine



(e) Per Cor. 3. Prop. VI. hujus Libri. Nimirum cùm circuli, qui ſectionem conicam in apſide oſculatur, chorda, quæ per umbilicum ſectionis, ducta eſt lateri ejus recto æqualis eſt.

(f) Nam vis quâ corpus, quod per orbitam VPK feratur, urgetur in loco V, erit ad vim, quâ corpus aliud, pari velocitate è loco V emiſſum, retineatur in circulo cujus radius CV (vel T) ut T ad R (per Cor. 3. Prop. VI.) Quare ſi vis illa prior exponatur per $\frac{VFF}{TT}$, hæc altera exponetur per $\frac{RVFF}{T \text{ cub.}}$. Et vis quæ ſit ad hanc alteram ut GG − FF ad FF, ea quidem exponetur per $\frac{RVGG - RVFF}{T \text{ cub.}}$.

Ea

dine CV ut $\frac{1}{\text{A cub.}}$ ad $\frac{1}{\text{CV cub.}}$, eadem differentia in omni altitudine
A valebit $\frac{RGG - RFF}{\text{A cub.}}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, quâ corpus revolvi poteſt in ellipſi immobili VPK, addatur exceſſus $\frac{RGG - RFF}{\text{A cub.}}$; & componetur vis tota, $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{\text{A cub.}}$, quâ corpus in ellipſi mobili *upk*, iiſdem temporibus, revolvi poſſit.

Corol. 5. Ad eundem modum colligetur, quòd ſi orbis immobilis, VPK, Ellipſis ſit centrum habens in virium centro C; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur Ellipſis mobilis *upk*; ſitque 2R ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus VC*p* ſemper ſit ad angulum VCP ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{\text{T cub.}}$ & $\frac{FFA}{\text{T cub.}} + \frac{RGG - RFF}{\text{A cub.}}$ reſpectivè.

Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima CV nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis VPK habet in V, id eſt radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili VPK revolvi poteſt in loco V, dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis P indefinitè dicatur X, altitudine CP nominatâ A, & capiatur G ad F in datâ ratione anguli VC*p* ad angulum VCP: erit vis centripeta, quâ corpus idem eoſdem motus in eâdem trajectoriâ *upk*, circulariter motâ, temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{\text{A cub.}}$ (f).

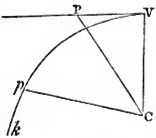
Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ; & inde inveniri novi orbes immobiles, in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur ſi ad rectam CV poſitione datam erigatur perpendiculum VP longitudinis indeterminatæ, jungaturque CP, &

(f) Ea verò differentia erit virium, quibus corpora in locis, V, *v*, orbitæ immotæ mobiliſque urgentur. Quæ differentia, cum ſit ad differentiam in locis aliis P, *p*, ſicut cubus ex A ad cubum ex T, differentia virium in locis P, *p* exponetur per $\frac{RVGG - RVFF}{\text{A cub.}}$. Huic differentiæ addatur vis in orbe immoto, in loco P, per literam X deſignata; fiet $X + \frac{RVGG - RVFF}{\text{A cub.}}$ vis tota in loco *p* orbitæ mobilis. Q. E. D.

ipſi

De Motu Corporum



ipſi æqualis agatur c*p*, conſtituens angulum vc*p*, qui ſit ad angulum vcp in datâ ratione; vis, quâ corpus gyrari poteſt in Curvâ illâ v*pk*, quam punctum *p* perpetuò tangit, erit reciprocè ut cubus altitudinis c*p*. Nam corpus p per vim inertiæ, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi poteſt in rectâ vp. Addatur vis in centrum c, cubo altitudinis cp vel c*p* reciprocè proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam v*pk*. Eſt autem hæc Curva v*pk* eadem cum Curvâ illâ vpq in Corol. 3. Prop. xli. inventâ, in quâ ibi diximus corpora, hujuſmodi viribus attracta, obliquè aſcendere (g).

PROP. XLV. PROB. XXXI.

Orbium qui ſunt circulis maximè finitimi requiruntur motus apſidum.

Problema ſolvitur arithmeticè, faciendo ut orbis, quem corpus in Ellipſi mobili (ut in Propoſitionis ſuperioris Corol. 2 vel 3.) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apſides requiruntur, & quærendo apſides orbis, quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbes autem eandem acquirent formam, ſi vires centripetæ, quibus deſcribuntur, inter ſe collatæ in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum v apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maximâ cv, A pro altitudine quâvis aliâ cp vel c*p*, & x pro altitudinum differentiâ cv−cp; & vis, quâ corpus in Ellipſi circa umbilicum ſuum c (ut in Corol. 2.) revolvente movetur, quæque in Corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$, id eſt ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A\ cub.}$, ſubſtituendo

(g) Nimirum generalis eſt inventio lineæ vlp, qualis in Prop. xliii. à Newtono tradita eſt, qualiſcunque fuerit figura orbitæ immobilis vpk, aut quæcunque fuerint vires centrales, à quibus corpus in illâ orbitâ retineatur. Puta igitur vires eas paulatim imminui, et ad nullas tandem redigi. Quo facto orbita vpk in rectam abibit, per quam corpus motu ſemel impreſſo æquabiliter feretur, & linea vl*p* lineæ v*pk* hujus Corollarii figuram induet. Sed vis centralis, quâ corpus urgetur in loco quovis *p*, vim centralem in loco cognato p lineæ immobilis parte quâdam exuperat, quæ ſit contrariè ut cubus è cp. (Id enim generaliter quoque oſtenſum eſt, nullâ neque figuræ quâ prædita

ſtituendo T − X pro A, erit ut $\frac{\text{RGG} - \text{RFF} + \text{TFF} - \text{FFX}}{\text{A cub.}}$. Reducenda ſimiliter eſt vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit A *cub:* & numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res exemplis patebit. LIBER PRIMUS.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, ideoque ut $\frac{\text{A cub.}}{\text{A cub.}}$, ſive (ſcribendo T − X pro A in numeratore) ut $\frac{\text{T cub.} - 3\text{TTX} + 3\text{TXX} - \text{X cub.}}{\text{A cub.}}$; & collatis numeratorum terminis correſpondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet RGG − RFF + TFF ad T *cub.* ut − FFX ad − 3TTX + 3TXX − X *cub.* ſive ut − FF ad − 3TT + 3TX − XX. Jam cùm orbis ponatur Circulo quàm maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut − FF ad − 3TT; ſeu GG ad TT ut FF ad 3TT, & viciſſim GG ad FF ut TT ad 3TT, id eſt, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc eſt angulus VC*p* ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cùm corpus in ellipſi immobili, ab apſide ſummâ ad apſidem imam deſcendendo, conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipſi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apſide ſummâ ad apſidem imam deſcendendo, conficiet angulum VC*p* graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob ſimilitudinem orbis hujus, quem corpus urgente uniformi vi centripetâ deſcribit, & orbis illius, quem corpus in ellipſi revolvente gyros peragens deſcribit in plano quieſcente. Per ſuperiorem terminorum collationem ſimiles redduntur hi orbes, non univerſaliter, ſed tunc cùm ad formam circularem quàm maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apſidem ſummam & apſidem imam conficiet ſemper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, ſeu 103 gr. 55 m. 23 ſec. ad centrum; perveniens ab apſide

prædita ſit lineâ VPK, neque virium centralium, quæ per lineæ illius ductum vigeant, ratione habitâ.) Cùm vero nulla planè ſit vis centralis in loco P, quando linea VPK recta utique exſiſtat; quam in lineâ mobili in loco *p* poſuimus vis centralis exuperantiam, ea vim illam totam prorſus abſumet. Unde totæ vires per lineam V*pk* rationes cuborum è radiis contrarias induent. Præterea linea V*pk* eadem erit atque VPK Corollarii 3. Prop. XLI. modò Ellipſis, à quâ genita eſt illa VPK, Circuli formam induat. Ita enim ſectores elliptici VCR cum angulis VCR proportione mutuâ convenient, rectæque CP horum angulorum ſecantibus, ſive rectis CP vel C*p* hujus figuræ, æquales evadent.

De Motu Corporum

ſummâ ad apſidem imam, ubi ſemel confecit hunc angulum, & inde ad apſidem ſummam rediens, ubi iterum confecit eundem angulum; & ſic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam eſſe ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3}, ſeu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n ſignificant dignitatum indices quoſcunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n, ſeu $\overline{T-X}|^n$, in ſeriem indeterminatam per methodum noſtram ſerierum convergentium reductus, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius, $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$; ſeu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & viciſſim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id eſt ut 1 ad n; ideoque G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam in ellipſi confectus, ſit graduum 180; conficietur angulus VCp, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam in orbe propemodum circulari, quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab apſide imâ ad apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis à centro, id eſt, ut A, ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4, & $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apſidem ſummam & apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ gr. ſeu 90 gr. Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius, corpus perveniet ad apſidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad apſidem ſummam; & ſic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propoſitione X. manifeſtum eſt. Nam corpus, urgente hâc vi centripetâ, revolvetur in Ellipſi immobili, cujus centrum eſt in centro virium. Quòd ſi vis centripeta ſit reciprocè ut diſtantia, id eſt directè ut $\frac{1}{A}$ ſeu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2; ideoque inter apſidem ſummam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ ſeu 127 gr. 16 m. 45 ſec. Et propterea corpus, tali vi revol-

vens,

vens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apſide ſummâ ad imam, & ab imâ ad ſummam perveniet, in æternum. Porro ſi vis centripeta ſit reciprocè ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id eſt reciprocè ut $A^{\frac{11}{4}}$, ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, ſeu ut $-\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ gr. æqualis 360 gr. & propterea corpus de apſide ſummâ diſcedens, & ſubinde perpetuò deſcendens, perveniet ad apſidem imam, ubi implevit revolutionem integram; dein, perpetuò aſcenſu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apſidem ſummam: & ſic per vices in æternum.

Exempl. 3. Aſſumentes m & n pro quibuſvis indicibus dignitatum altitudinis, & b, c pro numeris quibuſvis datis, ponamus vim centripetam eſſe ut $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$, id eſt, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A \text{ cub.}}$ ſeu (per eandem methodum noſtram ſerierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2} bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2} cXXT^{n-2} \text{ \&c.}}{A \text{ cub.}}.$$

Et collatis numeratorum terminis, fiet RGG − RFF + TFF ad $bT^m + cT^n$, ut − FF ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2} bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2} cXT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas, quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV, ſeu T, arithmeticè per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cùm angulus VCP inter apſidem ſummam & apſidem imam in Ellipſi immobili ſit 180 gr. erit angulus VCp inter eaſdem apſides, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento, ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A \text{ cub.}}$, angulus inter apſides invenietur graduum $180 \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur Problema in caſibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in ſeries convergentes denominatorem habentes

A *cub.* Dein pars data numeratoris, qui ex illâ operatione provenit ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus RGG−RFF+TFF−FFX ad ipſius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ ſunt: et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu apſidum; & contrà. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index eſt $\frac{nn}{mm}-3$. Id quod per Exempla ſecunda manifeſtum eſt [h]. Unde liquet vim illam in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, in receſſu à centro, decreſcere non poſſe [i]: corpus tali vi revolvens deque apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere, nunquam perveniet ad apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de quâ egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud, de apſide diſcedens, vel minimum aſcendere; aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de quâ actum eſt in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in receſſu à centro, decreſcit in majore quàm triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſque vel aſcendet in infinitum. At ſi vis, in receſſu à centro, vel decreſcat in minore quàm triplicatâ ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad apſidem imam aliquando perveniet: & contrà, ſi corpus de apſide

(h) Quantitatem enim illam quam in exemplis ſecundis litera n deſignavit, eam jam litera x ſignificet, ut ſit vis centripeta ut A^{x-3}. Erit igitur $G : F = 1 : \sqrt{x}$; id quod calculi in exemplis illis ſubducti ſatis evincunt. Unde $\sqrt{x} = \frac{F}{G}$, & $x = \frac{FF}{GG}$; vel ſi pro illis G, F ſcribantur m, n, $x = \frac{nn}{mm}$. Unde $A^{x-3} = A^{\frac{nn}{mm}-3}$. Q. E. D.

(i) Nam ſi auctâ corporis à centro diſtantiâ vis centripeta decreſcat, ponatur ea vis eſſe ut A^{-x}

ſide ad apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu à centro aut augebitur, aut in minore quàm triplicatâ altitudinis ratione decreſcet: & quo citiùs corpus de apſide ad apſidem redierit, eo longiùs ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut ſi corpus revolutionibus 8, vel 4, vel 2, vel $1\frac{1}{2}$, de apſide ſummâ ad apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8, vel 4, vel 2, vel $1\frac{1}{2}$, ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$, vel $\frac{1}{16} - 3$, vel $\frac{1}{4} - 3$, vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64} - 3}$, vel $A^{\frac{1}{16} - 3}$, vel $A^{\frac{1}{4} - 3}$, vel $A^{\frac{4}{9} - 3}$; id eſt, reciprocè ut $A^{3 - \frac{1}{64}}$, vel $A^{3 - \frac{1}{16}}$, vel $A^{3 - \frac{1}{4}}$, vel $A^{3 - \frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apſidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$, vel $\frac{2}{3}$, vel $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$, ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9} - 3}$, vel $A^{\frac{9}{4} - 3}$, vel $A^{9 - 3}$, vel $A^{16 - 3}$; & propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{11}{9}}$, vel $A^{\frac{3}{4}}$; aut directè ut A^{6} vel A^{13}. Denique ſi corpus pergendo ab apſide ſummâ ad apſidem ſummam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confecerit in conſequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 gr. ad 360 gr. ſive ut 121 ad 120, ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{29523}{14641}}$; ſeu reciprocè ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proximè ([k]). Decreſcit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quàm duplicatâ, ſed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propiùs ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit.

LIBER PRIMUS.

A^{-z}. Erit igitur $\frac{nn}{mm} - 3 = -z$. Et $\frac{nn}{mm} = 3 - z$. Quare illa z ternario non poteſt eſſe major, ne quantitas quadratica $\frac{nn}{mm}$ negativa ſit. Q. E. D.

([k]) Cùm igitur motus menſtruus Apſidum orbitæ Lunaris tres gradus vix exuperet, vires, quas centrum terræ reſpicientes in orbitâ illâ dominari cernimus, rationem duplicatæ diſtantiarum contrariam haud magnoperè aſpernantur. Imò potiùs affectant. Et motus ille apſidum tardiſſimus non ex aliâ virium illarum conditione venit, ſed ex vi quâdam extraneâ quæ centralibus ſe immiſcet. Hæc autem quanta eſſe debeat, Newtonus in ſequente Corollario æſtimare inſtituit.

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 2. Hinc etiam ſi corpus, vi centripetâ quæ ſit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipſi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognoſci poteſt (per exempla tertia) motus apſidum qui ex vi illâ extraneâ orietur: & contrà. Ut ſi vis, quâ corpus revolvitur in Ellipſi, ſit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA (l), ideoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A \text{ cub.}}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apſides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponamus vim illam extraneam eſſe 357.45 (m) partibus minorem quàm vis altera quâ corpus revolvitur in ellipſi, id eſt c eſſe $\frac{100}{35745}$, exiſtente A vel T æquali 1, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, ſeu 180.7623, id eſt, 180 gr. 45 m. 44. ſ. Igitur corpus de apſide ſummâ diſcedens, motu angulari 180 gr. 45 m. 44 ſ. perveniet ad apſidem imam, & hoc motu duplicato ad apſidem ſummam redibit: ideoque apſis ſumma, ſingulis revolutionibus progrediendo, conficiet 1 gr. 31 m. 28 ſec. Apſis Lunæ eſt duplo velocior circiter (n).

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per cen-

(l) Nempe vis Solis, quæ motum apſidibus orbitæ Lunaris infert, reliquis manentibus, eſt ut diſtantia Lunæ à centro Terræ; ſicut in Corollario 16. Prop. LXVI. hujus Libri Newtonus oſtenſus eſt. Idcirco eas ponit vires extraneas, quæ cum quantitatibus cA proportione mutuâ conveniant.

(m) —*eſſe* 357,45.] Nempe vires Solis in Lunam, quæ apſidibus ejus motum inferunt, in partes duas reſolvendæ ſunt, ſicut in Propoſitione LXVI. hujus Libri & Corollariis ejus Newtonus docet, quas partes rectæ LM, MN, fig. pag. 203. referunt. Harum LM dimidio ferè menſe apſides contra ſignorum ordinem remeare cogit: altera MN, reliquo dimidio ſpatii menſtrui, progredi. Et cùm duarum LM, MN, hæc MN major ſit, progreſſus regreſſu major erit, atque integro menſe apſides promoverint. (Prop. LXVI. Cor. 7.) Hinc progreſſus ille apſidum orbitæ lunaris, quem Aſtronomi obſervârunt, tribuendus eſt differentiæ, quâ vis MN vim LM exuperat: et veriſimile eſt eundem eum eſſe, quem ſpatio menſtruo vis aliqua extranea procrearet, quæ mediocri earum differentiæ ſemper æqualis eſſet, & Lunam à centro terræ retrahendo, vim ejus centripetam in majoribus diſtantiis minorem redderet, quàm pro contrariâ quadratorum ex diſtantiis ratione. Jam verò vis mediocris LM eſt ad illam, quâ Luna in mediocri diſtantiâ centrum terræ petit, ſicut 1 ad $178\frac{29}{40}$, id enim in Prop. XXV. Libri 3. calculis ſubductis Newtonus probat. Maxima vis MN tripla eſt illius LM. Minima, nulla eſt. (Prop. LXVI. Cor. 7. & Prop. XXVI. Libri 3.) Mediocris igitur erit ea, quæ ſit ad mediocrem LM ut $1\frac{1}{2}$ ad 1. Quare mediocris MN mediocrem LM parte dimidiâ ſuperabit. Unde cùm LM ſit ad vim centripetam Lunæ terram verſus mediocrem, ut 1 ad $178\frac{29}{40}$, differentia, quâ mediocris MN ſuperat mediocrem LM, erit ad vim illam mediocrem centripetam Lunæ verſus terram ut 1 ad 357,45. *Ponamus igitur* (inquit Newtonus) *vim extraneam* tot partibus eſſe minorem vi alterâ, quâ corpus per Ellipſin convertatur, & calculos ſubducendo exploremus, an motus apſidum, qui ex tali vi extraneâ oriturus eſt, is ſit quem in orbitâ Lunari Aſtronomi deprehenderunt.

trum

trum virium tranſeunt. Supereſt ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam ſcriptores, qui motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuſcunque datis, quàm perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuſcunque centra petentium, & planis excentricis innitentium, hîc conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolutè lubrica, ne corpora retardent. Quinimo, in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corporum incumbunt, quæque tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur, & orbitas movendo deſcribunt. Et eâdem lege motus corporum in ſuperficiebus curvis peractos ſubinde determinamus.

SECTIO X.

De motu corporum in ſuperficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

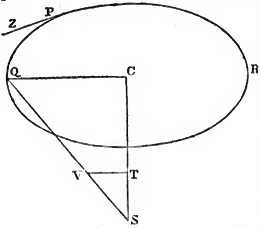
PROP. XLVI. PROB. XXXII.

Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceſſis

(a) Vis extraneæ æſtimatio dato apſidum motu viâ rectâ ad hunc ferè modum iniri poſſit. Ponatur tranſlatio menſtrua apſidis ſummæ 3°. cùm vis centralis in orbe elliptico immobili ſit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ut cA. Pro literis b, m, n, in exemplis tertiis ſcribendi ſunt numeri 1, 1, 4, eritque angulus converſionis ab apſide ſummâ ſummam uſque rurſum apſidem $360\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 363$. Unde $\overline{360}|^2 \times \overline{1-c} = \overline{363}|^2 \times \overline{1-4c}$. Sive $\overline{360}|^2 - \overline{360}|^2 c = \overline{363}|^2 - 4 \times \overline{363}|^2 c$. Quare $\overline{4 \times \overline{363}|^2 - \overline{360}|^2}\, c = \overline{363}|^2 - \overline{360}|^2 = \overline{6 \times 360} + 9 = 2169$. Sive $397476 \times c = 2169$. Quare $c : 1 = 2169 : 397476 = 1 : \frac{397476}{2169} = 1 : 178\frac{2}{3}$ propemodum. Quid igitur? Num tanta ſtatuenda eſt vis ſolis mediocris, quæ progreſſum illum menſtruum trium circiter graduum apſidum Lunarium pariat. Haud cenſeo. Corollarium illud 7. Prop. LXVI. quod certiſſimis rationibus confirmatum eſt, erroris argueret. Ipſam potius, quam hic uſurpavimus, vis extraneæ æſtimationem ſuſpectam habeo. Cujus exquiſita ratio in eo certè nititur, quòd vires, quæ in utreque orbe, ſtabili mobilique, vigeant, commenſu licet radiorum aliæ, centrum tamen idem reſpiciant. Inde enim venit conſtans illa angulorum VCp, VCP inter ipſos ratio, quam Problematis XXX. compoſitio poſtulat. Et è ratione illâ conſtante Propoſitionis XLIV. Corollariorumque ejus doctrina tota pendet, quæque in hâc Propoſitione tradita eſt calculorum ratio. Corpus autem Lunæ vi triplici incitatur. Primum vi propriâ terræ verſus terræ centrum. Tum ſolari, quæ in duas reſolvitur; quarum altera, centrum terræ ſpectans, efficaciam vis terreſtris auget; altera verò, ſecundum rectam directa quæ cum eâ parallela ſit, quæ centra ſolis terræque jungat, cum duabus aliis vim totam efficit à centro terræ niſi in ipſis corporum conjunctionibus paullum declinantem. (Prop. LXVI. hujus Libri.) Unde conſequens erit motus Lunares per motum corporis in orbe elliptico, qui ipſe circum umbilicum convertatur ſuum, minus exquiſitè repræſentari. Cæterum hunc locum de apſidum motu aliiſque Lunatibus, accuratè pertractârunt Clairaultius & T. Simſon.

ſigurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum rectam in plano illo datam egreſſi.

Sit s centrum virium, sc diſtantia minima centri hujus à plano dato, p corpus de loco p ſecundum rectam pz egrediens, q corpus idem in trajectoriâ ſuâ revolvens, & pqr trajectoria illa, in plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur cq, qs, & ſi in qs capiatur sv proportionalis vi centripetæ, quâ corpus trahitur verſus centrum s, & agatur vt quæ ſit parallela cq & occurrat sc in t: vis sv reſolvetur (per legum Corol. 2.) in vires st, tv; quarum st, trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera tv, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directè verſus punctum c in plano datum; ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac ſi vis st tolleretur, & corpus vi ſolâ tv revolveretur circa centrum c in ſpatio libero. Datâ autem vi centripetâ tv, quâ corpus q in ſpatio libero circa centrum datum c revolvitur, datur (per Prop. xlii.) tum trajectoria pqr, quam corpus deſcribit, tum locus q, in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo q; & contrà. Q. E. I.



PROP. XLVII. THEOR. XV.

Poſito quòd vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent ellipſes, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citróque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.

Nam,

Nam, ſtantibus quæ in ſuperiore propoſitione, vis SV, quâ corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur verſus centrum S, eſt ut diſtantia SQ; atque ideo ob proportionales SV & SQ, TV & CQ, vis TV, quâ corpus trahitur verſus punctum C, in orbis plano datum, eſt ut diſtantia CQ. Vires igitur, quibus corpora in plano PQR verſantia trahuntur verſus punctum C, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum S; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem figuris, in plano quovis PQR circa punctum C, atque in ſpatiis liberis circa centrum S; ideoque (per Corol 2. Prop. X. & Corol. 2. Prop. XXXVIII.) temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent Ellipſes in plano illo circa centrum C, vel periodos movendi ultrò citróque in lineis rectis, per centrum C in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circum axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & eâ revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri, ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuò reperiantur. Si corpora illa obliquè aſcendendo & deſcendendo currant ultrò citróque; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

PROP. XLVIII. THEOR. XVI.

Si rota globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, &, more rotarum revolvendo, progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicycloidem nominare licet) crit ad duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii, qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut ſumma diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

PROP. XLIX. THEOR. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat, & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei,

De Motu Corporum

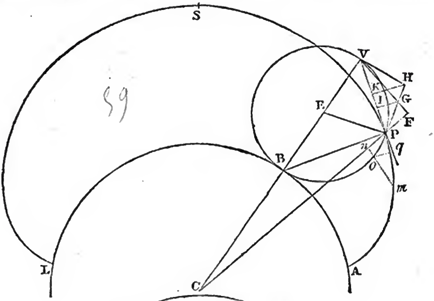
vilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii, qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

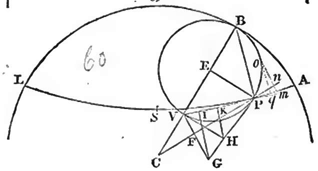
Sit ABL globus, C centrum ejus, BPV rota ei inſiſtens, E centrum rotæ, B punctum contactûs, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B verſus L; & inter eundum ita revolvi, ut arcus, AB, PB, ſibi invicem ſemper æquentur, atque punctum illud P, in perimetro rotæ datum, interea deſcribere viam curvilineam AP. Sit autem AP via tota curvilinea deſcripta, ex quo rota globum tetigit in A, & erit viæ hujus longitudo AP ad duplum ſinum verſum arcûs $\frac{1}{2}$PB, ut 2CE ad CB. Nam recta CE (ſi opus eſt) producta occurrat rotæ in V, junganturque CP, BP, EP, VP; & in CP productam demittatur normalis VF. Tangant PH, VH circulum in P & V, concurrentes in H; ſecetque PH ipſam VF in G, & ad VP demittantur normales GI, HK. Centro item C, & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom*, ſecans rectam CP in *n*, rotæ perimetrum BP in *o*, & viam curvilineam AP in *m*; centroque V & intervallo V*o* deſcribatur circulus ſecans VP productam in *q*.

Quoniam rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactûs B; manifeſtum eſt, quòd recta BP perpendicularis eſt ad lineam illam curvam AP, quam rotæ punctum P deſcribit; atque ideo quòd recta VP tanget hanc Curvam in puncto P. Circuli *nom* radius, ſenſim auctus vel diminutus, æquetur tandem diſtantiæ CP; &, ob ſimilitudinem figuræ evaneſcentis P*nomq* & figuræ PFGVI, ratio ultima lineolarum evaneſcentium P*m*, P*n*, P*o*, P*q*, id eſt, ratio mutationum momentanearum curvæ AP, rectæ CP, arcûs circularis BP, ac rectæ VP, eadem erit, quæ linearum PV, PF, PG, PI reſpectivè. Cùm autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares ſint, angulique HVG, VCF propterea æquales; & angulus VHG (ob angulos quadrilateri HVEP ad V & P rectos) angulo CEP æqualis eſt, ſimilia erunt triangula VHG, CEP; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV, ſeu HP; & ita KI ad KP: & compoſitè, vel diviſim, ut CB ad CE ita PI ad PK; &, duplicatis conſequentibus, ut CB ad 2CE ita PI ad PV, atque ita P*q* ad P*m*. Eſt igitur

decre-

decrementum lineæ VP, id eſt, incrementum lineæ BV − VP, ad
incrementum lineæ curvæ AP in datâ ratione CB ad 2CE, & prop-





terea (per Corol. Lem. IV.) longitudines BV − VP & AP, incrementis illis genitæ, ſunt in eâdem ratione. Sed, exiſtente BV radio, eſt VP co-ſinus anguli BVP, ſeu $\frac{1}{2}$BEP; ideoque BV−VP ſinus verſus eſt ejuſdem anguli; & propterea in hâc rotâ, cujus radius eſt $\frac{1}{2}$BV, erit BP−VP duplus ſinus verſus arcûs $\frac{1}{2}$BP. Ergo AP eſt ad duplum ſinum verſum arcûs $\frac{1}{2}$BP ut 2CE ad CB. Q.E.D.

Lineam autem AP in propoſitione priore Cycloidem extra globum; alteram, in poſteriore, Cycloidem intra globum, diſtinctionis gratiâ, nominabimus.

Corol. 1. Hinc ſi deſcribatur Cyclois integra ASL, & biſecetur

 ca

ea in s, erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus eſt ſinus anguli VBP, exiſtente EB radio) ut 2CE ad CB, atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et longitudo ſemiperimetri Cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ, quæ eſt ad rotæ diametrum BV ut 2CE ad CB.

PROP. L. PROB. XXXIII.

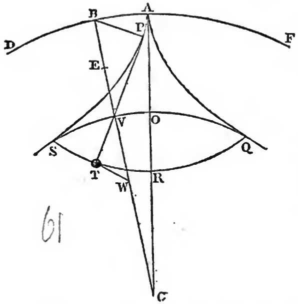
Facere ut corpus pendulum oſcilletur in Cycloide datâ.

Intra globum QVS, centro C deſcriptum, detur Cyclois QRS, biſecta in R, & punctis ſuis extremis, Q & S, ſuperficiei globi hinc inde occurrens. Agatur CR biſecans arcum QS in O, & producatur ea ad A, ut ſit CA ad CO ut CO ad CR. Centro C intervallo CA deſcribatur globus exterior DAF, & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter ſit AO, deſcribantur duæ ſemicycloides AQ, AS, quæ globum interiorem tangant in Q & S, & globo exteriori occurrant in A ([a]). A puncto illo A, filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T, & ita intra ſemicycloides AQ, AS oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendiculo AR, filum parte ſui ſuperiore, AP, applicetur ad ſemicycloidem illam, APS, verſus quam peragitur motus, & circum eam, ceu obſtaculum, flectatur; parteque reliquâ, PT, cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oſcillabitur in Cycloide datâ QRS. Q. E. F.

Occurrat

([a]) Curvas motu rotæ ſcriptas, cujus diameter eſt AO, quæque à puncto A proficiſcatur, eas ſemicycloides eſſe, et in punctis S, Q globum interiorem contingere, ad hunc modum oſtendimus. Intellige junctam CS et productam, ut globo exteriori in D occurrat. Jam cùm CA ſit ad CO ut CO ad CR (ita factum enim) convertendo, erit CA ad AO, ut CO ad OR; et permutando, CA ad CO ut AO, ad OR. Diametri igitur rotarum, quarum motu ſcribuntur cycloides intra globos DF, SQ, cum globorum diametris proportione conveniunt. Arcus autem circulares AD, OS inter ſe ſunt ſimiles. Quare et arcus illi cum globorum diametris, ac proinde cum diametris rotarum, proportione conveniunt. Hoc eſt AD : OS = AO : OR. Permutando AD : AO vel DS = OS : OR. Unde cùm OS ſemiſſis ſit arcûs ejus circularis, quem rota, cujus diameter eſt OR, integrâ ſui converſione confecerit, erit AD ſemiſſis arcûs ejus circularis, quem rota, cujus diameter eſt AO, integrâ ſui converſione confecerit. Quare DS axis erit Cycloidis, quam motus hujus rotæ generaverit. Unde punctum S ad Cycloidem erit, et arcus AS ſemicyclois erit. Eam verò globum interiorem in puncto S contingere, ex eo patet, quòd recta DS tam cycloidem AS, cujus eſt axis, quam circulum OS ad cujus centrum tendit, ad perpendiculum ſecat. Et ſimili argumentatione efficiatur punctum Q ad cycloidem eſſe, cujus proinde arcus QA ſemicyclois erit, et globum interiorem in Q continget. Q. E. D.

([b]) Recta PB, à puncto P ad perpendiculum cum PT educta, occurrat globo AD in B. Quando rotæ, cujus diameter eſt AO, punctum quo cyclois APQ ſcribitur, quod punctum generans vocatur, quando illud locum P obtineat, ambitus rotæ globum AD in B continget. Id enim ex demonſtratione Propoſitionis XLVIII. vel XLIX. manifeſtum eſt. Et in tali rotæ ſitu, diametri ejus, quæ per B ducta fuerit, extremitas altera ad globi QOS ſuperficiem erit. Eadem verò, erit ad rectam PT, quæ cycloidem in S contingit. (Per ea quæ in demonſtrandis Propoſit. XLVIII. & XLIX.



Occurrat enim filum PT tum Cycloidi QRS in T, tum Circulo QOS in V, agaturque CV; & ad fili partem rectam PT, è punctis extremis P ac T, erigantur perpendicula BP, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet, ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum AS, SR, perpendicula illa, PB, TW, abſcindere de CV longitudines VB, VW rotarum diametris OA, OR æquales (b). Eſt igitur TP ad VP (duplum ſinum anguli VBP exiſtente $\frac{1}{2}$BV radio) ut BW ad BV, ſeu AO+OR ad AO; id eſt (cùm ſint CA ad CO, CO ad CR & diviſim AO ad OR proportionales) ut CA+CO ad CA, vel, ſi biſecetur BV in E, ut 2CE ad CB. Proinde (per Corol. I. Prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili PT æquatur ſemper Cycloidis arcui PS, & filum totum APT æquatur ſemper Cycloidis arcui dimidio APS, hoc eſt

XLIX. à Newtono oſtenſa ſunt.) Concurſus igitur rectæ PT cum globo QOS, hoc eſt, punctum V, extremitas erit diametri rotæ, quæ per B ducta fuerit, contactum utique rotæ et globi FAD. Erit igitur ipſa BV rotæ diameter, quæ per contactum rotæ globique FAD tranſit. Vergit igitur eadem ad punctum C centrum globi. Puncta igitur tria C, V, B ad rectam ſunt, cujus pars BV ipſi AO æqualis eſt. Jam à puncto T educta recta TW, ad perpendiculum cum PT, ipſi CV in W occurrat. Quando rota, cujus diameter eſt OR, eum ſitum obtineat, ut globum ſoq in puncto V contingat, diameter ejus per punctum contactûs V congruet cum parte aliquâ rectæ VC; arcus autem rotæ, qui à diametro illâ & puncto generante, quod vocant, interceptus ſit, is arcui VO æqualis erit. Rotâ autem, cujus diameter eſt AO, eum ſitum obtinente, ut globum FAD in B contingat, arcus ejus, cujus chorda eſt BP, arcui AB æqualis eſt. Quare arcus quem diximus rotæ prioris ad rotæ poſterioris arcum, cujus chorda BP, rationem habebit quam VO ad AB; ſive eam quam CO ad CA; ſive eam denique quam OR ad AO. Similes igitur inter ſe ſunt rotarum arcus illi, utpote cum rotarum diametris proportione convenientes. Angulus igitur qui ad ambitum rotæ, cujus diameter eſt OR, conſtitutus arcum ejus à diametro per punctum V et puncto generante interceptum baſem habeat, is angulo BVP æqualis erit, ſive angulo WVT. Quapropter diametro rotæ cum parte aliquâ rectæ VC congruente, recta à puncto V in punctum generans extenſa congruet cum parte aliquâ rectæ VT. Rotâ igitur eum ſitum obtinente ut globum QOS in V contingat, punctum generans erit ad rectam VT. Idem verò ad cycloidem SR. Ad concurſum igitur rectæ VT et Cycloidis: hoc eſt ad ipſum punctum T. Quare rotâ eum ſitum obtinente ut globum QOS in puncto V contingat, erit T locus puncti generantis. Unde recta TW, ad perpendiculum cum rectâ VT, quæ contactum rotæ et globi cum puncto generante conjungit, educta, hæc Cycloidem in T continget, rectaque VW, rectis TV, TW interceptæ, diametri rotæ OR æqualis erit. (Per ea quæ in demonſtrandis Propoſitionibus XLVIII & XLIX. à Newtono ſunt oſtenſa.)

(per

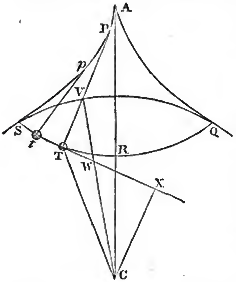
(per Corol. 2. Prop. XLIX.) longitudini AR. Et propterea viciſſim ſi filum manet ſemper æquale longitudini AR movebitur punctum T in Cycloide datâ QRS. Q. E. D.

Corol. Filum AR æquatur ſemicycloidi AS, ideoque ad globi exterioris ſemidiametrum AC eandem habet rationem, quam ſimilis illi ſemicyclois SR habet ad globi interioris ſemidiametrum CO.

PROP. LI. THEOR. XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum, C, *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque à centro; &, hâc ſolâ vi agente, corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro Cycloidis* QRS: *dico, quòd oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*

Nam in Cycloidis tangentem TW infinitè productam cadat perpendiculum CX & jungatur CT.



Quoniam vis centripeta, quâ corpus T impellitur verſus C, eſt ut diſtantia CT, atque hæc (per legum Corol. 2.) reſolvitur in partes CX, TX, quarum CX, impellendo corpus directè à P, diſtendit filum PT, & per ejus reſiſtentiam tota ceſſat, nullum alium edens effectum; pars autem altera, TX, urgendo corpus tranſverſim, ſeu verſus X, directè accelerat motum ejus in Cycloide; manifeſtum eſt, quòd corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, ſit ſingulis momentis ut longitudo TX; id eſt, ob datas CV, WV, iiſque proportionales TX, TW, ut longitudo TW, hoc eſt (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcûs Cycloidis TR. Pendulis igitur duobus APT, A*pt* de perpendiculo AR inæqualiter deductis, & ſimul demiſſis, accelerationes eorum ſemper erunt ut arcus deſcribendi, TR, *t*R. Sunt autem partes ſub initio deſcriptæ ut accelerationes, hoc eſt, ut totæ ſub initio deſcribendæ; & propterea partes, quæ manent deſcribendæ, &

acce-

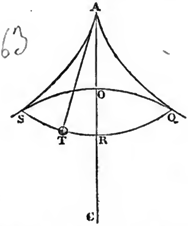
accelerationes ſubſequentes, his partibus proportionales, ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ, & partes his velocitatibus deſcriptæ, parteſque deſcribendæ, ſemper ut totæ; & propterea partes deſcribendæ datam ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt, corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum AR. Cúmque viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo R, per eoſdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis à viribus iiſdem à quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cùm Cycloidis partes duæ, RS & RQ, ad utrumque perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas, tam totas quàm dimidias, iiſdem temporibus ſemper peragent. Q. E. D.

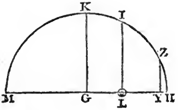
Corol. Vis, quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in Cycloide, eſt ad totum corporis ejuſdem pondus in loco altiſſimo, S vel Q, ut cycloidis arcus TR ad ejuſdem arcum SR vel QR.

PROP. LII. PROB. XXXIV.

Definire & velocitates Pendulorum in locis ſingulis, & tempora, quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes, peraguntur.

Centro quovis G, intervallo GH Cycloidis arcum RS æquante,

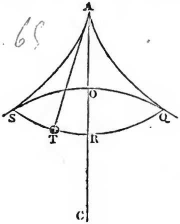


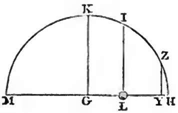


BIBLIOTECA NAZ. ROMA

deſcribe ſemicirculum HKM, ſemidiametro GK biſectum. Et ſi vis centripeta,

centripeta, diſtantiis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum G; ſitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro globi QOS ad ipſius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum T demittitur è loco ſupremo S, cadat corpus aliquod, L, ab H ad G: quoniam vires, quibus corpora urgentur, ſunt æquales ſub initio, & ſpatiis deſcribendis, TR, LG, ſemper proportionales, atque ideò, ſi æquantur TR & LG, æquales in locis T & L; patet corpora illa deſcribere ſpatia ST, HL æqualia ſub initio, ideóque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare (per Prop. XXXVIII.) tempus, quo corpus deſcribit arcum ST, eſt ad tempus oſcillationis unius, ut arcus HI, tempus quo corpus H perveniet ad L, ad ſemiperipheriam





HKM, tempus quo corpus H perveniet ad M. Et velocitas corporis penduli in loco T eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo R, (hoc eſt, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, ſeu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, ſive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad SR. Unde cùm, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis oſcillationum arcubus

(c) In figurâ Prop. XLIX. intelligatur jungi rectam CA. Tum ſi recta BV ſenſim creſcat, ut rectæ CB ultimò æqualis fiat, arcus BP ad ambitum circuli BPV eam ultimò rationem habebit, quam duplus arcus AB ad ambitum circuli AC. Unde angulus PEB duplo angulo ACB ultimò æqualis erit. Sed in omni magnitudine rectæ BV, angulus PEB duplo angulo PVB eſt æqualis. Ultimò

bus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcillationibus univerſis. Quæ erant primò invenienda.

Oſcillentur jam funipendula corpora in Cycloidibus diverſis, intra globos diverſos, quorum diverſæ ſunt etiam vires abſolutæ, deſcriptis: &, ſi vis abſoluta globi cujuſvis QOS dicatur V, vis acceleratrix, quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè verſus centrum ejus moveri, erit ut diſtantia corporis penduli à centro illo & vis abſoluta globi conjunctim, hoc eſt, ut $CO \times V$. Itaque lineola HY, quæ ſit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, deſcribetur dato tempore; &, ſi erigatur normalis YZ circumferentiæ occurrens in Z, arcus naſcens HZ denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens HZ in ſubduplicatâ ratione rectanguli GHY, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oſcillationis integræ in cycloide QRS (cùm ſit ut ſemiperipheria HKM, quæ oſcillationem illam integram denotat, directè; utque arcus HZ, qui datum tempus ſimiliter denotat, inverſè) fiet ut GH directè & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverſè; hoc eſt, ob æquales GH & SR, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ſive (per Corol. Prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oſcillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & ſubduplicatâ ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum globi inverſè, & ſubduplicatâ ratione vis abſolutæ globi etiam inverſè. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam oſcillantium, cadentium & revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi rotæ, quâ Cyclois intra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi tranſiens ([c]); & oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus deſcenſûs de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale, quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum qua-

timò igitur, puncto V cum ipſo C congruente, anguli EVP, BCA, ſive ECP, BCA, inter ſe æquales fiunt. Congruet igitur recta CP ultimò cum rectâ CA poſitione datâ, et punctum rotæ P, quo in omni rotæ magnitudine Cyclois ſcribitur, erit ad rectam illam CA poſitione datam, et Cyclois ultimò in rectam illam migraverit.

drantalem deſcribit. Eſt enim hoc tempus (per caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in Cycloide quâvis QRS ut I ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam conſectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam ſi globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, viſque centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois noſtra abibit in Cycloidem vulgi. Iſto autem in caſu longitudo arcûs Cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcûs rotæ inter idem planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus*: et Pendulum inter duas ejuſmodi Cycloides in ſimili & æquali Cycloide temporibus æqualibus oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius*. Sed & deſcenſus gravium, tempore oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

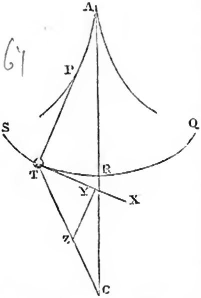
Aptantur autem propoſitiones à nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem Terræ; quatenus rotæ, eundo in ejus circulis maximis, deſcribunt motu clavorum, perimetris ſuis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferiùs in fodinis & cavernis Terræ ſuſpenſa, in Cycloidibus intra globos oſcillari debent, ut oſcillationes omnes evadent iſochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu à ſuperficie terræ, ſurſum quidem in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro ejus, deorſum verò in ratione ſimplici.

PROP. LIII. PROB. XXXV.

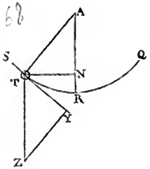
Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.

Oſcilletur corpus T in curvâ quâvis lineâ STRQ, cujus axis ſit AR tranſiens per virium centrum, C. Agatur TX, quæ Curvam illam in corporis loco quovis T contingat, inque hâc tangente TX capiatur TY æqualis arcui TR. Nam longitudo arcûs illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innoteſcit. De puncto Y educatur recta YZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z, & erit vis centripeta proportionalis rectæ TZ. Q. E. I.

Nam



Nam ſi vis, quâ corpus trahitur de T verſus C, exponatur per rectam TZ captam ipſi proportionalem, reſolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ, trahendo corpus ſecundum longitudinem fili PT, motum ejus nil mutat; vis autem altera TY motum ejus in curvâ STRQ directè accelerat, vel directè retardat. Proinde cùm hæc ſit ut via deſcribenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in oſcillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. Q. E. D.



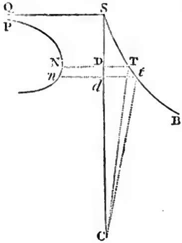
Corol. 1. Hinc ſi corpus T, filo rectilineo AT à centro A pendens, deſcribat arcum circularem STRQ, & interea urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum à vi aliquâ, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus TR ad ejus ſinum TN: æqualia erunt oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas TZ, AR, ſimilia erunt triangula ATN, ZTY; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN, hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT; vis TZ, quâ oſcillationes evadent iſochronæ, erit ad vim gravitatis AT, ut arcus TR, ipſi TY æqualis, ad arcûs illius ſinum TN.

Corol. 2. Et propterea in horologiis, ſi vires, à machinâ in pendulum ad motum conſervandum impreſſæ, ita cum vi gravitatis componi poſſint, ut vis tota deorſum ſemper ſit ut linea, quæ oritur applicando rectangulum ſub arcu TR & radio AR ad ſinum TN, oſcillationes omnes erunt iſochronæ.

PROP. LIV. PROB. XXXVI.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.

Deſcendat corpus de loco quovis S, per lineam quamvis curvam S T *t* B in plano per virium centrum C tranſeunte datam. Jungatur CS, & dividatur eadem in partes innumeras æquales, ſitque D*d* partium illarum aliqua. Centro C, intervallis CD, C*d*, deſcribantur circuli DT, *dt*, lineæ curvæ ST*t*R occurrentes in T & *t*. Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine CS, de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine CT (per Prop. XXXIX.) Tempus autem, quo corpus deſcribit lineolam T*t*, eſt ut lineolæ hujus longitudo; id eſt, ut ſecans anguli *t*TC directè, & velocitas inverſè. Tempori huic proportionalis ſit ordinatim



applicata DN, ad rectam CS per punctum D perpendicularis; &, ob datam D*d*, erit rectangulum D*d* × DN, hoc eſt area DN*nd*, eidem tempori proportionale. Ergo ſi PN*n* ſit curva illa linea, quam punctum N perpetuò tangit, ejuſque Aſymptotos ſit recta SQ, rectæ CS perpendiculariter inſiſtens: erit area SQPND proportionalis tempori, quo corpus deſcendendo deſcripſit lineam ST; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. Q. E. I.

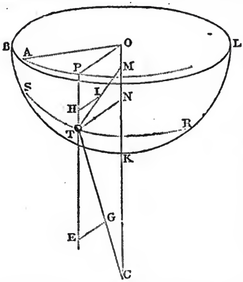
PROP. LV. THEOR. XIX.

Si corpus movetur in ſuperficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium tranſit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico, quòd parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.

Sit BKL ſuperficies curva; T, corpus in eâ revolvens; STR, trajectoria, quam corpus in eâdem deſcribit; S, initium trajectoriæ;

OMK,

OMK, axis ſuperficiei curvæ; TN, recta à corpore in axem perpendicularis; OP, huic parallela & æqualis à puncto O, quod in axe datur, educta; AP, veſtigium trajectoriæ, à puncto P in lineæ volubilis OP plano, AOP, deſcriptum; A, veſtigii initium puncto S reſpondens; TC, recta à corpore ad centrum ducta; TG, pars ejus vi centripetæ, quâ corpus urgetur in centrum C, proportionalis; TM, recta ad ſuperficiem curvam perpendicularis; TI, pars ejus vi preſſionis, quâ corpus urget ſuperficiem, viciſſimque urgetur verſus M à ſuperficie, proportionalis; PTE, recta axi parallela per corpus tranſiens; & GE, IH, rectæ à punctis G & I in parallelam illam PHTF perpendiculariter demiſſæ. Dico jam, quòd area AOP, radio OP ab initio motûs deſcripta, ſit tempori proportionalis. Nam vis TG (per legum Corol. 2.) reſolvitur in vires TE, EG; & vis TI in vires TH, HI: vires autem TE, TH, agendo ſecundum lineam PE plano AOP perpendicularem, mutant ſolummodò motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideóque motus ejus quatenus ſecundum poſitionem plani factus; hoc eſt, motus puncti P, quo trajectoriæ veſtigium AP in hoc plano deſcribitur, idem eſt ac ſi vires TE, TH tollerentur, & corpus ſolis viribus EG, HI agitaretur; hoc eſt, idem ac ſi corpus in plano AOP, vi centripetâ ad centrum O tendente, & ſummam virium EG & HI æquante, deſcriberet curvam AP. Sed vi tali deſcribitur area AOP (per Prop. I.) tempori proportionalis. Q.E.D.



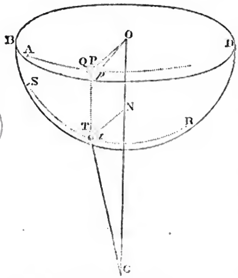
Corol. Eodem argumento ſi corpus, à viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ CO datâ tendentibus, deſcriberet in ſpatio libero lineam quamcunque curvam ST; foret area AOP tempori ſemper proportionalis.

PROP. LVI. PROB. XXXVII.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum lege vis

vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curvâ, cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt trajectoria, quam corpus in eâdem ſuperficie deſcribet, de loco dato, datâ cum velocitate, verſus plagam in ſuperficie illâ datam egreſſum.

Stantibus quæ in ſuperiore propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus T, de loco dato S, ſecundum rectam poſitione datam, in trajectoriam inveniendam STR, cujus veſtigium in plano BLO ſit AP. Et ex datâ corporis velocitate in altitudine SC, dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine TC. Eâ cum velocitate, dato tempore quàm minimo, deſcribat corpus trajectoriæ ſuæ particulam T*t*, ſitque P*p* veſtigium ejus in plano AOP deſcriptum. Jungatur O*p*; & circelli, centro T, intervallo T*t* in ſuperficie curvâ deſcripti, veſtigium in plano AOP ſit ellipſis *p*Q. Et, ob datum magnitudine circellum T*t*, datamque ejus ab axe CO diſtantiam TN, vel PO, dabitur ellipſis illa *p*Q ſpecie & magnitudine, ut & poſitione ad rectam PO. Cùmque area PO*p* ſit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus PO*p*. Et inde dabitur ellipſeos & rectæ O*p* interſectio communis *p*, unà cum angulo OP*p* in quo trajectoriæ veſtigium AP*p* ſecat lineam OP. Inde verò (conferendo Prop. XLI. cum Corol. ſuo 2.) ratio determinandi curvam AP*p* facile apparet. Tum ex ſingulis veſtigii punctis P, erigendo ad planum AOP perpendicula PT, ſuperficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur ſingula trajectoriæ puncta T. Q. E. I.



SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis ſe mutuò petentium.

Hactenus expoſui motus corporum attractorum ad centrum immobile,

mobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri ſolent ad Corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per legum Corollarium quartum) quaſi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia ſe mutuò attrahant; hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de cauſâ jam pergo motum exponere corporum ſe mutuò trahentium, conſiderando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſicè loquamur, veriùs dicantur impulſus. In Mathematicis enim jam verſamur; & propterea, miſſis diſputationibus phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus à lectoribus mathematicis faciliùs intelligi.

PROP. LVII. THEOR. XX.

Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum ſe mutuò, figuras ſimiles.

Sunt enim diſtantiæ corporum à communi gravitatis centro reciprocè proportionales corporibus; atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo in datâ ratione ad diſtantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ diſtantiæ circum terminum ſuum communem æquali motu angulari, propterea quòd in directum ſemper jacentes non mutant inclinationem ad ſe mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ ſunt in datâ ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, figuras circum eoſdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel quieſcunt, vel motu quovis non angulari moventur, deſcribunt omninò ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ, quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. Q. E. D.

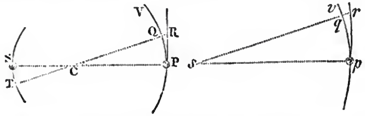
PROP. LVIII. THEOR. XXI.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico, quòd figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuò, poteſt figura ſimilis:

De Motu Corporum

ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iiſdem deſcribi.

Rovolvantur corpora S, P circa commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T, deque P ad Q. A dato puncto *s* ipſis SP, TQ æquales & parallelæ ducantur ſemper *sp*, *sq*; & Curva *pqv*, quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, deſcribit, erit ſimilis & æqualis Curvis, quas corpora S, P deſcribunt circum ſe mutuò: proindeque (per Theor. XX.) ſimilis curvis ST & PQV,



quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum C: idque quia proportiones linearum SC, CP, & SP, vel *sp*, ad invicem dantur.

Caſ. 1. Commune illud gravitatis centrum C, per legum Corollarium quartum, vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primò, quòd id quieſcit; inque *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus S & P ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & *pr* Curvas PQ & *pq* in P & *p*; & producantur CQ & *sq* ad R & *r*. Et ob ſimilitudinem figurarum CPRQ, *sprq* erit RQ ad *rq* ut CP ad *sp*, ideoque in datâ ratione. Proinde ſi vis, quâ corpus P verſus corpus S, atque ideo verſus centrum intermedium C attrahitur, eſſet ad vim, quâ corpus *p* verſus centrum *s* attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus PR, *pr* ad arcus PQ, *pq*, per intervalla ipſis proportionalia RQ, *rq*; ideoque vis poſterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in Curvâ *pqv*, quæ ſimilis eſſet Curvæ PQV, in quâ vis prior efficit, ut corpus P gyretur; & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione CP ad *sp*, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum S & *s*, P & *p*, & æqualitatem diſtantiarum SP, *sp*) ſibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur

hentur de tangentibus: & propterea, ut corpus poſterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idque in ſubduplicatâ ratione intervallorum; propterea quòd (per lemma decimum) ſpatia, ipſo motûs initio deſcripta, ſunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* eſſe ad velocitatem corporis P in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ *sp* ad diſtantiam CP, eò ut temporibus, quæ ſint in eadem ſubduplicatâ ratione, deſcribantur arcus *pq*, PQ, qui ſunt in ratione integrâ: et corpora, P, *p*, viribus æqualibus ſemper attracta, deſcribent circum centra quieſcentia C & *s* figuras ſimiles PQV, *pqv*, quarum poſterior *pqv* ſimilis eſt & æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S deſcribit. Q. E. D.

Caſ. 2. Ponamus jam quòd commune gravitatis centrum, unà cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter in directum; & (per legum Corollarium ſextum) motus omnes in hoc ſpatio peragentur ut priùs; ideóque corpora deſcribent circum ſe mutuò figuras eaſdem ac priùs, & propterea figuræ *pqv* ſimiles & æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus diſtantiæ ſuæ proportionalibus ſe mutuò trahentia, deſcribunt (per Prop. X.) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuò, Ellipſes concentricas; & vice verſâ, ſi tales figuræ deſcribuntur, ſunt vires diſtantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus, deſcribunt (per Prop. XI, XII, XIII.) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuò, ſectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ deſcribuntur. Et vice verſâ, ſi tales figuræ deſcribuntur, vires centripetæ ſunt quadrato diſtantiæ reciprocè proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad ſe mutuò ductis deſcribunt areas temporibus proportionales.

PROP. LIX. THEOR. XXII.

Corporum duorum S *&* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum eſſe ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quæ corpora circum ſe mutuò deſcribunt, figuram ſimilem & æ-*

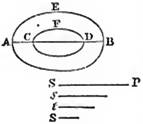
qualem deſcribentis, in ſubduplicata ratione corporis alterius S, *ad ſummam corporum* S+P.

Namque, ex demonſtratione ſuperioris propoſitionis, tempora, quibus arcus quivis ſimiles PQ & *pq* deſcribuntur, ſunt in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum CP & SP, vel *sp*; hoc eſt, in ſubduplicatâ ratione corporis S ad ſummam corporum S+P. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles PQ & *pq* deſcribuntur, hoc eſt, tempora tota, quibus figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eadem ſubduplicatâ ratione. Q. E. D.

PROP. LX. THEOR. XXIII.

Si corpora duo S *&* P, *viribus, quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus, ſe mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quòd Ellipſeos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *deſcribit, axis principalis erit ad axem principalem Ellipſeos, quam corpus idem* P *circa alterum quieſcens* S *eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum* S+P *ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum* S.

Nam ſi deſcriptæ Ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema ſuperius) forent in ſubduplicatâ ratione corporis S ad ſummam corporum S+P. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in Ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipſeos autem axis principalis (per Prop. XV.) minuetur in ratione, cujus hæc eſt ſeſquiplicata, id eſt in ratione, cujus ratio S ad S+P eſt triplicata; ideoque erit ad axem principalem Ellipſeos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter S+P & S ad S+P. Et inverſè, axis principalis Ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem principalem deſcriptæ



(*) Sit AEB Ellipſis ejus per omnia ſimilis et æqualis, quam corpus P motu ſuo circum S ſcribit, ſive ejus quam *p* circum *s* in fig. p. 192. Sitque CFD Ellipſis alia, cujus circuitum corpus D, circum umbilicum immobilem, eodem tempore abſolveret, quo corpus P converſionem ſuam circum corpus S. Ellipſeos autem primæ axis tranſverſus ſit AB; alterius, CD. Exponatur recta S datæ cujuſvis longitudinis; aliaque SP, quæ ad datam S rationem eam habeat, quam ſumma corporum duorum, S+P, ad corpus S. Sint duæ, *s*, *t*, inter duas SP, S proportione mediæ. Dicit Newtonus rectam AB ad rectam CD proportionem habere eam quam SP ad *s*. Id verò hiſce ferè argumentis

ſcriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primum duorum mediè proportionalium inter $S+P$ & S. Q. E. D [a].

PROP. LXI. THEOR. XXIV.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò trahentia, neque aliàs agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuò, ſed utrumque à corpore tertio, in communi gravitatis centro conſtituto, viribus iiſdem traheretur: et virium trahentium eadem erit lex, reſpectu diſtantiæ corporum à centro illo communi, atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuò trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem ſunt, ac ſi à corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam datur ratio diſtantiæ corporis utriuſvis à centro illo communi ad diſtantiam inter corpora, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex unâ diſtantiâ & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ diſtantiâ, & quantitatibus totidem datis, datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus, ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, ſit directè vel inverſè ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hâc diſtantiâ & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inverſè, ut corporis attracti diſtantia à centro illo communi; vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas; vel denique ut quantitas ex hâc diſtantiâ & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, vis trahentis eadem erit lex, reſpectu diſtantiæ utriuſque. Q. E. D.

mentis probat. Cùm corpora p, D eiſdem viribus centralibus per Ellipſes AKB, CFD ferantur, (id enim omninò ponendum eſt) duplicata temporum converſionum ratio, axium triplicata erit (per Prop. XV.) At verò ratio corporum $S+P$ ad corpus S, ſive rectæ SP ad rectam S, duplicata eſt ejus quam tempus converſionis corporis p per AKB habet ad tempus converſionis per CFD (per Theorema noviſſimum.) Quare cubus ex AB erit ad cubum ex CD ut recta SP ad rectam S; ſive ut cubus ex SP ad cubum ex s. Quare $AB : CD = SP : s$. Q. E. D.

 PROP.

De Motu Corporum

PROP. LXII. PROB. XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus ſe mutuò trahunt, ac de locis datis demittuntur ([b]), *determinare motus.*

Corpora (per Theorema noviſſimum) perinde movebuntur, ac ſi à corpore tertio, in communi gravitatis centro conſtituto, traherentur; & centrum illud, ipſo motûs initio, quieſcet per hypotheſin; & propterea (per legum Corol. 4) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus corporum (per Prob. xxv.) perinde ac ſi à viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuò trahentium. Q. E. I.

PROP. LXIII. PROB. XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus ſe mutuò trahunt, deque locis datis, ſecundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii, quod unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per legum Corollarium quintum, & Theorema noviſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum unà cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuò, ſed à corpore tertio, ſito in centro illo, traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili, de loco dato, ſecundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, determinandus eſt motus per Problema nonum & viceſimum ſextum: & habebitur ſimul motus corporis alterius circum idem centrum. Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille ſyſtematis, ſpatii & corporum in eo gyrantium,

([b]) Nempe ut ſolis viribus centralibus incitata rectâ cadant.

([c]) Nimirum datâ velocitate quâcum corpus T è loco T, ſecundum rectam poſitione datam, exeat, datâque in eodem loco vi centrali, dabitur Ellipſeos, per quam feratur corpus T, in loco T curvatura. (Vide Sect. III. Not. [m].) Sed recta, quæ Ellipſin illam in loco T contingit, poſitione data; nempe cùm ipſa ſit ſecundum quam corpus è loco T exeat. Circulus igitur, qui Ellipſin in loco T oſculabitur, magnitudine et poſitione datus. Quam igitur de rectâ DT, poſitione datâ, circulus ille partem abſcindat, ea magnitudine data. Verùm ea lateri recto diametri DT æqualis

6 eſt,

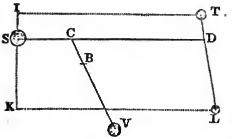
gyrantium, motus progreſſivus ſuprà inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. Q. E. I.

PROP. LXIV. PROB. XL.

Viribus, quibus corpora ſe mutuò trahunt, creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum à centris: requiruntur motus plurium corporum inter ſe.

Ponantur primò corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D. Deſcribent hæc (per Corollarium primum Theorematis XXI.) Ellipſes centra habentes in D, quarum magnitudo ex Problemate V. innoteſcit (c).

Trahat jam corpus tertium, S, priora duo, T & L, viribus acceleratricibus, ST, SL, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis ST (per legum Corol. 2.) reſolvitur in vires SD, DT; & vis SL in vires SD, DL. Vires autem, DT, DL, quæ ſunt ut ipſarum ſumma TL, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L ſe mutuò trahunt, additæ his viribus corporum T & L, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis DT ac DL proportionales, ut priùs, ſed viribus prioribus majores; ideóque (per Corol. 1. Prop. X. & Corol. 1 & 8. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa deſcribant Ellipſes ut priùs, ſed motu celeriore.



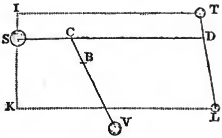
Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, actionibus motricibus SD×T & SD×L, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas TI, LK, ipſi DS parallelas, nil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam IK acceſſus,

eſt. (Hamilton. Conic. Lib. 5. Prop. XVII.) Quare latus rectum ejus diametri magnitudine datum. Diameter autem ipſa magnitudine data, propter ſemiſſem ejus, DT, datam. Quare et conjugata ejus magnitudine data, utpote quæ diametri et lateris ejus recti proportione media ſit. Eadem verò conjugata poſitione data, quoniam per datum punctum D centrum Ellipſeos tranſeat, et parallela ſit cum rectâ poſitione datâ, quæ Ellipſin in T contingit. Ellipſeos igitur, per quam fertur corpus T, diametri duæ magnitudine et poſitione datæ; quæ per T, quæque ejus conjugata. Ellipſis igitur ipſa magnitudine & poſitione data. Q. E. D. Simili modo oſtendamus Ellipſin alteram, per quam feratur corpus L, magnitudine et poſitione datam.

faciendo,

De Motu Corporum

faciendo, ut ſyſtema corporum T & L ex unâ parte, & corpus S ex alterâ, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. Tali motu corpus S, eò quòd ſumma virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, diſtantiæ CS proportionalium, tendit verſus centrum C, deſcribit Ellipſin circa idem C; & punctum D, ob proportionales CS, CD, deſcribet Ellipſin conſimilem è regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, prius priore, poſterius poſteriore, æqualiter & ſecundum lineas parallelas TI & LK, ut dictum eſt, attracta, pergent (per legum Corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile D ellipſes ſuas deſcribere, ut priùs. Q. E. I.



Addatur jam corpus quartum V, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipſes, circa omnium commune centrum gravitatis B, deſcribere, manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centrum D & C, ſed acceleratis. Et eâdem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita ſe habent, etſi corpora T & L trahunt ſe mutuò viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus, quàm quibus trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facilè deducetur, quòd corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili deſcribunt. Q. E. I.

PROP. LXV. THEOR. XXV.

Corpora plura, quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in Ellipſibus; &, radiis ad umbilicos ductis, areas deſcribere temporibus proportionales quàm proximè.

In Propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus, ubi motus plures peraguntur in Ellipſibus accuratè. Quo magis recedit lex virium

virium à lege ibi poſitâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt, ut corpora, ſecundum legem hîc poſitam ſe mutuò trahentia, moveantur in Ellipſibus accuratè, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multùm ab Ellipſibus errabitur.

Caſ. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod, ad varias ab eo diſtantias, revolvi; tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum Corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuò. Diminui autem poſſunt corpora minora, uſque donec error iſte, & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores; atque ideo donec orbes cum Ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, ſine errore, qui non ſit minor quovis dato. Q. E. O.

Caſ. 2. Fingamus jam ſyſtema corporum minorum, modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum, circum ſe mutuò revolventium, corporum ſyſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longè maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut ſyſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur, efficiunt: manifeſtum eſt quòd, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motûs attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum; & augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua

ductarum

De Motu Corporum

ductarum differentiæ, reſpectu earum longitudinis, & inclinationes ad invicem minores ſint, quàm datæ quævis; perſeverabunt motus partium ſyſtematis inter ſe ſine erroribus, qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, ſyſtema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius: hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum ſectionem aliquam conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languidâ, Ellipſin fortiore) & radio ad maximum ducto deſcribet areas temporibus proportionales, ſine ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ, perexiguæ ſanè & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. Q. E. O.

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. In caſu ſecundo, quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad ſyſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium ſyſtematis inter ſe; propterea quòd linearum, à corpore maximo ad has ductarum, jam major eſt inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quòd attractiones acceleratrices partium ſyſtematis, verſus corpus omnium maximum, non ſint ad invicem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à corpore illo maximo; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit quàm inæqualitas proportionis diſtantiarum à corpore maximo. Nam ſi vis acceleratrix, æqualiter & ſecundùm lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter ſe, neceſſe eſt, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque ſit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, neceſſariò mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde ſi ſyſtematis hujus partes in Ellipſibus, vel Circulis, ſine perturbatione inſigni moveantur; manifeſtum eſt, quòd eædem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſimè, aut urgentur æqualiter, & ſecundum lineas parallelas quamproximè.

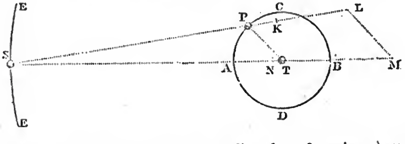
PROP.

PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum, ſe mutuò trahunt; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico, quòd interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam Ellipſeos, umbilicum in concurſu radiorum habentis, magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quàm ſi maximum illud vel à minoribus non attractum quieſcat, vel multo minùs vel multo magis attractum aut multo minùs aut multo magis agitetur.

Liquet ferè ex demonſtratione Corollarii ſecundi Propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latiùs cogente ſic evincitur.

Caſ. 1. Revolvantur corpora minora P & S in eodem plano circa maximum T, quorum P deſcribat orbem interiorem PAB, & S exteriorem ESE. Sit SK mediocris diſtantia corporum P & S; & corporis P verſus S attractio acceleratrix, in mediocri illâ diſtantiâ, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione SK ad SP capiatur SL ad SK; & erit SL attractio acceleratrix corporis P verſus S in diſtantiâ quâvis SP. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M; & attractio SL reſolvetur (per legum Corol. 2.) in attractiones SM, LM. Et ſic urgebitur corpus P vi

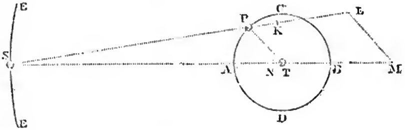


acceleratrice triplici. Vis una tendit ad T, & oritur à mutuâ attractione corporum T & P. Hâc vi ſolâ corpus P circum corpus T, ſive immotum, ſive hâc attractione agitatum, deſcribere

 deberet

De Motu Corporum

deberet & areas, radio PT, temporibus proportionales, & Ellipſin, cui umbilicus eſt in centro corporis T. Patet hoc per Prop. XI. & Corollaria 2 & 3. Theor. XXI. Vis altera eſt attractionis LM; quæ, quoniam tendit à P & T, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipſâ, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per Corol. 3. Theor. XXI. At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ PT reciprocè proportionalis, componet ea, cum



vi priore, vim ab hâc proportione aberrantem, idque eo magis, quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cùm (per Prop. XI. & per Corol. 2. Theor. XXI.) vis, quâ Ellipſis circa umbilicum T deſcribitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ PT reciprocè proportionalis; vis illa compoſita, aberrando ab hâc proportione, faciet ut orbis PAB aberret à formâ Ellipſeos umbilicum habentis in T; idque eo magis, quo major eſt aberratio ab hâc proportione; atque ideo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam verò vis tertia, SM, trahendo corpus P ſecundum lineam ipſi ST parallelam, componet cum viribus prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à P in T; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus P, radio TP, areas non ampliùs temporibus proportionales deſcribat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis verò PAB aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hæc vis tertia duplici de cauſâ adaugebit; tum quòd non dirigatur â P ad T, tum etiam quòd non ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ PT. Quibus intellectis, manifeſtum eſt, quòd areæ temporibus tum maximè fiunt proportionales,

portionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, ſit minima; & quod orbis PAB tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam ſecunda quàm tertia, ſed præcipuè vis tertia, ſit minima, vi primâ manente.

Exponatur corporis T attractio acceleratrix verſus S per lineam SN; & ſi attractiones acceleratrices SM, SN æquales eſſent; hæ, trahendo corpora T & P æqualiter & ſecundùm lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per legum Corol. 6.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio SN minor eſſet attractione SM, tolleret ipſa attractionis SM partem SN, & maneret pars ſola MN, quâ temporum & arearum proportionalitas, & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio SN major eſſet attractione SM, oriretur ex differentiâ ſola MN perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem SN reducitur ſemper attractio tertia ſuperior SM ad attractionem MN, attractione primâ & ſecundâ manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita PAB ad formam præfatam ellipticam tum maximè accedunt, ubi attractio MN vel nulla eſt, vel quàm fieri poſſit minima; hoc eſt, ubi corporum P & T attractiones acceleratrices, factæ verſus corpus S, accedunt quantum fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt, ubi attractio SN non eſt nulla, neque minor minimâ attractionum omnium SM, ſed inter attractionum omnium SM maximam & minimam quaſi mediocris; hoc eſt, non multò major neque multò minor attractione SK. Q. E. D.

Caſ. 2. Revolvantur jam corpora minora P, S circa maximum T in planis diverſis; & vis LM, agendo ſecundum lineam PT in plano orbitæ PAB ſitam, eundem habebit effectum ac priùs, neque corpus P de plano orbitæ ſuæ deturbabit. At vis altera, NM, agendo ſecundum lineam quæ ipſi ST parallela eſt (atque ideo, quando corpus S verſatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ PAB) præter perturbationem motûs in longitudinem jam antè expoſitam, inducet perturbationem motûs in latitudinem, trahendo corpus P de plano ſuæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P & T ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans MN, ideoque minima evadet ubi MN eſt minima;

 hoc

hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio SN non eſt multò major, neque multò minor attractione SK. Q. E. D.

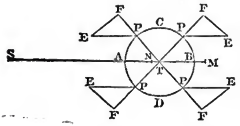
Corol. 1. Ex his facilè colligitur, quòd, ſi corpora plura minora P, S, R, &c. revolvantur circa maximum T, motus corporis intimi P minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque cætera à ſe mutuò.

Corol. 2. In ſyſtemate vero trium corporum T, P, S, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciprocè ut quadrata diſtantiarum; corpus P, radio PT, aream circa corpus T velociùs deſcribet prope conjunctionem A & oppoſitionem B, quàm prope quadraturas C, D. Namque vis omnis quâ corpus P urgetur & corpus T non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam PT, accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis eſt vis NM. Hæc in tranſitu corporis P à C ad A tendit in conſequentia, motumque accelerat; dein uſque ad D in antecedentia, & motum retardat; tum in conſequentia uſque ad B, & ultimò in antecedentia tranſeundo â B ad C (c).

Corol. 3. Et eodem argumento patet, quòd corpus P, cæteris paribus, velociùs movetur in conjunctione & oppoſitione quàm in quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis P, cæteris paribus, curvior eſt in quadraturis quàm in conjunctione & oppoſitione. Nam corpora velociora minùs deflectunt à recto tramite. Et præterea vis KL, vel NM, in conjunctione & oppoſitione contraria eſt vi, quâ corpus T trahit corpus P; ideoque vim illam minuit; corpus autem P minùs deflectet à recto tramite, ubi minùs urgetur in corpus T.

Corol.



(c) Tota vis LM agit ſecundum rectam PT, et niſi in ipſis conjunctionibus pars aliqua alterius vis NM. Nam per P, centrum corporis P, agatur PE cum rectâ TS parallela, et capiatur PE æqualis rectæ NM, modò centrum corporis S ſitum ſit in plano orbitæ ADBC. Per E agatur EF cum rectâ illâ, quæ orbitam in P contingat, parallela. Ita vis NM, ſive PE, reſolvetur in duas PF, FE; quarum PF, cùm ſecundum rectam PT agat, velocitatem deſcriptionis

Corol. 5. Unde corpus P, cæteris paribus, longiùs recedet à corpore T in quadraturis, quàm in conjunctione & oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu excentricitatis. Nam ſi orbita corporis P excentrica ſit, excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi apſides ſunt in ſyzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus P, ad apſidem ſummam appellans, abſit longiùs à corpore T in ſyzygiis quàm in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis T, quâ corpus P retinetur in orbe ſuo, augetur in quadraturis per additionem vis LM, ac diminuitur in ſyzygiis per ablationem vis KL, & ob magnitudinem vis KL, magis diminuitur quàm augetur; eſt autem vis illa centripeta (per Corol. 2. Prop. IV.) in ratione compoſitâ ex ratione ſimplici radii TP directè & ratione duplicatâ temporis periodici inverſè: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis KL; ideoque tempus periodicum, ſi maneat orbis radius TP, augeri, idque in ſubduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minùs quàm in radii hujus ratione ſeſquiplicatâ (per Corol. 6. Prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus P minùs ſemper & minùs attractum perpetuò recederet longiùs à centro T; & contrà, ſi vis illa augeretur, accederet propiùs. Ergo ſi actio corporis longinqui S, quâ vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices: augebitur ſimul ac diminuetur radius TP per vices; & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſitâ ex ratione ſeſquiplicatâ radii, & ratione ſubduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam, quòd Ellipſeos à corpore P deſcriptæ axis, ſeu apſidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen pro-

ſcriptionis areæ nihil mutat. Altera, FE, auget velocitatem illam, dum à C ad A, vel à D ad B corpus tranſeat; minuit viciſſim, corpore ab A in D, vel à B in C tranſeunte. Quod figura ipſa, ni fallor, ſatis monſtrat. Quòd ſi corpus S extra planum orbitæ ADBC ſitum fuerit, tamen partem illam vis NM, quæ cum plano orbitæ parallela ſit, in duas reſolvendo, quarum altera agit ſecundum rectam TP, altera ſecundum rectam quæ parallela ſit cum eâ quæ orbitam in P contingat, eadem ferè efficientur.

greditur,

greditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis quâ corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripetâ, quâ corpus T trahit corpus P. Vis prior LM, ſi augeatur diſtantia PT, augetur in eâdem ferè ratione cum hâc diſtantiâ; & vis poſterior decreſcit in duplicatâ illâ ratione: ideoque ſumma harum virium decreſcit in minore quàm duplicatâ ratione diſtantiæ PT, & propterea (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut aux, ſeu apſis ſumma, regrediatur. In conjunctione verò & oppoſitione vis, quâ corpus P urgetur in corpus T, differentia eſt inter vim, quâ corpus T trahit corpus P, & vim KL; & differentia illa, propterea quòd vis KL augetur quamproximè in ratione diſtantiæ PT, decreſcit in majore quàm duplicatâ ratione diſtantiæ PT, ideoque (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut aux progrediatur. In locis inter ſyzygias & quadraturas pendet motus augis ex cauſâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa, vel regrediatur. Unde cùm vis KL in ſyzygiis ſit quaſi duplo major quàm vis LM in quadraturis, exceſſus erit penes vim KL, transferetque augem in conſequentia ([d]). Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii faciliùs intelligetur, concipiendo ſyſtema corporum duorum T, P corporibus pluribus S, S, S, &c. in orbe ESE conſiſtentibus, undique cingi. Namque horum actionibus actio ipſius T minuetur undique, decreſcetque in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiæ.

Corol. 8. Cùm autem pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quàm duplicata ratione diſtantiæ TP, in tranſitu corporis ab apſide imâ ad apſidem ſummam; ut & à ſimili incremento in reditu ad apſidem imam; atque ideo maximus ſit ubi proportio vis in apſide ſummâ ad vim in apſide imâ maxime recedit à duplicatâ ratione diſtantiarum inverſâ: manifeſtum eſt, quòd apſides in ſyzygiis ſuis, per vim ablatitiam KL ſeu NM − LM, progredientur velociùs, inque quadraturis ſuis tardiùs recedent per vim addititiam LM ([e]). Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progreſſûs vel tarditas regreſſûs continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.

([d]) Vide Lib. 3. Prop. XXV & XXVI.

Corol.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ à centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipſi; & mox, in deſcenſu ab apſide ſummâ, ſeu auge, ad apſidem imam, vis illa per acceſſum perpetuum vis novæ augeretur in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiæ diminutæ: manifeſtum eſt, quòd corpus, perpetuo acceſſu vis illius novæ impulſum ſemper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quàm ſi urgeretur vi ſolâ creſcente in duplicatâ ratione diſtantiæ diminutæ; ideoque orbem deſcriberet orbe elliptico interiorem, & in apſide imâ propiùs accederet ad centrum quàm priùs. Orbis igitur, acceſſu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in receſſu corporis ab apſide imâ ad apſidem ſummam, decreſceret iiſdem gradibus quibus antè creverat, rediret corpus ad diſtantiam priorem; ideoque ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minùs attractum aſcendet ad diſtantiam majorem, & ſic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper excentricitas; & contrà, diminuetur eadem, ſi ratio illa decreſcat. Jam verò in ſyſtemate corporum T, P, S, ubi apſides orbis PAB ſunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima eſt; & maxima fit, ubi apſides ſunt in ſyzygiis. Si apſides conſtituantur in quadraturis, ratio prope apſides minor eſt, & prope ſyzygias major quàm duplicata diſtantiarum; & ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, uti jam dictum eſt. At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter apſides, hæc minor eſt quàm duplicata diſtantiarum. Vis in apſide imâ eſt ad vim in apſide ſummâ in minore quàm duplicatâ ratione diſtantiæ apſidis ſummæ ab umbilico Ellipſeos ad diſtantiam apſidis imæ ab eodem umbilico: & contrà, ubi apſides conſtituuntur in ſyzygiis, vis in apſide imâ eſt ad vim in apſide ſummâ in majore quàm duplicatâ ratione diſtantiarum. Nam vires LM in quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, & vires KL in ſyzygiis ſubductæ à viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranſitu inter apſides, minima

(*) Nempe cùm vis KL in ſyzygiis maxima ſit, vis LM in quadraturis tantùm non ad nihilum redacta ſit.

De Motu Corporum

in quadraturis, maxima in ſyzygiis: & propterea in tranſitu apſidum à quadraturis ad ſyzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem Ellipſeos; inque tranſitu à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit.

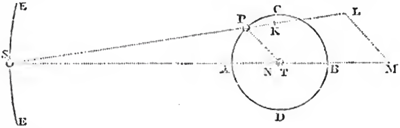
Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis EST immobile manere; & ex errorum expoſitâ cauſâ manifeſtum eſt, quòd ex viribus NM, ML, quæ ſunt cauſa illa tota, vis ML, agendo ſemper ſecundum planum orbis PAB, nunquam perturbat motus in latitudinem; quódque vis NM, ubi nodi ſunt in ſyzygiis, agendo etiam ſecundum idem orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpuſque P de plano orbis ſui perpetuò trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu corporis à quadraturis ad ſyzygias, augetque viciſſim eandem in tranſitu à ſyzygiis ad quadraturas. Unde fit, ut corpore in ſyzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. At ſi nodi conſtituantur in octantibus poſt quadraturas, id eſt, inter C & A, D & B, intelligetur ex modò expoſitis, quòd, in tranſitu corporis P à nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuò minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quàm augetur, & propterea minor eſt ſemper in nodo ſubſequente quàm in præcedente. Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi ſunt in octantibus alteris inter A & D, B & C. Inclinatio igitur ubi nodi ſunt in ſyzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum à ſyzygiis ad quadraturas, in ſingulis corporis ad nodos appulſibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi ſunt in quadraturis, & corpus in ſyzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus, quibus antea decreverat; nodiſque ad ſyzygias proximas appulſis, ad magnitudinem primam revertitur (f).

Corol. 11. Quoniam corpus P, ubi nodi ſunt in quadraturis, perpetuò trahitur de plano orbis ſui, idque in partem verſus S in

tranſitu

(f) Hæc optimè intelligenda ſunt ex calculis quos in Propoſitionibus Libri Tertii XXX & XXXIV. Newtonus

tranſitu ſuo à nodo C per conjunctionem A ad nodum D; & in contrariam partem in tranſitu à nodo D per oppoſitionem B ad nodum C: manifeſtum eſt, quòd in motu ſuo à nodo C corpus per-



petuò recedit ab orbis ſui plano primo CD, uſque dum perventum eſt ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longiſſimè diſtans à plano illo primo CD, tranſit per planum orbis EST non in plani illius nodo altero D, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis S, quodque proinde novus eſt nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent nodi recedere, in tranſitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuò recedunt; in ſyzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardiùs: ideoque, ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii, ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis deſcripti errores ſunt paulò majores in conjunctione corporum P, S, quàm in eorum oppoſitione; idque ob majores vires generantes NM & ML.

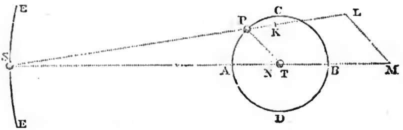
Corol. 13. Cúmque rationes horum Corollariorum non pendeant à magnitudine corporis S, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis S tanta ſtatuitur magnitudo, ut circa ipſum revolvatur corporum duorum T & P ſyſtema. Et ex aucto corpore S, auctâque ideo ipſius vi centripetâ, à quâ errores corporis P oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus diſtantiis, majores in hoc caſu quàm in altero, ubi corpus S circum ſyſtema corporum P & T revolvitur.

Corol. 14. Cùm autem vires NM, ML, ubi corpus S longinquum eſt, ſint quamproximè ut vis SK & ratio PT ad ST con-

Newtonus ſubducere inſtituit.

De Motu Corporum

junctim ([f]), hoc eſt, ſi detur tum diſtantia PT, tum corporis S vis ſoluta, ut ST cub. reciprocè; ſint autem vires illæ NM, ML cauſæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum eſt in præcedentibus Corollariis: manifeſtum eſt, quòd effectus illi omnes, ſtante corporum T & P ſyſtemate, & mutatis tantum diſtantiâ ST



& vi abſolutâ corporis S, ſint quamproximè in ratione compoſitâ ex ratione directâ vis abſolutæ corporis S, & ratione triplicatâ inverſâ diſtantiæ ST. Unde ſi ſyſtema corporum T & P revolvatur circa corpus longinquum S; vires illæ NM, ML, & earum effectus erunt (per Corol. 2 & 6. Prop. IV.) reciprocè in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, ſi magnitudo corporis S proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ NM, ML, & earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis S è corpore T ſpectati, & vice verſâ. Namque hæ rationes eædem ſunt, atque ratio ſuperior compoſita.

Corol. 15. Et quoniam ſi, manentibus orbium ESE & PAB formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & ſi corporum S & T vel maneant, vel mutentur vires in datâ quâvis ratione; hæ vires (hoc eſt, vis corporis T, quâ corpus P de recto tramite in orbitam PAB deflectere, & vis corporis S, quâ corpus idem P de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo, & eadem proportione: neceſſe eſt, ut ſimiles

([f]) Vis ML eſt ad vim SK ſicut recta ML ad rectam SK; hoc eſt, ſi permagna fuerit corporis S diſtantia, ut TP ad ST, illis utiquè ML, TP, necnon SK, ST, quando diſtantia ST infinitè augetur, ipſam æqualitatis rationem ultimò induentibus. Hinc ſi litera A deſignet vim SK, erit vis ML $= \frac{A \times PT}{ST}$. Unde ſatis conſtat ratio illa compoſita virium ML, quam Newtonus allegavit. Rurſum diſtantiâ ST infinitè auctâ, rectæ MT, PL ultimò parallelæ & æquales fiunt. Quare et recta NM rectæ PL æqualis erit: nam ſi corpora T, P viribus eiſdem pro diſtantiarum ratione verſus S urgeantur, id quod ponendum eſt, punctum N ultimò cum ipſo T congruet. Quare recta NM rectæ PL ultimò æqualis fiet. Diſtantiâ autem ST infinitè auctâ, recta PL triplæ rectæ PK æqualis erit. Nimirum

les & proportionales ſint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut orbium diametri; angulares verò, iidem qui priùs; & errorum linearium ſimilium, vel angularium æqualium, tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, ſi dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & diſtantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno caſu, colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quàm proximè: ſed breviùs hâc methodo. Vires NM, ML, cæteris ſtantibus, ſunt ut radius TP, & harum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. X.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis P; & hinc errores angulares è centro T ſpectati (id eſt, tam motus augis & nodorum, quàm omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) ſunt, in quâlibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revolutionis quàm proximè (g). Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14. & in quolibet corporum T, P, S ſyſtemate, ubi P circum T ſibi propinquum, & T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inverſè. Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inverſè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis PAB non mutantur motus augis & nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cùm autem linea LM nunc major ſit nunc minor quàm radius PT, exponatur vis mediocris LM per radium illum

Nimirum cùm SL ſit ad SK ut quadratum ex SK ad quadratum ex SP, atque ipſæ SK, SP tantùm non æquales ſint Inde enim ſequetur duarum SL, SK differentiam, KL, duplam eſſe PK, quæ duarum SK, SP differentia eſt. Quare tota PL ejuſdem PK tripla erit. Dato autem angulo PTA, propter angulum ad K junctâ TK rectum, ratio rectæ PK ad PT data erit. Quare et triplæ PK, ſive illius PL, vel NM, ad PT ratio data. Sed PT, LM ultimò æquales. Ratio igitur NM ad ML data. Quare et vis NM ad vim ML ratio dabitur. Quam igitur vires ML inter ſe rationem habeant, eandem alteræ illæ NM habituræ ſunt. Unde conſtat id quod à Newtono affirmatum eſt.

(g) Nam errores angulares rationem inter ſe habebunt linearium directam, cum contrariâ radiorum TP compoſitam.

PT; & erit hæc ad vim mediocrem SK, vel SN, (quam exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST. Eſt autem vis mediocris SN vel ST, quâ corpus T retinetur in orbe ſuo circum S, ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe ſuo circum T, in ratione compoſitâ ex ratione radii ST ad radium PT, & ratione duplicatâ temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S ([h]). Et ex æquo, vis mediocris LM ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe ſuo circum T (quâve corpus idem P, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad diſtantiam PT revolvi poſſet) eſt in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unâ cùm diſtantiâ PT, datur vis mediocris LM; & eâ datâ, datur etiam vis MN quamproximè, per analogiam linearum PT, MN.

Corol. 18. Iiſdem legibus, quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum, ac corpori T concentricum; & ſingulæ annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis P peragendo, propiùs accedent ad corpus T, & celeriùs movebuntur in conjunctione & oppoſitione ipſarum & corporis S, quàm in quadraturis. Et nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum plano orbitæ corporis S vel T, quieſcent in ſyzygiis; extra ſyzygias verò movebuntur in antecedentia, & velociſſimè quidem in quadraturis, tardiùs aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completâque revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis T, ex materiâ non fluidâ conſtantem, ampliari & extendi uſque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor, per vices acceleratus & retardatus, ut in ſuperiore Corollario, in ſyzygiis velocior erit, in quadraturis tardior, quàm ſuperficies globi, & ſic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio corporis S, nullum acquiret motum fluxûs & refluxûs. Par eſt ra-

([h]) Prop. IV. Cor. 2.

tio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revol- ventis circa centrum ſuum (per legum Corol. 5.) ut & globi de curſu rectilineo uniformiter tracti (per legum Corol. 6.) Accedat autem corpus s, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem LM trahet aquam deorſum in quadraturis, facietque ipſam deſcendere uſque ad ſyzygias; & vis KL trahet eandem ſurſum in ſyzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus, & faciet ipſam aſcendere uſque ad quadraturas: niſi quatenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquatenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi: ſed oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyroſque compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſuâ contingat ipſum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſque oſcillabitur, & nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli, globo orbati, maximus inclinationis angulus eſt, ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit globo toti. Retinet globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: atque hâc ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas; dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eſt ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quàm juxta polos, vel conſtat ex materiâ paulo denſiore. Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcentis Corollarii vix inde mutabuntur; niſi quòd loca maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Aqua enim jam in orbe ſuo ſuſtinetur & permanet, non

per

De Motu Corporum per vim ſuam centrifugam, ſed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorſum maximè in quadraturis, & vis KL ſeu NM – LM trahit eandem ſurſum maximè in ſyzygiis. Et hæ vires conjunctæ deſinunt trahere aquam deorſum, & incipiunt trahere aquam ſurſum in octantibus ante ſyzygias; ac deſinunt trahere aquam ſurſum, incipiuntque trahere aquam deorſum in octantibus poſt ſyzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire poteſt in octantibus poſt ſyzygias, & minima in octantibus poſt quadraturas circiter; niſi quatenus motus aſcendendi vel deſcendendi ab his viribus impreſſus, vel per vim inſitam aquæ paulo diutiùs perſeveret, vel per impedimenta alvei paulo citiùs ſiſtatur.

Corol. 21. Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem verò diminuitur, & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur, vel rarior quàm juxta polos, orietur motus nodorum in conſequentia.

Corol. 22. Et inde viciſſim, ex motu nodorum innoteſcit conſtitutio globi. Nimirum ſi globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfectè circinatum in ſpatiis liberis primò quieſcere; dein impetu quocunque, obliquè in ſuperficiem ſuam facto, propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quàm in alium quemvis; perſpicuum eſt, quòd is axem ſuum, axiſque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ ſuperficiei parte, quâ priùs, impulſu quocunque novo; & cùm citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt, quòd hi duo impulſus, ſucceſſivè impreſſi, eundem producent motum, ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent; hoc eſt, eundem, ac ſi globus vi ſimplici ex utroque (per legum Corol. 2.) compoſitâ impulſus fuiſſet, atque ideo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt

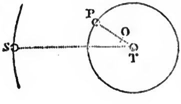
eſt ratio impulſûs ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motûs primi; ut & impulſûs primi facti in locum quemvis in æquatore motûs, quem impulſus ſecundus ſine primo generaret; atque ideo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: generabunt hi eundem motum circularem, ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit, & ad unum reducit; & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem, mutare poteſt. Si globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur verò alicubi inter polum & æquatorem materia nova, in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro ſui motûs, turbabit motum globi, facietque ut poli ejus errent per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuò deſcribant. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in caſu (per Corol. 21.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ratione (per Corol. 20.) nodi regredientur; vel denique, ex alterâ axis parte addendo materiam novam, quâ mons inter movendum libretur; & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo, vel æquatori, propiores.

PROP. LXVII. THEOR. XXVII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quòd corpus exterius s, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam Ellipſeos, umbilicum in centro eodem habentis, magis accedentem, quàm circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.*

Nam corporis S attractiones verſus T & P componunt ipſius attractionem

De Motu Corporum



attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum, O, quàm in corpus maximum T, quæque quadrato diſtantiæ SO magis eſt proportionalis reciprocè, quàm quadrato diſtantiæ ST: ut rem perpendenti facilè conſtabit.

PROP. LXVIII. THEOR. XXVIII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quòd corpus exterius S, *circa interiorum* P *&* T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam Ellipſeos, umbilicum in centro eodem habentis, magis accedentem, ſi corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quàm ſi id vel non attractum quieſcat, vel multo magis aut multo minùs attractum aut multo magis aut multo minùs agitetur.*

Demonſtratur eodem ferè modo cum Prop. LXVI. ſed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem ſic æſtimare. Ex demonſtratione Propoſitionis noviſſimæ liquet centrum, in quod corpus S conjunctis viribus urgetur, proximum eſſe communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quieſceret commune centrum gravitatis corporum trium; deſcriberent corpus S ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quieſcens, Ellipſes accuratas. Liquet hoc per Corollarium ſecundum Propoſitionis LVIII. collatum cum demonſtratis in Prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iſte motus ellipticus aliquantulum per diſtantiam centri duorum à centro, in quod tertium S attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima eſt perturbatio, ubi commune trium centrum quieſcit; hoc eſt, ubi corpus intimum & maximum T, lege cæterorum attrahitur: fitque major ſemper, ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis T, moveri incipit, & magis deinceps magiſque agitatur.

Corol. Et hinc, ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quòd orbitæ deſcriptæ propiùs accedent ad ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt ut eorum vires abſolutæ directè & quadrata diſtantiarum inverſè, ſe mutuò trahant agitentque, & orbitæ cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum, & ſic deinceps) quàm ſi corpus intimum quieſcat, & ſtatuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROP. LXIX. THEOR. XXIX.

In ſyſtemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D verſus A, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus B, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis A ad vim abſolutam attractivam corporis B, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus B, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis B verſus A, ad attractionem acceleratricem corporis A verſus B. Sed attractio acceleratrix corporis B verſus A eſt ad attractionem acceleratricem corporis A verſus B, ut maſſa corporis A ad maſſam corporis B; propterea quòd vires motrices, quæ (per definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ſunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hìc ſunt (per motûs legem tertiam) ſibi invicem æquales. Ergo abſoluta vis attractiva corporis A eſt ad ab-

ſolutam vim attractivam corporis B, ut maſſa corporis A ad maſſam corporis B. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi ſingula ſyſtematis corpora A, B, C, D, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem ut ſunt ipſa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, ſi ſingula ſyſtematis corpora A, B, C, D, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt vel reciprocè, vel directè, in ratione dignitatis cujuſcunque diſtantiarum à trahente, quæve ſecundum legem quamcunque communem ex diſtantiis ab unoquoque trahente definiuntur; conſtat quòd corporum illorum vires abſolutæ ſunt ut corpora.

Corol. 3. In ſyſtemate corporum, quorum vires decreſcunt in ratione duplicatâ diſtantiarum, ſi minora circa maximum in Ellipſibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quàm fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis deſcribant areas temporibus quàm maximè proportionales: erunt corporum illorum vires abſolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & contrà. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His Propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem attractionis hîc generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: ſive conatus iſte fiat ab actione corporum, vel ſe mutuò petentium,

(ᵗ) Nam ſi à punctis I, K in rectas HP, PL intelligantur rectæ ad perpendiculum deduci, deductæ illæ rectarum IP, PK inter ſe proportionem gerent; utpote quæ angulorum ad P æqualium ſunt ſinus pro radiis inæqualibus IP, PK. Sed, propter circulum, IP : PK = HP : PL. Quare rectæ à punctis I, K in rectas HP, PL ad perpendiculum deductæ, eæ ipſarum HP, PL inter ſe proportionem gerent; et in omni magnitudine angulorum circum P iſta proportionum ſimilitudo manebit.

Evaneſcentibus

petentium, vel per ſpiritus emiſſos ſe invicem agitantium; ſive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuſcunque, ſeu corporei ſeu incorporei, oriatur, corpora innatantia in ſe invicem utcunque impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem impulſûs, non ſpecies virium & qualitates phyſicas, ſed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens, ut in definitionibus explicui. In Matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequentur: deinde, ubi in Phyſicam deſcenditur, conferendæ ſunt hæ rationes cum phænomenis; ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus phyſicis tutiùs diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora ſphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuò agere; & quales motus inde conſequantur.

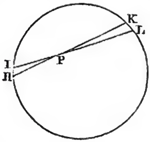
SECTIO XII.

De corporum ſphæricorum viribus attractivis.

PROP. LXX. THEOR. XXX.

Si ad ſphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quòd corpuſculum, intra ſuperficiem conſtitutum, his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit HIKL ſuperficies illa ſphærica, & P corpuſculum intùs conſtitutum. Per P agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ HK, IL, arcus quàm minimos HI, KL intercipientes; &, ob triangula HPI, LPK (per Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis HP, LP proportionales([a]); & ſuperficiei ſphæricæ particulæ quævis ad HI & KL, rectis per punctum P tranſeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ



Evaneſcentibus igitur angulis IPH, KPL, deductæ illæ ſimul evaneſcentes rectarum HP, PL rationem vel ultimò ſervabunt. Sed evaneſcentibus angulis illis, arcus IH, KL evaneſcunt, & deductarum rationem ultimò induunt. Nempe cùm arcus illi ſint ultimò ad deductas, ut radius ad ſinus angulorum IHP, KLP ultimò æqualium. Deductarum igitur ratio ultima, ea arcuum inter ipſos ultima erit. Erunt igitur arcus HI, KL ultimò inter ſe, ſicut rectæ HP, PL.

 directè,

directè, & quadrata diſtantiarum inverſè. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, ſe mutuò deſtruunt. Et ſimili argumento, attractiones omnes per totam ſphæricam ſuperficiem à contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.

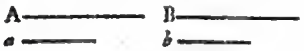
PROP. LXXI. THEOR. XXXI.

Iiſdem poſitis, dico quòd corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum ſphæræ, vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

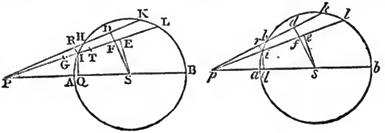
Sint AHKB, *ahkb* æquales duæ ſuperficies ſphæricæ, centris S, *s*, diametris AB, *ab* deſcriptæ, & P, *p* corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur à corpuſculis lineæ PHK, PIL, *phk*, *pil*, auferentes à circulis maximis AHB, *ahb*, æquales arcus HK, *hk*, & IL, *il*: et ad eas demittantur perpendicula SD, *sd*; SE, *se*; IR, *ir*; quorum SD, *sd* ſecent PL, *pl* in F & *f*: demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, *iq*. Evaneſcant anguli DPE, *dpe*: & ob æquales DS & *ds*, ES & *es*; lineæ PE, PF, & *pe*, *pf*; & lineolæ DF, *df*, pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, *dpe* ſimul evaneſcentibus, eſt æqualitatis.

(b) *Et conjunctis rationibus.* Quæ ſequuntur ad argumenta purioris Geometriæ hoc modo revocari poſſint.

Capiatur PG ad quam PF rationem habeat quam *pf* ad *pi*; et PT ad quam PS rationem habeat eam quam *ps* ad *pi*. Jam cùm IH habeat ultimò ad *ih* rationem eam, quam rectangulum PI × *pf* ad rectangulum PF × *pi*; ſive eam, quæ componitur è rationibus rectæ PI ad rectam PF, rectæque *pf* ad *pi*; harum verò poſterior, ea utique quam *pf* habet ad *pi*, eadem ſit quam PF habet ad PG: idcirco habebit IH ad *ih* ultimò rationem quæ componitur è rationibus rectæ PI ad PF rectæque PF ad PG; eam igitur quam PI ad PG. Simili modo, eo quòd IQ ſit ad *iq* ut rectangulum PI × *ps* ad rectangulum PS × *pi*, quodque *ps* ſit ad *pi* ut PS ad PT; obtinebimus IQ eſſe ad *iq* ut PI ad PT. Cùm igitur ſit IH ad *ih* ut PI ad PG, et IQ ad *iq* ut PI ad PT, erit rectangulum IH × IQ ad rectangulum *ih* × *iq*, ultimò ſcilicet angulis HPI, *hpi* infinitè imminutis, ut quadratum ex PI ad rectangulum PG × PT. At verò ratio illa, quam, angulis HPI, *hpi* infinitè imminutis, evaneſcentia illa IH × IQ, *ih* × *iq* inter ſe ultimam habent, ea zonarum quoque evaneſcentium, quarum latitudines ſunt arcus IH, *ih*, ultima inter ipſas erit. Quare zona evaneſcens, cujus latitudo arcus IH, erit ultimò ad zonam evaneſcentem, cujus latitudo *ih*, ut quadratum ex PI ad rectangulum PG × PT. Eademque partium ſimilium harum zonarum ultima erit inter ipſas ratio. Planis igitur circulorum maximorum quorum, in ſphærâ utrâque, diametri ſint communes illæ AB, *ab*, quæ centra ſphærarum cum corporum centris conjungunt, talium inquam circulorum planis dividi intelligantur illæ zonæ in partes ſimiles. Exponatur recta A datæ cujuſvis longitudis; ſitque alia *a* eâ lege mutabilis, ut latitudinibus zonarum quovis modo mutatis, necnon partium utriuſque ſimilium magnitudinibus, recta *a* habeat ad alteram A rationem eam, quam vires, quibus zonæ *ih* pars aliqua, ex iis in quas eam dividi poſuimus, corpus *p* ſollicitat, ad vires quibus pars cognata zonæ IH ſollicitat corpus P. Latitudinibus zonarum infinitè imminutis, necnon partium, in quas ſimiliter



æqualitatis. His itaque conſtitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF, & *pf* ad *pi* ut *df* vel DF ad *ri*; & ex æquo PI × *pf* ad PF × *pi* ut RI ad *ri*, hoc eſt (per Corol. 3. Lem. VII.) ut arcus IH ad arcum *ib*.



Rurſus PI ad PS ut IQ ad SE, & *ps* ad *pi* ut *se* vel SE ad *iq*; & ex æquo PI × *ps* ad PS × *pi* ut IQ ad *iq*. Et conjunctis rationibus (b) PI *quad.* × *pf* × *ps* ad *pi quad.* × PF × PS, ut IH × IQ ad *ib* × *iq*; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus *ib* convolutione ſemicirculi *akb* circa diametrum *ab* deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & *p*, ſunt (per hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies directè, & quadrata diſtantiarum ſuperficierum à corporibus inverſè, hoc eſt, ut *pf* × *ps* ad PF × PS. Suntque hæ

liter ſunt diviſæ, magnitudinibus, numero ſcilicet partium illarum infinitè aucto, vires, quibus præditæ ſunt zonarum partes cognatæ planis LPB, KPB, *lpb*, *kpb* interceptæ, evaneſcentibus utique angulis KPL, *kpl*, corpora P, *p* ſecundum rectas PI, *pi* ultimò totæ trahunt. Unde rationem inter ſe ultimò habebunt eam, quæ componitur è rationibus partium illarum directâ, diſtantiarumque PI, *pi* duplicatâ contrariè ſumptâ; hoc eſt, eam quæ componitur è rationibus quadrati ex PI ad rectangulum PG × PT, quadratique ex *pi* ad quadratum ex PI. Invertendo, vis, quâ ultimò pars zonæ *ib*, planis *lpb*, *kpb* intercepta, trahit corpus *p* ſecundum rectam *pi*, ad vim, quâ ultimò cognata pars zonæ IH trahit corpus P ſecundum rectam PI, rationem habet quæ componitur è rationibus rectanguli PG × PT ad quadratum ex PI, quadratique ex PI ad quadratum ex *pi*; hoc eſt eam, quam rectangulum PG × PT ad quadratum ex *pi*; ſive eam, quæ componitur è rationibus rectæ PG ad *pi* rectæque PT ad *pi*; hoc eſt, è rationibus rectæ PF ad *pf*, rectæque PS ad *ps* (nempe cùm ſit PF : PG = *pf* : *pi*, et PS : PT = *ps* : *pi*) hoc eſt, eam quam rectangulum PF × PS habet ad rectangulum *pf* × *ps*. Eademque rectarum *a*, A erit ratio ultima. Sint B, *b* rectæ, ad quas A, *a* rationes ſingulatim habeant eas, quas vires totæ, quibus trahuntur corpora P, *p* ſecundum rectas PI, *pi* à zonarum partibus cognatis infinitè imminutis, ad virium illarum partes illas, quæ, reſolutione virium per legum Cor. 2. factâ, ad centra ſphærarum tendunt. Erit igitur A ad B ut PI ad PQ, ſive ut PS ad PF. Et *a* ad *b* ut *pi* ad *pq*, ſive ut *ps* ad *pf*.

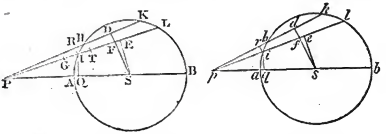
Jam verò cùm ſit $B : A = PF : PS = PF \times PS : PS^2$

et $A : a = \quad = pf \times ps : PF \times PS$ (ex modo oſtenſis) ex æquo perturbatè erit $B : a = pf \times ps : PS^2$. Unde cùm ſit etiam $a : b = ps : pf = ps^2 : pf \times ps$ ex æquo perturbatè erit $B : b = ps^2 : PS^2$.

Vires igitur quibus cognatæ ſphæricarum ſuperficierum partes corpora P, *p* verſus centra trahunt, rationem duplicatæ diſtantiarum à centris contrariam inter ſe gerunt. Et cùm ſimili argumento de quibuſvis partibus cognatis idem obtinendum ſit, vires, quibus ſuperficies totæ corpora verſus centra trahant, eandem inter ſe rationem gerent. (Geometr. Flux. Th. IV.)

vires

vires ad ipſarum partes obliquas, quæ (factâ per legum Corol. 2. reſolutione virium) ſecundum lineas PS, *ps* ad centra tendunt, ut



PI ad PQ, & *pi* ad *pq*; id eſt (ob ſimilia triangula PIQ & PSF, *piq* & *psf*) ut PS ad PF & *ps* ad *pf*. Unde, ex æquo, fit attractio corpuſculi hujus P verſus S ad attractionem corpuſculi *p* verſus *s*, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt, ut *ps quad.* ad PS *quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum KL, *kl* deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut *ps quad.* ad PS *quad.* inque eâdem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraque ſuperficies ſphærica, capiendo ſemper *sd* æqualem SD, & *se* æqualem SE, diſtingui poteſt. Et, per compoſitionem, vires totarum ſuperficierum ſphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eâdem ratione. Q. E. D.

PROP. LXXII. THEOR. XXXII.

Si ad ſphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; ac detur tum ſphæræ denſitas, tum ratio diametri ſphæræ ad diſtantiam corpuſculi à centro ejus: dico quòd vis, quâ corpuſculum attrahitur, proportionalis erit ſemidiametro ſpæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim à ſphæris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & diſtantias eorum à ſphærarum centris proportionales eſſe diametris ſphærarum reſpectivè, ſphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas ſphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas ſphæræ alterius, in ratione compoſitâ ex ratione particularum directè & ratione duplicatâ diſtantiarum

tiarum inverſè. Sed particulæ ſunt ut ſphæræ, hoc eſt, in ratione triplicatâ diametrorum; & diſtantiæ ſunt ut diametri; & ratio prior directè unà cum ratione poſteriore bis inverſè eſt ratio diametri ad diametrum. LIBER PRIMUS.

Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis, circa ſphæras ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ à centris ſphærarum proportionales earundem diametris: tempora periodica erunt æqualia.

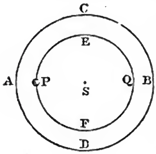
Corol. 2. Et vice verſâ, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

Corol. 3. Si ad ſolidorum duorum quorumvis, ſimilium & æqualiter denſorum, puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; vires, quibus corpuſcula, ad ſolida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri ſolidorum.

PROP. LXXIII. THEOR. XXXIII.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quòd corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

In ſphærâ ABCD, centro S deſcriptâ, locetur corpuſculum P; & centro eodem S, intervallo SP, concipe ſphæram interiorem PEQF deſcribi. Manifeſtum eſt (per Prop. LXX.) quòd ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia AEBF componitur, attractionibus ſuis per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus P. Reſtat ſola attractio ſphæræ interioris PEQF. Et (per Prop. LXXII.) hæc eſt ut diſtantia PS. Q. E. D.



Scholium.

Superficies, ex quibus ſolida componuntur, hîc non ſunt purè mathematicæ,

De Motu Corporum

mathematicæ, ſed orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo inſtar nihili ſit; nimirum orbes evaneſcentes, ex quibus ſphæra ultimò conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies, & ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROP. LXXIV. THEOR. XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quòd corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrabitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

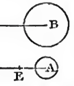
Nam diſtinguatur ſphæra in ſuperficies ſphæricas innumeras concentricas; & attractiones corpuſculi, à ſingulis ſuperficiebus oriundæ, erunt reciprocè proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi à centro (per Prop. LXXI.) Et componendo, fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in ſphæram totam, in eâdem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis à centris homogenearum ſphærarum attractiones ſunt ut ſphæræ (). Nam (per Prop. LXXII.) ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris ſphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illâ ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc eſt, in ratione ſphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut ſphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum, extra ſphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem ſphæra ex particulis attractivis; decreſcet

() Sint ſphæræ homogeneæ A, B, et ad æquales à centris earum diſtantias collocata puta corpora C, D. Dicit Newtonus vim, quâ corpus C urgetur verſus centrum ſphæræ A, eſſe ad vim, quâ corpus D urgetur verſus centrum ſphæræ B, ſicut ſphæra ipſa A ad ipſam B. Capiatur enim AE quæ ſit ad BD vel illi æqualem AC ut diameter ſphæræ A ad diametrum ſphæræ B; et in ipſo puncto E collocatum puta corpus tertium. Jam vis quâ corpus D urgetur verſus B erit ad vim quâ corpus E urgetur verſus A ut diameter ſphæræ B ad diameter ſphæræ A (per Prop. LXXVII.) Et vis quâ corpus E urgetur verſus A erit ad vim quâ corpus C urgetur verſus A, ut quadratum ex AC ad quadratum AE, hoc eſt, ut quadratum è diametro ſphæræ B ad quadratum è diametro ſphæræ A. Ex æquo vis qua corpus D urgetur verſus B ad vim quâ corpus C urgetur verſus A rationem habet quæ componitur è rationibus diametri ſphæræ B ad diametrum ſphæræ A, quadratique ex diametro



creſcet vis particulæ cujuſque in duplicatâ ratione diſtantiæ à particulâ. LIBER PRIMUS.

PROP. LXXV. THEOR. XXXV.

Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; dico quòd ſphæra quævis alia ſimilaris ab eâdem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ ſuæ à centro ſphæræ trahentis (per Prop. LXXIV.) & propterea eadem eſt, ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus ſphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt, quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modò illud à ſingulis ſphæræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ à centro ſphæræ; ideoque huic æqualis attractio ſphæræ eſt in eâdem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones ſphærarum, verſus alias ſphæras homogeneas, ſunt ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum à centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi ſphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius eâdem vi, quâ ab ipſis viciſſim trahuntur; ideoque, cùm in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quàm punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ ſuperiùs de motu corporum circa umbilicum conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent, ubi

diametro ſphæræ B ad quadratum ex diametro ſphæræ A; hoc eſt eam, quæ eſt cubi ex diametro ſphæræ B ad cubum ex diametro ſphæræ A; ſive eam, quæ eſt ſphæræ ipſius B ad ſphæram ipſam A. Q. E. D. *(Eadem ferè in notis ſuis MSS. Gregorius.)*

Cor. H. 1. In æqualibus diſtantiis à centris ſphærarum, quarum denſitates ſint diverſæ, ſingularum tamen uniformis, attractiones erunt inter ſe ut ſphærarum corpora; hoc eſt, ut ſphæræ & denſitates conjunctim.

Cor. H. 2. Vis, quâ ſphæra quælibet homogenea corpuſculum quodvis, ad datam à centro diſtantiam poſitum, in centrum trahit, eadem eſt, ac ſi materia omnis ſphæræ in ipſo centro conglobata eſſet. Nam, radio ſphæræ ſenſim ſe contrahente, puta concretione quâdam materiæ effici, ut corpus maneat. Manebit igitur vis attrahendi (per Cor. H. 1.) Et ſi radio ad minimum redacto corpus uſque maneat, manebit uſque cum corpore vis attrahendi.

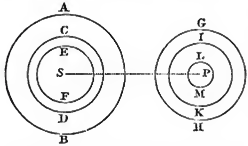
ſphæra attrahens locatur in umbilico, & corpora moventur extra ſphæram.

Corol. 4. Ea verò, quæ de motu corporum circa centrum conicarum ſectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra ſphæram.

PROP. LXXVI. THEOR. XXXVI.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſunt undique ſimilares ; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis attracti : dico, quòd vis tota, quâ hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto ſphæræ quotcunque concentricæ ſimilares AB, CD, EF, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem ; & hæ (per Prop. LXXV.) trahent ſphæras alias quotcunque concentricas ſimilares GH, IK, LM, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciprocè proportionalibus quadrato diſtantiæ SP. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias ; hoc eſt, vis, quâ ſphæra tota, ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita, AB, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam, GH ; erit in eâdem ratione. Augeatur numerus ſphærarum concentricarum in infinitum, ſic ut materiæ denſitas unà cum vi attractivâ, in progreſſu à circumferentiâ ad centrum, ſecundum legem quamcunque creſcat vel decreſcat ; &, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis denſitas deficiens, eò ut ſphæræ acquirant formam quamvis optatam ; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum ſuperius, in eâdem illâ diſtantiæ quadratæ ratione inverſâ. Q. E. D.



Corol.

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi ſphæræ complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuò trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut ſphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, ſeu pondera ſphærarum in ſphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa directè & quadrata diſtantiarum inter centra inverſè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractivâ mutuo exercitâ in ſphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervatâ.

Corol. 6. Si hujuſmodi ſphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas; ſintque diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et viciſſim, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris.

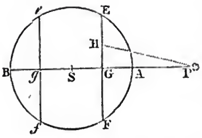
Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperiùs de motu corporum circa umbilicos conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent; ubi ſphæra attrahens, formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia ſunt etiam ſphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

PROP. LXXVII. THEOR. XXXVII.

Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum à corporibus attractis: dico quòd vis compoſita, quâ ſphæræ duæ ſe mutuò trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.

Caſ. 1. Sit AEBF ſphæra; S centrum ejus; P corpuſculum attractum, PASB axis ſphæræ per centrum corpuſculi tranſiens; EF, *ef* plana duo, quibus ſphæra ſecatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter diſtantia à centro ſphæræ; G, *g* interſectiones



ſectiones planorum & axis; & H punctum quodvis in plano EF. Puncti H vis centripeta in corpuſculum P, ſecundum lineam PH exercita, eſt ut diſtantia PH; & (per legum Corol. 2.) ſecundum lineam PG, ſeu verſus centrum S, ut longitudo PG. Igitur punctorum omnium in plano EF, hoc eſt plani totius vis, quâ corpuſculum P trahitur verſus centrum S, eſt ut diſtantia PG multiplicata per numerum punctorum; id eſt, ut ſolidum quod continetur ſub plano ipſo EF & diſtantia illa PG. Et ſimiliter, vis plani *ef*, quâ corpuſculum P trahitur verſus centrum S, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam P*g*, ſive ut huic æquale planum EF ductum in diſtantiam illam P*g*; & ſumma virium plani utriuſque ut planum EF ductum in ſummam diſtantiarum PG+P*g*, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & corpuſculi diſtantiam PS, hoc eſt, ut duplum planum EF ductum in diſtantiam PS, vel ut ſumma æqualium planorum EF+*ef* ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in ſphæra tota, hinc inde æqualiter à centro ſphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam PS, hoc eſt, ut ſphæra tota & ut diſtantia PS conjunctim. Q. E. D.

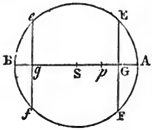
Caſ. 2. Trahit jam corpuſculum P ſphæram AEBF. Et eodem argumento probabitur quòd vis, quâ ſphæra illâ trahitur, erit ut diſtantia PS. Q. E. D.

Caſ. 3. Componatur jam ſphæra altera ex corpuſculis innumeris P; & quoniam vis, quâ corpuſculum unumquodque trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi à centro ſphæræ primæ & ut ſphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem eſt, ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro ſphæræ; vis tota, quâ corpuſcula omnia in ſphærâ ſecundâ trahuntur, hoc eſt, quâ ſphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac ſi ſphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſculo unico in centro ſphæræ primæ, & propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra ſphærarum. Q. E. D.

Caſ. 4. Trahant ſphæræ ſe mutuò, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. Q. E. D.

Caſ.

Caſ. 5. Locetur jam corpuſculum p intra ſphæram AEBF; & quoniam vis plani ef in corpuſculum eſt ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantia pg; & vis contraria plani EF ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantiâ pG; erit vis ex utrâque compoſita ut differentia ſolidorum; hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in ps diſtantiam corpuſculi à centro ſphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium EF, ef in ſphærâ totâ, hoc eſt, attractio ſphæræ totius, eſt conjunctim ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, & ut ps, diſtantia corpuſculi à centro ſphæræ. Q. E. D.



PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quòd vis tota, quâ hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuò trahunt, ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.

Demonſtratur ex Propoſitione præcedente eodem modo, quo Propoſitio LXXVI. ex Propoſitione LXXV. demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperiùs in Propoſitionibus X & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum ſphæricorum conditionis jam deſcriptæ, & attracta corpora ſunt ſphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

Attractionum caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicatâ diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque caſu ut corpora gyrentur in conicis ſectionibus, & componentes corporum ſphæricorum vires centripetas eâdem lege, in receſſu à centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: quod eſt notatu

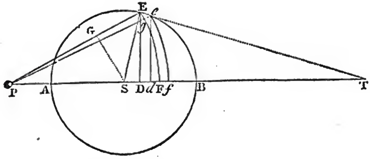
DE MOTU CORPORUM

notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minùs elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare, ut ſequitur.

LEMMA XXIX.

Si deſcribantur, centro S, *circulus quilibet* AEB, *&, centro* P, *circuli duo* EF, *ef, ſecantes priorem in* E, *e, lineamque* PS *in* F, *f; & ad* PS *demittantur perpendicula* ED, *ed: dico quòd, ſi diſtantia arcuum* EF, *ef in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis* Dd *ad lineam evaneſcentem* Ff *ea ſit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam ſi linea P*e* ſecet arcum EF in *g*; & recta E*e*, quæ cum arcu evaneſcente E*e* coincidit, producta occurrat rectæ PS in T; & ab S demittatur in PE normalis SG: ob ſimilia triangula DTE, *d*T*e*, DES; erit D*d* ad E*e*, ut DT ad TE, ſeu DE ad ES; & ob tri-



angula E*eg*, ESG (per Lem. VIII. & Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia [c], erit E*e* ad *eg*, ſeu F*f*, ut ES ad SG; & ex æquo, D*d* ad F*f* ut DE ad SG; hoc eſt (ob ſimilia triangula PDE, PGS) ut PE ad PS. Q. E. D.

PROP.

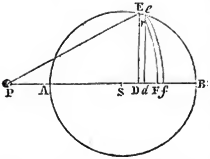
[c] Anguli recti PEF, SEB inter ſe æquales ſunt. Ablatoque communi SEF, relinquentur PES, ſive GES, *eEg* inter ſe æquales. Anguli autem ad G et *g* æquales, namque recti. Quapropter triangula GES, *gEe* erunt inter ſe ſimilia.

[d] Nimirum vis quâ corpuſculum in P poſitum trahitur verſus centrum S ab annulo evaneſcente ſphærico, converſione evaneſcentis arcûs EF genito, fluxio eſt virium, quibus corpus idem trahitur verſus idem centrum S à ſuperficie ſphæricâ, quæ converſione arcûs integri EF generatur. Ex iis autem quæ hactenus à Newtono diſputata ſunt, id ſcilicet efficitur, illam virium fluxionem rectanguli $PD \times Dd$, ſive $PD \times \dot{\overline{FD}}$, ſive $PD \times \dot{\overline{FD}}$, rationem conſtanter ſervare. Sive ſpatii $PF \times \dot{\overline{FD}} - FD \times \dot{\overline{FD}}$. Hujus autem ſpatii ſpatium $PF \times FD - \frac{1}{2} FD^2$ fluens erit. Quare vires ipſæ ſpatii PF ×

PROP. LXXIX. THEOR. XXXIX.

Si ſuperficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evaneſcens EF*fe, convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum ſphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quòd vis, quâ ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſitâ ex ratione ſolidi* DE$q \times$ F*f*, *&* *ratione vis, quâ particula data in loco* F*f traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primò conſideremus vim ſuperficiei ſphæricæ EF, quæ convolutione arcûs FE generatur, & à linea *de* ubivis ſecatur in *r*; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcûs *r*E genita, ut lineola D*d*, manente ſphæræ radio PE (uti demonſtravit *Archimedes* in Lib. de *Sphærâ* & *Cylindro*.) Et hujus vis, ſecundum lineas, PE vel P*r*, undique in ſuperficie conicâ ſitas, exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola D*d*, vel, quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato ſphæræ radio PE & lineolâ illâ D*d*: at ſecundum lineam, PS, ad centrum S tendentem, minor in ratione PD ad PE, ideoque ut PD$\times$D*d*. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur D*d*; & ſuperficies FE dividetur in totidem æquales annulos; quorum vires erunt ut ſumma omnium PD$\times$D*d*, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}$PFq $-$ $\frac{1}{2}$PDq, ideoque ut DE *quad* ([d]). Ducatur jam ſuperficies FE in altitudinem F*f*; & fiet ſolidi EF*fe* vis exercita in corpuſculum P ut DE$q\times$F*f*: puta ſi detur vis, quam particula aliqua data, F*f*, in diſtantiâ PF exercet



FD $-$ $\frac{1}{2}$ FD², vel inter ſe rationem gerent, vel datis majores minoreſve erunt, quàm ut rationem illam gerere poſſint. (Geometr. Flux. Th. IV.) Evaneſcente FD punctum D tandem cum ipſo F jungatur, rectaque FD in nihilum abeat. Superficies ipſa ſphærica FE, cum viribus ſuis ſimul in nihilum abierit. Non igitur datis majores minoreſve erunt vires illæ, quàm ut ſpatii illius inter ſe rationem gerant, quocum unà in nihilum abierint. Gerent igitur conſtanter ſpatii PF $\times$ FD $-$ $\frac{1}{2}$ FD² inter ſe rationem. Junctâ verò FE, dimidium quadrati ex FE rectangulo PF $\times$ FD æquale erit. Quare PF $\times$ FD $-$ $\frac{1}{2}$ FD² differentiæ quadratorum ex EF, FD dimidium erit; hoc eſt, dimidium quadratum ex ED. Vires igitur, quibus ſuperficies ſpherica converſione arcûs EF genita corpuſculum in P poſitum verſus S trahunt, quæcunque fuerit arcûs illius amplitudo, quadrati ex ED, hoc eſt, è ſinu arcûs, rationem inter ſe conſtanter gerunt, ſicut Newtonus affirmavit.

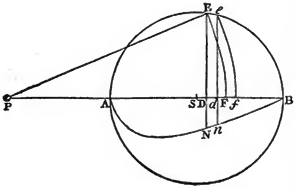
in

in corpuſculum P. At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi EF*fe* ut ſolidum DE*q* × F*f* & vis illa non data conjunctim. Q. E. D.

PROP. LXXX. THEOR. XL.

Si ad ſphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad ſphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis,* D, *perpendicula,* DE, *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitates* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particula, ſita in axe ad diſtantiam* PE, *exercet in corpuſculum* P, *conjunctim: dico quòd vis tota, quâ corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuò tangit.*

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem ſphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales D*d*, & ſphæram totam dividi in totidem laminas ſphæricas concavo-convexas EF*fe*; & erigatur perpendiculum *dn*. Per Theorema ſuperius, vis, quâ lamina EF*fe* trahit corpuſculum P, eſt ut DE*q* × F*f* & vis particulæ unius ad diſtantiam PE vel PF exercita conjunctim. Eſt autem (per Lemma noviſſimum) D*d* ad F*f* ut PE ad PS, & inde F*f* æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & DE*q* × F*f* æquale D*d* in $\frac{DEq \times PS}{PE}$; & propterea vis laminæ EF*fe* eſt ut D*d* in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam PF exercita conjunctim, hoc eſt (ex hypotheſi) ut DN × D*d*, ſeu area evaneſcens DN*nd*. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes DN*nd*; hoc eſt, ſphæræ vis tota ut area tota ANB. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat DN ut DE*q* ×

$\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, quâ corpuſculum à ſphærâ attrahitur, ut area ANB. Liber Primus.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciprocè ut diſtantia corpuſculi à ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, quâ corpuſculum P à ſphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

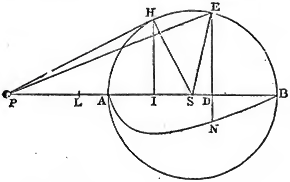
Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciprocè ut cubus diſtantiæ corpuſculi à ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, quâ corpuſculum à totâ ſphærâ attrahitur, ut area ANB.

Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciprocè ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, quâ corpuſculum à ſphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

PROP. LXXXI. PROB. XLI.

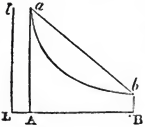
Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt area ANB.

A puncto P ducatur recta PH ſphæram tangens in H, & ad axem PAB demiſſâ normali HI, biſecetur PI in L; & erit (per Prop. XII. Lib. 2. Elem.) PEq æquale PSq+SEq+2PSD. Eſt autem SEq ſeu SHq (ob ſimilitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale eſt contento ſub PS & PS+SI+2SD, hoc eſt, ſub PS & 2LS + 2SD, id eſt, ſub PS & 2LD. Porro DE *quad.* æquale eſt SEq − SDq, ſeu SEq − LSq + 2SLD − LDq, id eſt, 2SLD − LDq − ALB. Nam LSq − SEq, ſeu LSq − SAq (per Prop. VI. Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque 2SLD − LDq − ALB pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ ſecundùm Corollarium quartum Propoſitionis præcedentis eſt ut longitudo ordinatim applicatæ DN, reſolvet ſeſe in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi ſi pro V ſcribatur ratio inverſa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale



tionale inter PS & 2LD; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per methodos vulgatas innoteſcunt. Q. E. F.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciprocè ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE; dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data 2SL ducta in longitudinem AB deſcribet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege, ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini LD, deſcribet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de areâ priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream hyperbolicam; quæ ſubducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam ANB. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipſi LB, & Bb ipſi LA æquetur. Aſymptotis Ll, LB, per puncta a, b deſcribatur hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæſitæ ANB æqualem.

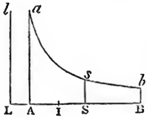


Exempl. 2. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciprocè ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PE\ cub.}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id

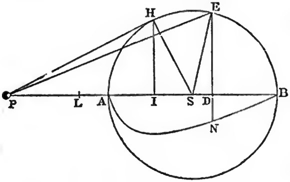
(c) Nimirum $AS^2 = SH^2 = PS \times SI$. Et $PS \times SI = LS^2 - LI^2$; nempe cùm recta PI in puncto L media ſit diviſa. Hinc $LI^2 = LS^2 - SA^2 = ALB$. Quare $LI = \sqrt{ALB}$. Sed $2SI = 2LS - 2LI = LB + AL - 2\sqrt{ALB}$. Quare $\sqrt{2.SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{AL}$. Et $\frac{1}{\sqrt{2SI}} \times \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{ALB}} \left(= \frac{1}{\sqrt{2.SI}} \times \overline{\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{ALB}} = \frac{1}{LI}$. Hinc areas primam ſecundamque illis, $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq, ſingulatim æquari ſatis patet. Tertiæ reductio hujuſcemodi erit. $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2.SI}} \times \overline{\frac{1}{LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{LB^{\frac{3}{2}}}} = \frac{SI^2 \times ALB}{3.\overline{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}}} \times \frac{\overline{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}}{ALB^{\frac{3}{2}}} =$

SI²

id eſt, (ob continuè proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$.
Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; ſecunda $\frac{1}{2}$SI, aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$, aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2}AB \times SI$. De primâ ſubducatur ſumma ſecundæ & tertiæ, & manebit area quæſita ANB. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, S, B, erige perpendicula L*l*, A*a*, S*s*, B*b*, quorum S*s* ipſi SI æquetur, perque punctum *s*, aſymptotis L*l*, LB, deſcribatur hyperbola *asb*, occurrens perpendiculis A*a*, B*b* in *a* & *b*; & rectangulum 2ASI ſubductum de area hyperbolica A*asb*B relinquet aream quæſitam ANB.



Exempl. 3. Si vis centripeta, ad ſingulas ſphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicatâ ratione diſtantiæ à particulis; ſcribe $\frac{PEqq.}{2AS\ cub.}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\overline{\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\overline{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\overline{\frac{1}{\sqrt{LA\ cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\ cub.}}}$. Et hæ poſt debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SI$q$, & SI$q$ + $\frac{2SI\ cub.}{3LI}$ (e). Hæ verò, ſubductis poſterioribus de priore, evadunt $\frac{4SI\ cub.}{3LI}$. Proinde vis



$\frac{SI^2}{3.\overline{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}}} \times \frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{ALB|^{\frac{1}{2}}} = \frac{SI^2}{3.LI} \times \frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = \frac{SI^2}{3LI} \times LB + LB^{\frac{1}{2}} \times LA^{\frac{1}{2}} + LA = \frac{SI^2}{3LI} \times \overline{LB + LI + LA}$. Jam verò $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$. Quare $\frac{SI^2}{3LI} \times LB + LI + LA = \frac{SI^2}{3LI} \times \overline{2SI + 3LI}$. Quare $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2.SI}} \times \overline{\frac{1}{LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{LB^{\frac{3}{2}}}} = \frac{SI^2}{3LI} \times \overline{2SI + 3LI} = SI^2 + \frac{2SI^3}{LI}$. Q. E. D. *(Le Sœur & Jacquier ad locum.)*

tota,

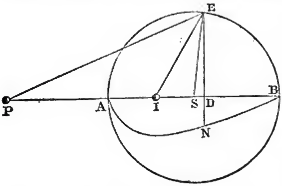
tota, quâ corpuſculum P in ſphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SI\ cub.}{PI}$, id eſt, reciprocè ut PS *cub.* × PI. Q. E. I.

Eâdem methodo determinari poteſt attractio corpuſculi ſiti intra ſphæram; ſed expeditiùs per Theorema ſequens.

PROP. LXXXII. THEOR. XLI.

In ſphærâ centro S *intervallo* SA *deſcriptâ, ſi capiantur* SI, SA, SP *continuè proportionales: dico quòd corpuſculi intra ſphæram, in loco quovis* I, *attractio eſt ad attractionem ipſius extra ſphæram, in loco* P, *in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro* IS, PS, *&* *ſubduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut, ſi vires centripetæ particularum ſphæræ ſint reciprocè ut diſtantiæ corpuſculi à ſe attracti; vis, quâ corpuſculum ſitum in I trahitur à ſphærâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in P, in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiæ SI ad diſtantiam SP, & ratione ſubduplicatâ vis centripetæ in loco I, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco P ab eâdem in centro particulâ oriundam, id eſt, ratione ſubduplicatâ diſtantiarum SI, SP ad invicem reciprocè. Hæ duæ rationes ſubduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in I & P à ſphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum ſphæræ ſunt reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum, colligetur quod attractio in I ſit ad attractionem in P, ut diſtantia SP ad ſphæræ ſemidiametrum SA: ſi vires illæ ſunt reciprocè in triplicatâ ratione diſtantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.*



ſi in quadruplicatâ, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cùm attractio in P, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciprocè ut PS *cub.* × PI, attractio in I erit reciprocè ut SA *cub.* × PI, id eſt (ob datum SA *cub.*) reciprocè ut PI. Et ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema verò ſic demonſtratur.

Stantibus

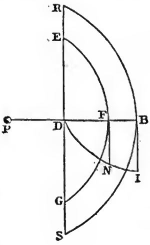
Stantibus jam antè conſtructis, & exiſtente corpuſculo in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo ſi agatur IE, ordinata illa, pro alio quovis corpuſculi loco I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, è ſphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus n deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$; quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continuè proportionales SI, SE, SP, ſimilia ſunt triangula SPE, SEI, & inde fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n (ob proportionales IE ad PE ut IS ad SA) ſubduplicata eſt ratio virium in diſtantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ, quas ordinatæ deſcribunt, hiſque proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatis illis rationibus. Q. E. D.

LIBER PRIMUS.

PROP. LXXXIII. PROB. XLII.

Invenire vim quâ corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro ſphæræ, & RBSD ſegmentum ejus plano RDS & ſuperficie ſphæricâ RBS contentum. Superficie ſphæricâ EFG centro P deſcriptâ ſecetur DB in F, ac diſtinguatur ſegmentum in partes BREFGS, FEDG. Sit autem ſuperficies illa non purè mathematica, ſed phyſica, profunditatem habens quàm minimam. Nominetur iſta profunditas O, & erit hæc ſuperficies (per demonſtrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum ſphæræ eſſe reciprocè ut diſtantiarum dignitas illa, cujus index eſt n; & vis, quâ ſuperficies EFG trahit corpus P, erit (per Prop. LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$, id eſt, ut $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$ (g). Huic propor-



(g) Nimirum pro DE^q ſcribendo $2DF \times PF - DF^q$.

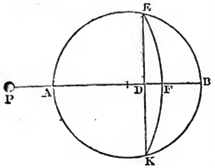
tionale

tionale ſit perpendiculum FN ductum in O; & area curvilinea BDI, quam ordinatim applicata FN, in longitudinem DB per motum continuum ducta, deſcribit, erit ut vis tota quâ ſegmentum totum RESD trahit corpus P. Q. E. I.

PROP. LXXXIV. PROB. XLIII.

Invenire vim, quâ corpuſculum, extra centrum ſphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.

A ſegmento EBK trahatur corpus P in ejus axe ADB locatum. Centro P intervallo PE deſcribatur ſuperficies ſphærica EFK, quâ diſtinguatur ſegmentum in partes duas EBKFE & EFKDE. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI. & vis partis poſterioris per Prop. LXXXIII; & ſumma virium erit vis ſegmenti totius EBKDE. Q. E. I.



Scholium.

Explicatis attractionibus corporum ſphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit Propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SECTIO XIII.

De corporum non ſphæricorum viribus attractivis.

PROP.

(a) Nam in Exemplo ſecundo, ſi corpus P tangat ſuperficiem ſphæricam in A, punctum L cum ipſo A congruet, rectaque Aa cum hyperbolæ aſymptotâ Ll. Unde vis, quâ corpus trahitur verſus centrum ſphæræ, cum ipſâ areâ hyperbolicâ, infinita evadet.

In

PROP. LXXXV. THEOR. XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longè fortior ſit, quàm cùm vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiarum à particulis.

Nam ſi vires decreſcunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à particulis; attractio verſus corpus ſphæricum, propterea quòd (per Prop. LXXIV.) ſit reciprocè ut quadratum diſtantiæ attracti corporis à centro ſphæræ, haud ſenſibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minùs augebitur ex contactu, ſi attractio in receſſu corporis attracti decreſcat in ratione minore. Patet igitur Propoſitio de ſphæris attractivis. Et par eſt ratio orbium ſphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res conſtat in orbibus corpora interiùs conſtituta trahentibus, cùm attractiones paſſim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipſo contactu nullæ ſunt. Quòd ſi ſphæris hiſce orbibuſque ſphæricis partes quælibet à loco contactûs remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari poſſunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel ſubductæ, cùm ſint à loco contactûs remotæ, augebunt notabiliter attractionis exceſſum, qui ex contactu oritur. Conſtat igitur Propoſitio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

PROP. LXXXVI. THEOR. XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicatâ, vel pluſquam triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis: attractio longè fortior erit in contactu, quàm cùm attrahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.

Nam attractionem, in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſmodi ſphæram trahentem, augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem Problematis XLI. in exemplo ſecundo ac tertio exhibitam [a]. Idem,

[a] In Exemplo autem tertio, ſi corpus ſuperficiem ſphæricam itidem in A tangat, fiet PS = AS, rectaque PI in nihilum abierit, puncto utique I æquè ac P cum ipſo A congruente. Hinc quantitas PS cub. × PI in nihilum planè abierit; vires autem, quæ contrariam quantitatis hujus inter ſe rationem gerunt, infinitæ fient.

per

De Motu Corporum per Exempla illa & Theorema XLI. inter ſe collata, facilè colligitur de attractionibus corporum verſus orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his ſphæris & orbibus ubivis, extra locum contactûs, materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit Propoſitio de corporibus univerſis. Q. E. D.

PROP. LXXXVII. THEOR. XLIV.

Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materiá æqualiter attractivá conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis ſimiliter poſitas.

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales, & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum ſecundum. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis cujuſvis diſtantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, & diſtantiarum dignitates illæ inverſè. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicatâ diſtantiarum à corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut A *cub.* & B *cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ à corporibus, ut A & B: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$, id eſt, ut corporum latera illa cubica A & B. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicatâ diſtantiarum à corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$, id eſt, æquales. Si vires decreſcant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora

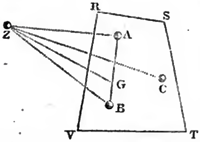
pora erunt ut $\frac{\text{A cub.}}{\text{A}qq}$ & $\frac{\text{B cub.}}{\text{B}qq}$, id eſt, reciprocè ut latera cubica A & B. Et ſic in cæteris.

Corol. 2. Unde viciſſim, ex viribus, quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modò decrementum illud ſit directè vel inverſè in ratione aliquâ diſtantiarum.

PROP. LXXXVIII. THEOR. XLV.

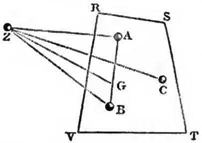
Si particularum æqualium corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materiâ conſimili & æquali conſtantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis RSTV particulæ A, B trahant corpuſculum aliquod Z viribus, quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ AZ, BZ; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ & ipſarum diſtantiæ AZ, BZ conjunctim, ſive (ſi ita loquar) ut hæ particulæ in diſtantias ſuas AZ, BZ reſpectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB, & ſecetur ea in G, ut ſit AG ad BG ut particula B ad particulam A; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per legum Corol. 2.) reſolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$; & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; ideoque cùm dirigantur in partes contrarias, ſe mutuò deſtruunt. Reſtant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z verſus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ A & B conſiſterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eodem argumento, ſi adjungatur particula tertia C, & componatur

ponatur hujus vis cum vi $\overline{A+B}\times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G, & particulæ C; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit, ac ſi globus & particula C conſiſterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunque RSTV, ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, figuram globi indueret. Q. E. D.



Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac ſi corpus attrahens RSTV eſſet ſphæricum: & propterea ſi corpus illud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROP. LXXXIX. THEOR. XLVI.

Si corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum à ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, quâ corpuſculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonſtratur eodem modo, atque Propoſitio ſuperior.

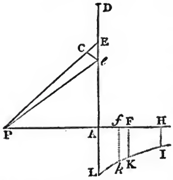
Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in Ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROP.

PROP. XC. PROB. XLIV.

Si ad ſingula circuli cujuſcunque puncta tendant vires æquales centripetæ, creſcentes vel decreſcentes in quâcunque diſtantiarum ratione: invenire vim, quâ corpuſculum attrabitur ubivis poſitum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit.

Centro A, intervallo quovis AD, in plano, cui recta AP perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur Circulus; & invenienda ſit vis, quâ corpuſculum quodvis, P, in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis, E ad corpuſculum attractum P agatur recta PE. In rectâ PA capiatur PF ipſi PE æqualis, & erigatur normalis FK, quæ ſit ut vis quâ punctum E trahit corpuſculum P. Sitque IKL curva linea, quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L. In PA capiatur PH æqualis PD, & erigatur perpendiculum HI Curvæ prædictæ occurrens in I; & erit corpuſculi P attractio in Circulum ut area AHIL ducta in altitudinem AP. Q. E. I.



Etenim in AE capiatur linea quàm minima Ee. Jungatur Pe, & in PE, PA capiantur PC, Pf ipſi Pe æquales. Et quoniam vis, quâ annuli, centro A intervallo AE in plano prædicto deſcripti, punctum quodvis E trahit ad ſe corpus P, ponitur eſſe ut FK; & inde vis, quâ punctum illud trahit corpus P verſus A, eſt ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, quâ annulus totus trahit corpus P verſus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio AE & latitudine Ee, & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ ſeu $PE \times Ff$; erit vis, quâ annulus iſte trahit corpus P verſus A, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; id eſt, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, ſive ut area FKkf ducta in AP. Et propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD deſcribitur,

ſcribitur, trahunt corpus P verſus A, eſt ut area tota AHIKL ducta in AP. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi vires punctorum decreſcunt in duplicatâ diſtantiarum ratione, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, atque ideo area AHIKL ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id eſt (b), ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et univerſaliter, ſi vires punctorum ad diſtantias D ſint reciprocè ut diſtantiarum dignitas quælibet D^n, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{D^n}$, ideoque area AHIKL ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et ſi diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n ſit unitate major; attractio corpuſculi P in planum totum infinitum erit reciprocè ut PA^{n-2}, propterea quòd terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evaneſcet (c).

PROP. XCI. PROB. XLV.

Invenire attractionem corpuſculi ſiti in axe Solidi Rotundi, ad cujus puncta ſingula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque diſtantiarum ratione decreſcentes.

In Solidum DECG trahatur corpuſculum P, ſitum in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS, ad hunc axem perpendiculari, ſecetur hoc ſolidum, & in ejus ſemidiametro FS, in plano aliquo PALKB per axem tranſeunte, capiatur (per Prop. xc.) longitudo FK vi, quâ

(b) Ut $\frac{PH - PA}{PH} = \frac{AH}{PH}$.

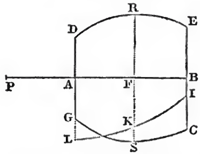
(c) Rectâ utique PH cum illâ AD infinitè auctâ.

(d) CURVÆ LKI QUADRATURA.

Pro 1 ſcribatur litera b. Hoc eſt, deſignet litera b datam illam rectam cujus longitudinem, in Arithmeticâ quantitatum æſtimatione, pro unitate haberi velis.

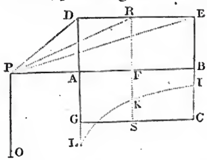
Datam rectam AD deſignet litera a; indefinitam PF, litera x. Ita, propter angulum ad F rectum, PR his notis deſignanda erit; $\sqrt{x^2+a^2}$. Ordinataque FK, cùm per Cor. 1. Prop. xc. æquanda ſit quantitati $1 - \frac{PF}{PR}$, idcirco hæc erit $b - \frac{bx}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Hinc fluxio areæ curvi linearis LKI, quæ ab aſymptotâ PO, à puncto P cum axe PB ad perpendiculum eductâ, initium ſumit, quæque ad ordinatam FK terminata eſt, hujus inquam fluxio, ſive $FK \times \dot{x} = b\dot{x} - \frac{bx\dot{x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Quare area ipſa $\boxed{FK \times \dot{x}}$ ſpatio $bx - b\sqrt{x^2+a^2}$, quod fluens eſt fluxionis $b\dot{x} - \frac{bx\dot{x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$, vel æqualis erit, vel illo major minorve

dato



quâ corpuſculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum, AL & BI, occurrentem in L & I; & erit attractio corpuſculi P in Solidum ut area LABI. Q. E. I.

Corol. 1. Unde ſi Solidum Cylindrus ſit, parallelogrammo ADEB circa axem AB revoluto deſcriptus, & vires centripetæ, in ſingula ejus puncta tendentes, ſint reciprocè ut quadrata diſtantiarum à punctis: erit attractio corpuſculi P in hunc cylindrum ut AB−PE+PD. Nam ordinatim applicata FK (per Corol. 1. Prop. xc.) erit ut $1-\frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, deſcribit aream 1×AB: & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, deſcribit aream 1 in $\overline{PE-AD}$ (id quod ex Curvæ LKI quadraturâ facilè oſtendi poteſt); & ſimiliter pars eadem ducta in longitudinem PA deſcribit aream 1 in $\overline{PD-AD}$, ductaque in ipſarum PB, PA differentiam, AB, deſcribit arearum differentiam, 1 in $\overline{PE-PD}$ (d). De contento primo, 1×AB, auferatur contentum poſtremum, 1 in $\overline{PE-PD}$, & reſtabit area LABI æqualis 1 in



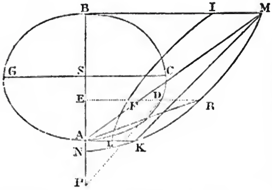
dato (Geometr. Flux. Th. iv.) Vel, quod eodem redit, ſpatium $\overline{FK\times\dot{x}}+b\sqrt{x^2+a^2}$ rectangulo bx vel æquale erit, vel illo majus minuſve dato. Evaneſcendo fluat recta PF, ut congruente tandem puncto F cum ipſo P, recta PF ſeu x ad nihilum planè redigatur. Quo facto, pro ſpatio omni $\overline{FK\times\dot{x}}+b\sqrt{x^2+a^2}$ manebit quidem rectangulum ba datum. Quando igitur ordinata mobilis FK cum ipſa PO congruat, ſpatium $\overline{FK\times\dot{x}}+b\sqrt{x^2+a^2}$ rectangulum bx dato ba exſuperabit. Quoniam rectangulum bx in nihilum abierit. Quare et in omni ſitu ordinatæ FK ſpatium illud hoc rectangulum eodem dato exſuperabit. Quare $\overline{FK\times\dot{x}}+b\sqrt{x^2+a^2}-ba=bx$. Unde $\overline{FK\times\dot{x}}=b\times\overline{x-\sqrt{x^2+a^2}+a}$. Atque hæc erit dimenſio areæ, quæ Curvâ LKI, Aſymptotâ PO, Ordinatâ FK, Abſciſſâque PF interclusa eſt, quæcunque fuerit abſciſſæ illius PF, ſeu x, longitudo. Ponatur igitur x æqualis primùm rectæ toti PB, tum datæ ejus parti PA; arearumque OPBI, OPAL à formulâ generali hæ venient æſtimationes.

$$OPBI = b\times\overline{PB-PE+AD}$$
$$OPAL = b\times\overline{PA-PD+AD}.$$

Quare $LABI = OPBI - OPAL = b\times\overline{AB-PE+PD}$. Q. E. D.

AB−

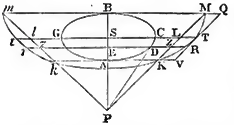
AB − PE + PD. Ergo vis, huic areæ proportionalis, eſt ut AB − PE + PD.



Corol. 2. Hinc etiam vis innoteſcit, quâ Sphæroïs AGBC attrahit corpus quodvis P, exteriùs in axe ſuo AB ſitum. Sit NKRM ſectio conica, cujus ordinatim applicata ER, ipſi PE perpendicularis, æquetur ſemper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata iſta ſphæroidem ſecat (c). A ſphæroidis verticibus A, B ad ejus axem

(c) L O C U S   S O L I D U S.

Sectione conicâ ACB, *cujus centrum* S, *axes* AB, CG, *poſitione datâ, ſi in recta* ED *ordinatim ad axem alterutrum eductâ capiatur* ER, *quæ æqualis ſit rectæ* PD, *quæ terminum ordinatæ cum puncto* P, *in axe* BA *dato, jungat; punctum* R *erit ad aliam aliquam ſectionem conicam poſitione datam.*



Per puncta A, B, quæ vertices utique ſunt axis AB, ducantur AK, BM, cum ordinatis ED parallelæ. Capiantur hinc inde AK, Ak, inter ſe rectæque PA æquales. Junctæ PK, Pk rectæ BM in punctis M, *m*, rectæ verò ER in punctis Z, z occurrant. Ita erunt rectæ BM, B*m*, inter ſe rectæque EP, rectæ EZ, Ez, inter ſe rectæque PE æquales. Per R ducatur recta RQ, cum rectâ PM parallela; quæ illis BM, AK in punctis Q, V, occurrat. Propter ER, PD inter ſe æquales, quadratum ex ER æquale erit duobus quadratis ex PE, ED ſimul ſumptis; hoc eſt, propter PE, EZ inter ſe æquales, duobus quadratis, ex EZ, ED ſimul ſumptis. Cùm verò recta zZ media ſit diviſa in puncto E, quadratum ex ER æquale eſt quadrato ex EZ cum rectangulo zR × RZ. (Elem. II. 6.) Quadratum igitur ex EZ cum rectangulo zR × RZ, quadratis ex EZ, ED ſimul ſumptis æquale eſt. Quadratoque ex EZ communiter dempto, manebit rectangulum zR × RZ quadrato ex ED æquale. At verò quadratum ex ED ad rectangulum AE × EB, propter ſectionem conicam ACB poſitione datam, datam rationem habet. Quare et rectangulum zR × RZ ad rectangulum AE × EB rationem datam habet. Rectangulum autem AE × EB ad rectangulum KZ × ZM rationem habet datam; nimirum eam, quam quadratum ex datâ PA ad quadratum ex datâ PK; (El. VI. 20.) nempe cùm ſit tam AE ad KZ quàm EB ad ZM ut PA ad PK. Rectanguli igitur zR × RZ ad rectangulum KZ × ZM, ſive RV × RQ, ratio data eſt (8. dat.) A puncto igitur R in rectas quatuor, KM, *km*, K*k*, M*m*, poſitione datas, deducuntur quatuor, RZ, Rz, RV, RQ, datis inclinationibus. Quodque deductarum duæ, RZ, Rz, rectangulum claudunt, ad rectangulum, alteris duabus deductarum concluſum, datam rationem habet. Erit igitur punctum R ad ſectionem conicam poſitione datam. Q. E. D.

C O M P O S I T I O   L O C I   S O L I D I.

Ductis per A, B, rectis AK, BM cum axe ſe parallelis, fiant AK, A*k* rectæ PA ſingulatim æquales. Junctæ PK, P*k*, rectæ BM in punctis M, *m* occurrant. Jungatur PC, & in axe ſe producto capiatur

axem AB erigantur perpendicula AK, BM, ipſis AP, BP æqualia reſpectivè, & propterea ſectioni conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eâdem ſegmentum KMRK. Sit autem ſphæroidis centrum S, & ſemidiameter maxima SC: & vis, quâ Sphærois trahit corpus P, erit ad vim, quâ ſphæra diametro AB deſcripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3PS\ quad.}$ (f). Et eodem computandi fundamento invenire licet vires ſegmentorum ſphæroidis.

Corol. 3. Quod ſi corpuſculum intra ſphæroidem in axe collocetur; attractio erit ut ipſius diſtantia à centro. Id quod faciliùs hoc argumento colligitur, ſive particula in axe ſit, ſive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit AGOF *(vide fig. p. 250)* ſphærois attrahens, S centrum ejus, & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum ſemidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG ſphæroidi hinc inde

tur ST junctæ PC æqualis. Per puncta quinque, K, T, M, *m*, *k*, ſcribatur ſectio conica. Ea Locus erit punctorum R. Hoc eſt, ſi recta ED, quæ ad axem AE Curvæ ACB ordinatim eſt educta, ſectionæ conicæ KTM*mk* in puncto R occurrat, recta ER junctæ PD æqualis erit.

DEMONSTRATIO COMPOSITIONIS.

Sectionis conicæ ACB axis GC rectis PM, P*m* in punctis L, *l* occurrat. Propter ſectionem conicam KTM*mk*, rectangulum RZ × RZ, erit ad RV × RQ, ſive ZK × ZM, ſicut TL × T*l* ad quadratum ex LM. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. LVI. Cor.) Rectangulum autem RZ × RZ ad rectangulum AE × EB rationem habet, quæ componitur è rationibus rectanguli RZ × RZ ad ZK × ZM, rectangulique ZK × ZM ad AE × EB; ſive è rationibus rectanguli TL × T*l* ad quadratum ex LM, quadratique ex LM ad quadratum ex SB. Ex eiſdem verò componitur ratio illa, quam TL × T*l* habet ad quadratum ex SB. Quare RZ × RZ erit ad AE × EB ut TL × T*l* ad quadratum ex SB. At verò rectangulum TL × T*l* quadrato ex SC æquale eſt. Nam, propter æquales ST, PC, quadratum ex ST duobus quadratis ex PS, SC ſimul ſumptis eſt æquale; ſive duobus ex SL, SC ſimul ſumptis. Et cùm recta L*l* media ſit diviſa in puncto S, quadratum ex ST, quadrato ex SL cum rectangulo TL × T*l* eſt æquale. (El. II. 6.) Quadratum igitur ex SL cum rectangulo TL × T*l* quadratis duobus ex SL, SC ſimul ſumptis eſt æquale. Quadratoque ex SL communiter ablato, manet rectangulum TL × T*l* quadrato ex SC æquale. Rectangulum igitur TL × T*l* quadratumque ex SC ad quadratum ex SB eandem utrumque rationem habent. Sed oſtenſum eſt rectangulum RZ × RZ ad AE × EB rationem habere eam, quam TL × T*l* ad quadratum ex SB. Erit igitur rectangulum RZ × RZ ad AE × EB ſicut quadratum ex SC ad quadratum ex SB; hoc eſt, (propter ſectionem conicam ACB) ſicut quadratum ex DE ad rectangulum AEB. Rectangulum igitur RZ × RZ et quadratum ex DE, cùm ad rectangulum AE × EB eandem rationem gerant, erunt inter ſe æqualia. (El. V. 9.) Quadratoque ex EZ communiter addito, rectangulum RZ × RZ cum quadrato ex EZ, hoc eſt quadratum ex ER, quadratis ex ED, EZ, ſimul ſumptis æquale erit. Quare cùm EZ, EP ſint inter ſe æquales, quadratum ex ER quadratis ex ED, EP ſimul ſumptis, hoc eſt quadrato ex PD, æquale erit. Quare recta ER æqualis erit rectæ PD. Q. E. D.

HÆC velim Lector conferas cùm iis, quibus alii oſtendere conati ſunt, quod à Newtono affirmatum eſt, lineam KRM, ſive locum puncti R, Curvam eſſe è conicis. Senties, ni fallor, quantum lucis, ſi Diis placeat, quantum compendii, cum calculis iſtis ſuis Algebra rationibus Geometricis attulerit.

(f) CAPIATUR enim EF quæ ſit ut vis, quâ circulus, cujus centrum E, radius ED, trahit corpuſculum in P poſitum. Sitque LFI Curva, quam punctum F perpetuò tangit, quæ planis AK, BM, ſphæroidem in verticibus axis ſui contingentibus, in punctis L, I occurrat. Erit igitur EF = I —

IE

inde occurrentes in D & E, F & G; ſintque PCM, HLN ſuperficies ſphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tranſeat per corpus P, & ſecet rectas DE & FG

$\frac{PE}{PD}$, vel ſi b deſignet rectam illam quam pro unitate haberi velis, $EF = b - \frac{b.PE}{PD}$.

Ponatur $AE = x$. $AB = 2b$. $a = \frac{CS^2}{SA}$. Ita erit $DE^2 = 2ax - \frac{ax^2}{b}$.

Rurſum ponatur $PA = c$. Erit $PE = c + x$. Et $PE^2 = c^2 + 2cx + x^2$.

Unde $PD^2 = c^2 + \overline{2c + 2a}.x + \frac{b-a}{b}x^2$. Vel ſi pro $2c + 2a$ ſcribatur f, et g pro $\frac{b-a}{b}$, $PD^2 = c^2 + fx + gx^2$.

Quare $EF = b - \frac{bPE}{PD} = b - \frac{bc}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}} - \frac{bx}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$.

Et fluxio areæ $LAEF = EF \times \dot{x} = b\dot{x} - \frac{bc\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}} - \frac{bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$.

Unde area $LAEF = bx - \boxed{\frac{bc\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}} + \frac{bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$.

Ordinatæ autem EF membra illa $\frac{bc}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$, $\frac{bx}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$, ſi ſcribas e pro c^2, d pro bc in primo, et d pro b in ſecundo, fiunt $\frac{d}{\sqrt{e+fx+gx^2}}$, $\frac{dx}{\sqrt{e+fx+gx^2}}$; ex quibus ſingulatim venient areæ $\frac{8dgs - 4dgxv - 2dfv}{4eg - f^2}$, $\frac{-4dfs + 2dfxv + 4dev}{4eg - f^2}$ (per Tab. II[m]. Newtoni Claſſ. VIII. Form. 1 & 2.) literâ nimirum v ſectionis conicæ NKRM ordinatam ER deſignante; literâ verò s, ſectionis illius aream KAER. Quare harum arearum ſumma areæ $\boxed{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$ vel æqualis erit, vel eâ major minorve datâ. (Geometr. Flux. Th. IV.)

Cùm verò per literas x, s, v eædem quantitates in utroque ſymbolo ſignificentur, arearum ſummam ita facillimè collegeris, ſi membrorum homologorum coefficientes pro ſignis ſuis, +, −, algebraicè conſummaveris. Id quod fit operâ ſequente.

		Summa
I.	1. $8dg = 8bc \times \frac{b-a}{b} = 8bc - 8ca$ 2. $-4df = -4b \times \overline{2c+2a} = -8bc - 8ba$	$-8a \times \overline{b+c} = -8a \times PS.$
II.	1. $-4dg = -4bc \times \frac{b-a}{b} = -4bc + 4ca$ 2. $+2df = 2b \times \overline{2c+2a} = +4bc + 4ba$	$+4a \times \overline{b+c} = +4a \times PS.$
III.	1. $-2df = -2bc \times \overline{2c+2a} = -4bc^2 - 4bac$ 2. $+4de = 4b \times c^2 = +4bc^2$	$-4bac$

$4eg = 4c^2 \times \frac{b-a}{b} = \frac{4bc^2 - 4ac^2}{b}$

$f^2 = 4c^2 + 8ac + 4a^2$

$4eg - f^2 = \frac{4bc^2 - 4ac^2 - 4bc^2 - 8acb - 4a^2b}{b} = \frac{-4ac^2 - 8acb - 4a^2b}{b}$.

Hinc $\frac{8dgs - 4dfxv - 2dfv}{4eg - f^2} + \frac{-4dfs + 2dfxv + 4dev}{4eg - f^2} = \frac{-8a \times PS.s + 4a \times PS.xv - 4bacv}{-4ac^2 - 8acb - 4a^2b} \times b = \frac{2PS.s - PS.xv + bcv}{c^2 + 2cb + ab} \times b = \frac{2PS \times KREA - PS \times AE \times ER + bc.ER}{c^2 + 2cb + ab} \times b$.

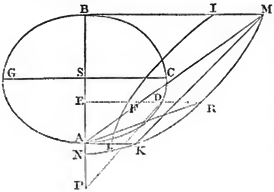
Hinc

FG in B & C, poſterior ſecet eaſdem rectas in H, I & K, L. Habeant autem ſphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum,

Hinc area $\boxed{\dfrac{bc\dot{x}+bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$ ſpatio $b\times\dfrac{2\mathrm{PS}\times\mathrm{KREA}-\overline{\mathrm{PS}\times\mathrm{AE}\times\mathrm{ER}}+bc\times\mathrm{ER}}{c^2+2cb+ab}$ vel æqualis erit, vel eo major minorve dato.

Fluendo decreſcat recta AE, donec puncto E in ipſum A tranſlato, recta AE, ſive x, in nihilum abeat. Area $\boxed{\dfrac{bc\dot{x}+bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$ ſimul in nihilum abierit. Et pro omni ſpatio $\dfrac{2\mathrm{PS}\times\mathrm{KREA}-\overline{\mathrm{PS}\times\mathrm{AE}\times\mathrm{ER}}+bc\times\mathrm{ER}}{c^2+2cb+ab}\times b$ manebit $\dfrac{bc\times\mathrm{AK}}{c^2+2cb+ab}\times b$. Quare hoc ſpatium areâ illâ dato $\dfrac{bc\times\mathrm{AK}}{c^2+2cb+ab}\times b$ majus erit.

Ergo $\boxed{\dfrac{bc\dot{x}+bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}=\dfrac{2\mathrm{PS}\times\mathrm{KREA}-\overline{\mathrm{PS}\times\mathrm{AE}\times\mathrm{ER}}+bc\times\overline{\mathrm{ER}-\mathrm{AK}}}{c^2+2cb+ab}\times b.$



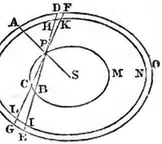
Jungatur AR. Rectangulum AE × ER trianguli AER duplum erit. Quare ſolidum PS × AE × ER, ſolidi 2PS × triang. AER æquale erit. Unde $\overline{2\mathrm{PS}\times\mathrm{KREA}-\mathrm{PS}\times\mathrm{AE}\times\mathrm{ER}}=2\mathrm{PS}\times\overline{\mathrm{KREA}-\text{triang. AER}}$. Sed KREA − triang. AER ſpatio conico triangulari RAK æquale eſt. Hinc $2\mathrm{PS}\times\mathrm{KREA}-\mathrm{PS}\times\mathrm{AE}\times\mathrm{ER}=2\mathrm{PS}\times\mathrm{RAK}$. Unde elicitur $\boxed{\dfrac{bc\dot{x}+bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}=\dfrac{2\mathrm{PS}\times\mathrm{RAK}+bc\times\overline{\mathrm{ER}-\mathrm{AK}}}{c^2+2cb+ab}\times b$. Unde $bx-\boxed{\dfrac{bc\dot{x}+bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$, ſive area LAEF, $=bx-\dfrac{2\mathrm{PS}\times\mathrm{KARK}+bc\times\overline{\mathrm{ER}-\mathrm{AK}}}{c^2+2cb+ab}\times b$. Unde rurſum, cùm recta x in ipſam AB, ſive $2b$, fluendo adoleverit, area tota $\mathrm{LABI}=2b^2-\dfrac{2\mathrm{PS}\times\mathrm{MAKRM}+bc\times\overline{\mathrm{EM}-\mathrm{AK}}}{c^2+2cb+ab}b$. Sed $\mathrm{EM}-\mathrm{AK}=\mathrm{PE}-\mathrm{PA}=\mathrm{AE}$. Quare $\mathrm{LABI}=2b^2-\dfrac{2\mathrm{PS}\times\mathrm{MAKRM}+bc.\mathrm{AB}}{c^2+2cb+ab}b=\dfrac{2c^2b^2+4cb^3+2ab^3-2b.\mathrm{PS}\times\mathrm{MAKRM}-2cb^3}{c^2+2cb+ab}$. Quare propter datam $2b$, area LABI rectæ $\dfrac{c^2b+2cb^2+ab^2-\mathrm{PS}\times\mathrm{MAKRM}-cb^2}{c^2+2cb+ab}$ rationem conſtanter ſervabit; ſive rectæ $\dfrac{c^2b+cb^2+ab^2-\mathrm{PS}\times\mathrm{MAKRM}}{c^2+2cb+ab}$. Atque $c^2b+cb^2=cb\times\overline{c+b}=\overline{\mathrm{KA}\times\mathrm{AS}}\times\mathrm{PS}=\text{triang. MAK}\times\mathrm{PS}$. Hinc recta $\dfrac{c^2b+cb^2+ab^2-\mathrm{PS}\times\mathrm{MAKRM}}{c^2+2cb+ab}=\dfrac{\mathrm{PS}\times\text{triang. MAK}+ab^2-\mathrm{PS}\times\mathrm{MAKRM}}{c^2+2cb+ab}$. Sed triang. $\mathrm{MAK}-\mathrm{MAKRM}=-\mathrm{KRM}$. Et $ab=\mathrm{CS}^2$. Et $c^2+2cb=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BAP}=\mathrm{BP}\times\mathrm{PA}=\mathrm{PS}^2-\mathrm{AS}^2$.

Quare recta $\dfrac{c^2b+cb^2+ab^2-\mathrm{PS}\times\mathrm{MAKRM}}{c^2+2cb+ab}=\dfrac{\mathrm{CS}^2\times\mathrm{AS}-\mathrm{PS}\times\mathrm{KRM}}{\mathrm{PS}+\mathrm{CS}^2-\mathrm{AS}^2}$. Atque hujus rectæ rationem area LABI, nec non vis quâ ſphærois AGBC corpus in P poſitum verſus centrum ſuum trahit, ſervabit.

JAM verò manentibus AS, PS, recta CS minuatur paulatim vel creſcat, ut rectæ AS æqualis tandem evadat; ita verò Ellipſis ACBG in Circulum abierit, & Sphærois ACBG in Sphæram perfectam.

 Rectaque

De Motu Corporum



tarum partes hinc inde interceptæ DP & BE, FP & CG, DH & IE, FK & LG ſibi mutuò æquales; propterea quòd rectæ DE, PB, & HI biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC, & KL. Concipe jam DPF, EPG deſignare conos oppoſitos, angulis verticalibus DPF, EPG infinitè parvis deſcriptos, & lineas etiam DH, EI infinitè parvas eſſe; & conorum particulæ ſphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ DHKF, GLIE, ob æqualitatem linearum DH, EI, erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum à corpuſculo P, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus ſphæroidum innumerarum, ſimilium, concentricarum, & axem communem habentium, dividantur ſpatia DPF, EGCB in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires coni DPF & ſegmenti conici EGCB, & per contrarietatem ſe mutuò deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra ſphæroidem intimam PCBM. Trahitur igitur corpus P à ſolâ ſphæroide intimâ PCBM, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus eſt ad vim, quâ corpus A trahitur à ſphæroide totâ AGOD, ut diſtantia PS ad diſtantiam AS. Q. E. D.

PROP. XCII. PROB. XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.

E corpore dato formanda eſt Sphæra, vel Cylindrus, aliave figura

Rectaque $\frac{CS^2 \times AS - PS \times KRM}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$, cujus rationem area LABI ſervat, ea fiet $\frac{AS^3 - PS \times KRM}{PS^4}$. Jam verò exſiſtente ACBG Circulo, ſectio conica NKRM Parabola erit, cujus axis NB, parameter 2PS. Id quod ex æquatione illâ, PD^2, ſive ER^2, $= c^2 + \overline{2c + 2a}.x + \frac{b-a}{b} x^2$ ſatis patet: quæ rectis, b, a, propter circulum ACBG jam factis æqualibus, in hanc migraverit, $ER^2 = c^2 + \overline{2c + 2l}\,x$.

Hinc area conica KRMBA $=$ NRMB $-$ NKA $= \frac{2}{3}$ NB $\times$ BM $- \frac{2}{3}$ NA $\times$ AK. Sed NB $= \frac{BM^2}{2PS}$. Et NA $= \frac{AK^2}{2PS}$ (propter parabolam). Hinc $\frac{2}{3}$ NB $\times$ BM $- \frac{2}{3}$ NA $\times$ AK $= \frac{BM^3 - AK^3}{3PS}$.

Quare area parabolica KRMBA $= \frac{BM^3 - AK^3}{3PS}$.

k

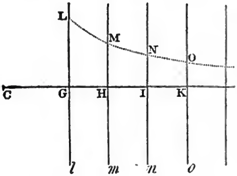
Sed

gura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI & XCI.) inveniri poteſt. Dein factis experimentis invenienda eſt vis attractionis in diverſis diſtantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium ſingularum, quam invenire oportuit.

PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

Si Solidum ex unâ parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, conſtet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in receſſu à Solido decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis diſtantiarum pluſquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpuſculum ad utramvis plani partem conſtitutum trahatur: dico quòd Solidi vis illa attractiva, in receſſu ab ejus ſuperficie planâ, decreſcet in ratione poteſtatis, cujus latus eſt diſtantia corpuſculi à plano, & index ternario minor quàm index poteſtatis diſtantiarum.

Caſ. 1. Sit LG*l* planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus verſus I, inque plana innumera *m*HM, *n*IN, *o*KO, &c. ipſi GL parallela reſolvatur. Et primò collocetur corpus attractum C extra ſolidum. Agatur autem CGHI planis illis innumeris perpendicularis, & decreſcant vires attractivæ punctorum ſolidi in ratione



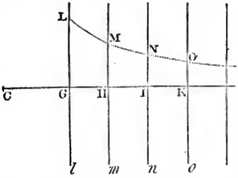
poteſtatis diſtantiarum, cujus index ſit numerus *n* ternario non

Sed BM $=$ PB $=$ PS $+$ SA. Et AK $=$ PA $=$ PS $-$ SA. Quare $BM^3 - AK^3 = 6PS^2 \times SA + 2SA^3$.
Quare area parabolica KRMBA $= \frac{6PS^2 \times SA + 2SA^3}{3PS}$. Demptoque trapezio KABM $= AS \times \overline{BM + AK}$ $= AS \times 2PS = \frac{6PS^2 \times SA}{3PS}$, manebit KRM $= \frac{2SA^3}{3PS}$. Unde et PS $\times$ KRM $= \frac{2SA^3}{3}$. Hinc $\frac{AS^3 - PS \times KRM}{PS^2} = \frac{AS^3}{PS^2} - \frac{2SA^3}{3PS^2} = \frac{AS^3}{3PS^2}$.

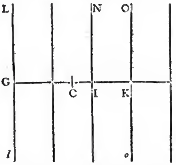
Atque huic rectæ æqualis erit illa, cujus rationem area LABI ſervat; quando ſcilicet ſphærois ACBC, diametro æquatoris eo cum ipſo axe AB æquatâ, perfectam ſphæræ figuram induerit. Erit igitur vis, quâ ſphærois trahit corpus P, ad vim quâ ſphæra, diametro AB ſcripta, idem corpus trahit, ut $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ ad $\frac{AS^3}{3PS^2}$, ſicut Newtonus affirmavit. Q. E. D.

 minor.

minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. xc.) vis, quâ planum quodvis *m*HM trahit punctum c, eſt reciprocè ut CH^{n-2}. In plano *m*HM capiatur longitudo HM ipſi CH^{n-2} reciprocè proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis ſingulis *l*GL, *n*IK, *o*KO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipſis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciprocè proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque ſumma virium ut ſumma longitudinum; hoc eſt, vis Solidi totius ut area GLOK in infinitum verſus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) eſt reciprocè ut CG^{n-3}, & propterea vis Solidi totius eſt reciprocè ut CG^{n-3}. Q.E.D.



Caſ. 2. Collocetur jam corpuſculum c ex parte plani *l*GL intra Solidum, & capiatur diſtantia CK æqualis diſtantiæ CG. Et Solidi pars LG*l*OK*o*, planis parallelis *l*GL, *o*KO terminata, corpuſculum c, in medio ſitum, nullam in partem trahet; contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuò per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum c ſolâ vi Solidi ultra planum OK ſiti trahitur. Hæc autem vis (per caſum primum) eſt reciprocè ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales CG, CK) reciprocè ut CG^{n-3}. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi Solidum LGIN planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractivâ Solidi totius infiniti LGKO vim attractivam partis ulterioris NIKO, in infinitum verſus KO productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius penè eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris, augendo diſtantiam, decreſcet quàm proximè in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum, & ex unâ parte planum,

num, trahat corpuſculum è regione medii illius plani; & diſtantia inter corpuſculum & planum, collata cum dimenſionibus corporis attrahentis, perexigua ſit; conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum: vis attractiva corporis totius decreſcet quamproximè in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & index ternario minor quàm index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quòd, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario ſecundo, ſemper eſt infinitè major quàm attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quæratur motus corporis: ſolvetur Problema quærendo (per Prop. XXXIX.) motum corporis rectâ deſcendentis ad hoc planum, & (per legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contrà, ſi quæratur lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis Tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis quâ corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ vel in baſem attractum, vel à baſi fugatum, moveri poſſit in curvâ lineâ, quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: ſuppono baſem augeri parte quàm minimâ o, & ordinatim applicatam, $\overline{A+o}^{\frac{m}{n}}$, reſolvo in ſeriem infinitam, $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}o.A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn}oo.A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo o duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mn}{2nn}oo.A^{\frac{m-2n}{n}}$

vim

De Motu Corporum

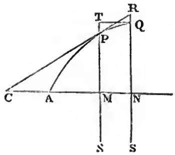
vim proportionalem eſſe ſuppono (c). Eſt igitur vis quæſita ut $\frac{nm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$; vel quod perinde eſt, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut ſi ordinatim applicata Parabolam attingat, exiſtente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^{0}$, ideoque dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonſtravit. Quòd ſi ordinatim applicata Hyperbolam attingat, exiſtente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ ſeu $2B^{3}$: ideoque vi, quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbolâ. Sed miſſis hujuſmodi Propoſitionibus, pergo ad alias quaſdam de motu, quas nondum attigi.

SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROP. XCIV. THEOR. XLVIII.

Si media duo ſimiliaria, ſpatio planis parallelis utrinque terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; ſit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubique eadem: dico quòd ſinus incidentiæ in planum

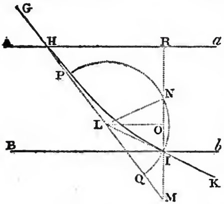


(c) Nimirum in figurâ Problematis tertii, ſit Abſciſſa $AM = A$, Ordinata $PM = B$. Curvæ autem APQ ea ſit natura, ut ſit $A^{\frac{m}{n}} = B$, ſive $A^{m} = B^{n}$.

Recta RP, quæ Curvam in P contingat, occurrat axi MA in C, & Ordinatæ NQ in R. Recta autem MN, ordinatis MP, NQ interjecta, dicatur o. Si corpus quodpiam, viribus ſecundum rectas parallelas PM, QN incitatum, per Curvam APQ feratur, vires illæ rationem inter ſe ejus quæ rectarum $\frac{QT^2}{QR}$, evaneſcente arcu PQ, eſt ultima contrariam, neceſſe eſt conſtanter gerant (Prop. VI. Cor. 5.) Sive ejus contrariam, quæ, evaneſcente arcu PQ, ultima eſt rectarum $\frac{MN^2}{QR}$. Namque propter rectas PM, QN parallelas, et angulum ad T rectum, ad M aut rectum aut datum, rectæ QT, MN, aut æquales erunt inter ſe, aut datam ſaltem inter ſe rationem gerent. Jam verò propter $A^{m} = B^{n}$, erit recta $MC = \frac{nB^{n}}{mA^{m-1}}$ (Geometr. Analyt. Prop. IV. Mod. 1.) Et propter rectas PM, NR inter ſe parallelas, erit $CM : MP = CN : NR$. Sive $\frac{nB^{n}}{mA^{m-1}} : A^{\frac{m}{n}} = \frac{nB^{n}}{mA^{m-1}} + o : NR$. Quare $NR = \overline{\frac{nB^{n}}{mA^{m-1}} + o} \times A^{\frac{m}{n}} \times \frac{mA^{m-1}}{nB^{n}}$

planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ. Liber Primus.

Caſ. 1. Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa ſecundum lineam GH; ac, toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu, attrahatur vel impellatur verſus medium incidentiæ, eâque actione deſcribat lineam curvam HI, & emergat ſecundum lineam IK. Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendiculum IM, occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M, tum plano incidentiæ Aa in R; & linea emergentiæ, KI, producta occurrat HM in L. Centro L intervallo LI deſcribatur circulus, ſecans tam HM in P & Q, quàm MI productam in N; & primò ſi attractio, vel impulſus, ponatur uniformis, erit (ex demonſtratis *Galilæi*) Curva HI Parabola; cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & lineâ IM æquale ſit HM quadrato; ſed & linea HM biſecabitur in L ([a]). Unde ſi ad MI demittatur perpen-



$\frac{mA^{m-1}}{nB^{n}} = A^{\frac{m}{n}} + \frac{m \times A^{\frac{m}{n}+m-1}}{nB^{n}} O$. Hoc eſt, propter $A^{m} = B^{n}$, $NR = A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A^{\frac{m-n}{n}} O$.

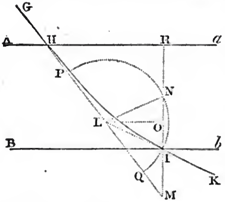
Sed ex naturâ Curvæ APQ, $QN = \overline{A+O}|^{\frac{m}{n}} = A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A^{\frac{m-n}{n}} O + \frac{mm-mn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} O^{2} +$ $\frac{m^{3}-3m^{2}n+2mn^{2}}{6n^{3}} A^{\frac{m-3n}{n}} O^{3}$.

Ergo $QR = NR - NQ = \frac{mn-mm}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} O^{2} + \frac{3m^{2}n-m^{3}-2mn^{2}}{6n^{3}} A^{\frac{m-3n}{n}} O^{3} +$. Et $\frac{MN^{2}}{QR} = \frac{O^{2}}{QR} = \frac{1}{\frac{mn-mm}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{3m^{2}n-m^{3}-2mn^{2}}{6n^{3}} A^{\frac{m-3n}{n}} O +}$. Vires igitur, de quibus agitur, quantitatum $\frac{mn-mm}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{3m^{2}n-m^{3}-2mn^{2}}{6n^{3}} A^{\frac{m-3n}{n}} O +$ rationem ultimam conſtanter ſervant; hoc eſt, propter illam O infinitè imminutam, quantitatum $\frac{mn-mm}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$. Rectè igitur poſuit Newtonus vires illas cum his quantitatibus proportione convenire.

([a]) Id quod facilè efficitur ex XLVII[a]. Lib. I. Conicorum Hamiltoni, ſi per u ducatur recta cum illâ LI, quæ Parabolam in I contingit, parallela.

 diculum

diculum LO, æquales erunt MO, OR; & additis æqualibus ON, OI, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cùm IR detur, datur etiam MN; eſtque rectangulum NMI ad rectangulum ſub latere recto & IM, hoc eſt, ad HMq, in datâ ratione. Sed rectangulum NMI æquale eſt rectangulo PMQ, id eſt, differentiæ quadratorum MLq, & PLq ſeu LIq; & HMq datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem MLq: ergo datur ratio MLq − LIq ad MLq; & convertendo ratio LIq ad MLq, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinûs anguli incidentiæ LMR ad ſinum anguli emergentiæ LIR. Q. E. D.



Caſ. 2. Tranſeat jam corpus ſucceſſivè per ſpatia plura parallelis planis terminata, A*ab*B, B*bc*C, &c. & agitetur vi, quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum A*a* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo B*b*, in datâ ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum B*b*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio C*c*, in datâ ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto D*d*, in datâ ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla, & augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulſûs actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinûs incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. Q. E. D.

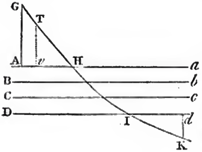


PROP.

PROP. XCV. THEOR. XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quòd velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

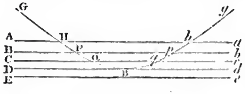
Capiantur AH, I*d* æquales, & erigantur perpendicula AG, *d*K occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH, IK, in G & K. In GH capiatur TH æqualis IK, & ad planum A*a* demittatur normaliter T*v*. Et (per legum Corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis A*a*, B*b*, C*c*, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſûs, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas; & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam AG & punctum H, interque punctum I & lineam *d*K; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas GH, IK. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut GH ad IK vel TH, id eſt, ut AH vel I*d* ad *v*H, hoc eſt (reſpectu radii TH vel IK) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. Q. E. D.



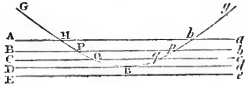
PROP. XCVI. THEOR. L.

Iiſdem poſitis, & quòd motus ante incidentiam velocior ſit quàm poſtea: dico quòd corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana A*a*, B*b*, C*c*, &c. deſcribere arcus parabolicos, ut ſupra; ſintque arcus illi HP, PQ, QR, &c. Et ſit ea lineæ incidentiæ, GH, obliquitas ad planum primum A*a*, ut



ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in eâ ratione, quam habet idem ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano D*d*, in ſpatium D*de*E: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideóque linea emergentiæ coincidet cum plano D*d*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto R; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt, quòd corpus non poteſt ultrà pergere verſus planum E*e*.



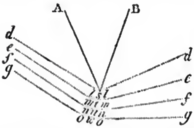
Sed nec poteſt idem pergere in lineâ emergentiæ R*d*, propterea quòd perpetuò attrahitur vel impellitur verſus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana C*c*, D*d*, deſcribendo arcum Parabolæ QR*q*, cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in R; ſecabit planum C*c* in eodem angulo in *q*, ac priùs in Q; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus QP, PH ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h*, &c. ac priùs in P, H, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in *h*, quâ incidit in H. Concipe jam planorum A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eò ut actio attractionis vel impulſûs, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. E. D.

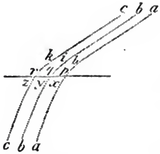
Scholium.

Harum attractionum haud multùm diſſimiles ſunt lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam ſecantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundum datam ſinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque lucem ſucceſſivè propagari, & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum à ſole ad terram venire, jam conſtat per phænomena ſatellitum *Jovis*, obſervationibus diverſorum aſtronomorum confirmata. Radii autem in aëre exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſâ, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære

ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem ; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propiùs accedunt ad corpora, incurvantur magis, quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. Et qui tranſeunt ad majores diſtantias minùs incurvantur ; & ad diſtantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum faſcias efformant. In figurâ deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis AsB ; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* ſunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati ; idque magis vel minùs pro diſtantiâ eorum à cultro. Cùm autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, priùs incurvari in aere quàm cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzc*, *biyb*, *ahxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt Propoſitiones ſequentes in uſus opticos ſubjungere ; interea de naturâ radiorum (utrùm ſint corpora necne) nihil omninò diſputans, ſed trajectorias corporum trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodò determinans.

LIBER PRIMUS.





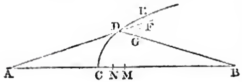
PROP. XCVII. PROB. XLVII.

Poſito quòd ſinus incidentiæ in ſuperficiem aliquam ſit ad ſinum emergentiæ in datâ ratione; quòdque incurvatio viæ corporum juxta ſuperficiem illam fiat in ſpatio breviſſimo, quod ut punctum conſiderari

De Motu Corporum

conſiderari poſſit: determinare ſuperficiem, quæ corpuſcula omnia de loco dato ſucceſſivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

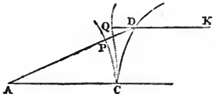
Sit A locus à quo corpuſcula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem AB revoluta deſcribat ſuperficiem quæſitam; D, E Curvæ illius puncta duo quævis; & EF, EG perpendicula in corporis vias AD, DB demiſſa. Accedat punctum D ad punctum E; & lineæ DF, quâ AD augetur, ad lineam DG, quâ DB diminuitur, ratio ultima erit eadem, quæ ſinûs incidentiæ ad ſinum emergentiæ (b). Datur ergo ratio incrementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB; & propterea, ſi in axe AB



ſumatur ubivis punctum C, per quod Curva CDE tranſire debet, & capiatur ipſius AC incrementum, CM, ad ipſius BC decrementum, CN, in datâ illâ ratione, centriſque A, B, & intervallis AM, BN deſcribantur circuli duo ſe mutuo ſecantes in D; punctum illud D tanget Curvam quæſitam CDE, eademque ubivis tangendo determinabit. Q. E. I.

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C, habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Carteſius* in Opticâ & Geometriâ ad refractiones expoſuit. Quarum inventionem cùm *Carteſius* celaverit, viſum fuit hâc Propoſitione exponere.

Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis CD, ſecundum lineam rectam AD, lege quâvis ductam incidens, emerget ſecundum aliam quamvis rectam DK, & à puncto C duci intelligantur lineæ curvæ CP, CQ ipſis AD, DK ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum PD, QD, atque ideo lineæ ipſæ PD, QD, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contrà.



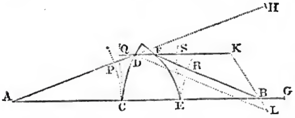
PROP.

(b) Junctâ enim DE, anguli rectilinei DEF, DEG, quorum ſinus ſunt DF, DG pro radio communi

PROP. XCVIII. PROB. XLVIII.

Iiſdem poſitis, & circa axem AB *deſcriptâ ſuperficie quâcunque attractivâ* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta AB ſecet ſuperficiem primam in C & ſecundam in E, puncto D utcunque aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eàdem, & ſinu emergentiæ è ſuperficie ſecundâ ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: produc tum AB ad G, ut ſit BG ad CE ut M−N ad N; tum AD ad H, ut ſit AH æqualis AG; tum etiam DF ad K, ut ſit DK ad DH ut N ad M. Junge KB, & centro D intervallo DH deſcribe circulum occurrentem KB productæ in L, ipſique DL parallelam age BF: & punctum F tanget lineam EF, quæ circa axem AB revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. Q. E. F.



Nam concipe lineas CP, CQ ipſis AD, DF reſpectivè, & lineas ER, ES ipſis FB, FD ubique perpendiculares eſſe, ideoque QS ipſi CE ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) PD ad QD ut M ad N, ideoque ut DL ad DK vel FB ad FK; & diviſim ut DL − FB, ſeu PH − PD − FB, ad FD, ſeu FQ − QD; & compoſitè ut PH − FB ad FQ, id eſt (ob æquales PH & CG, QS & CE) CE + BG − FR ad CE − FS. Verùm (ob proportionales BG ad CE & M − N ad N) eſt etiam CE + BG ad CE ut M ad N; ideoque diviſim FR ad FS ut M ad N; & propterea (per Corol. 2. Prop. XCVII.) ſuperficies EF cogit corpus, in ipſam ſecundùm lineam DF incidens, pergere in lineâ FR ad locum B. Q. E. D.

Scholium.

Eàdem methodo pergere liceret ad ſuperficies tres vel plures.

muni DE, hi, evaneſcente arcu DE, fiunt angulis, ille incidentis radii, hic emergentis, ultimò æquales. Erunt igitur DF, DG ultimò ut ſinus illi.

Ad

De Motu Corporum

Ad uſus autem opticos maximè accommodatæ ſunt figuræ ſphæricæ. Si perſpicillorum vitra objectiva ex vitris duobus ſphæricè figuratis & aquam inter ſe claudentibus conflentur; fieri poteſt ut à refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis, ſatis accuratè corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda ſunt, non ſolùm quòd faciliùs & accuratiùs formari poſſint, ſed etiam quòd penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratiùs refringant. Veruntamen diverſa diverſorum radiorum refrangibilitas impedimento eſt, quo minùs optica per figuras vel ſphæricas vel alias quaſcunque perfici poſſit. Niſi corrigi poſſint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperitè collocabitur.

D E

DE

MOTU CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De motu corporum quibus reſiſtitur in ratione velocitatis.

PROP. I. THEOR. I.

Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentiâ amiſſus eſt ut ſpatium movendo confectum.

NAM cùm motus ſingulis temporis particulis æqualibus amiſſus ſit ut velocitas, hoc eſt, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amiſſus ut iter totum. Q. E. D.

Corol. Quare ſi corpus, gravitate omni deſtitutum, in ſpatiis liberis ſolâ vi inſitâ moveatur; ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum: dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum, ut motus totus ſub initio ad motûs illius partem amiſſam.

LEMMA

LEMMA I.

Quantitates differentiis ſuis proportionales ſunt continuè proportionales.

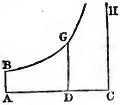
Sit A ad A−B ut B ad B−C & C ad C−D, &c. & convertendo ſiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. Q. E. D.

PROP. II. THEOR. II.

Si corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & idem ſolâ vi inſitâ per medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione geometricâ, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.

Caſ. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & ſi ipſis particularum initiis agat vis reſiſtentiæ impulſu unico, quæ ſit ut velocitas: erit decrementum velocitatis, ſingulis temporis particulis, ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis ſuis proportionales, & propterea (per Lem. I. Lib. 2.) continuè proportionales. Proinde ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipſis temporum initiis, ut termini in progreſſione continuâ, qui per ſaltum capiuntur, omiſſo paſſim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter ſe iiſdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compoſitæ inter ſe eædem ſunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, ſunt in progreſſione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continuè proportionales, erunt in hoc etiam caſu continuè proportionales. Q. E. D.

Caſ. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt, earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: ſpatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ (per Prop. I. Lib. 2.) & propterea etiam ut totæ. Q. E. D.

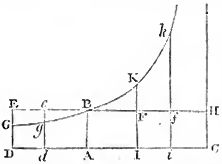


Corol. Hinc ſi aſymptotis rectangulis AC, CH deſcribatur hyperbola BG, ſintque AB, DG ad aſymptoton AC perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia medii, ipſo motûs initio, per lineam quamvis datam AC, elapſo autem tempore aliquo per lineam indefinitam DC: exponi poteſt tempus per aream ABGD, & ſpatium eo tempore deſcriptum per lineam AD. Nam ſi area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum temporis, decreſcet recta DC in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & partes rectæ AC, æqualibus temporibus deſcriptæ, decreſcent in eâdem ratione.

PROP. III. PROB. I.

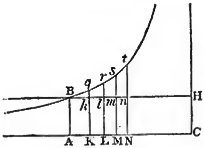
Corporis, cui, dum in medio ſimilari rectâ aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum BACH, & reſiſtentia medii, initio aſcenſûs, per rectangulum BADE ſumptum ad contrarias partes rectæ AB. Aſymptotis rectangulis AC, CH, per punctum B deſcribatur hyperbola ſecans perpendicula DE, *de* in G, *g*; & corpus aſcendendo tempore DG*gd* deſcribet ſpatium EG*ge*, tempore DGBA ſpatium aſcenſûs totius EGB; tempore ABKI ſpatium deſcenſûs BFK, atque tempore IK*ki* ſpatium deſcenſûs KF*fk*; & velocitates corporis (reſiſtentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt ABED, AB*ed*, nulla, ABFI, AB*fi* reſpectivè; atque maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit BACH.



Reſolvatur enim rectangulum BACH in rectangula innumera A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, A*k*, A*l*, A*m*, A*n*, &c.

DE MOTU CORPORUM



&c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypotheſin) ut reſiſtentiæ medii principio ſingulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK, vel ABHC ad ABkK, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi; deque vi gravitatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt ABHC, KkHC, LlHC, MmHC, &c. ut vires abſolutæ, quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atque ideo (per motûs legem II.) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn, &c. & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progreſſione geometricâ. Quare ſi rectæ Kk, Ll, Mm, Nn, &c. productæ occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ ABqK, KqrL, LrsM, MstN, &c. æquales; ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. Eſt autem area ABqK (per Corol. 3. Lem. VII. & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad ½kq ſeu AC ad ½AK, hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ſimili argumento areæ qKLr, rLMs, sMNt, &c. ſunt ad areas qklr, rlms, smnt, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio tempori ſecundi, tertii, quarti, &c. Proinde cùm areæ æquales BAKq, qKLr, rLMs, sMNt, &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ Bkq, qklr, rlms, smnt, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ Bkq, Blr, Bms, Bnt, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ ABqK, ABrL, ABsM, ABtN, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis ABrL, deſcribit ſpatium Blr, & tempore LrtN ſpatium rlnt. Q. E. D. Et ſimilis eſt demonſtratio motûs expoſiti in aſcenſu. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere,

(a) NIMIRUM ſunt Bkq, qklr, rlms, smnt ſpatia, quæ temporum differentiis æqualibus, BAKq, qKLr, rLMs, sMNt, caſu corporis conficiuntur. Horum verò ſpatiorum differentiæ rectangulorum Ak, Kl, Lm, Mn differentiis ſunt æquales. (Nempe propter areas Aq, Kr, Ls, Mt inter ſe æquales.) Rectangula autem illa, cùm ſint rectangulorum ca, ck, cl, cm, cn, geometricâ ratione decreſcentium, differentiæ, eâdem ratione geometricâ ipſa decreſcunt; hoc eſt eâ, quâ decreſcunt differentiæ, quibus velocitates corporis cadentis abſunt à velocitate maximâ, quam ultimò illud adeptum fuerit.

Nam

acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim reſiſtentiæ, quâ in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione arithmeticâ, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis, in aſcenſu; atque etiam earundem differentia, in aſcenſu, decreſcit in progreſſione geometricâ.

Corol. 3. Sed & differentiæ ſpatiorum [a], quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eâdem progreſſione geometricâ.

Corol. 4. Spatium vero à corpore deſcriptum differentia eſt duorum ſpatiorum, quorum alterum eſt ut tempus ſumptum ab initio deſcenſûs, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipſo deſcenſûs initio æquantur inter ſe.

PROP. IV. PROB. II.

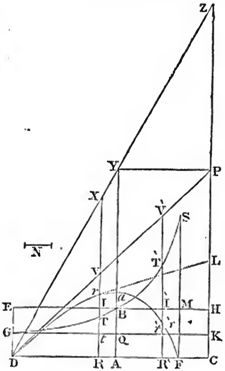
Poſito quòd vis gravitatis in medio aliquo ſimilari uniformis ſit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, reſiſtentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis D egrediatur projectile ſecundùm lineam quamvis rectam DP, & per longitudinem DP exponatur ejuſdem velocitas ſub initio motûs. A puncto P ad lineam horizontalem DC demittatur perpendiculum PC; & ſecetur DC in A, ut ſit DA ad AC ut reſiſtentia medii, ex motu in altitudinem ſub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde eſt) ut ſit rectangulum ſub DA & DP ad rectangulum ſub AC & CP ut reſiſtentia tota, ſub initio motûs, ad vim gravitatis. Aſymptotis DC, CP deſcribatur hyperbola quævis GTBS ſecans perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum DGKC, cujus latus GK ſecet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB, quâ DC ſit ad CP; & ad rectæ

Nam rectangula CB, *ck*, *cl*, C*m*, C*n* pari ratione cum differentiis velocitatum illarum minuuntur. Cùm verò rectangula A*k*, K*l*, L*m*, M*n* geometricè decreſcant, eorum etiam differentiæ, ſive differentiæ ſpatiorum B*kq*, *gklr*, *rlms*, *smnt*, ſimiliter decreſcent; hoc eſt pro ratione differentiarum, quibus velocitates corporis cadentis à maximâ velocitate abſunt.

Simili modo oſtendatur differentia ſpatiorum, quæ, æqualibus temporum differentiis, corpus aſcendendo confecerit, pro ratione ſummæ velocitatis corporis aſcendentis velocitatiſque maximæ, quâcum aſcenſum inchoaverat, decreſcere.

De Motu Corporum



DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP in I, *t* & V occurrat; in eo cape V*r* æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde eſt, cape R*r* æqualem $\frac{GTIE}{N}$ (b); & projectile tempore DRTG perveniet ad punctum *r*, deſcribens curvam lineam D*ra*F, quam punctum *r* ſemper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem *a* in perpendiculo AB, & poſtea ſemper appropinquans ad aſymptoton PC. Eſtque velocitas ejus in puncto quovis *r* ut curvæ tangens *r*L. Q. E. I.

Eſt enim N ad QB ut DC ad CP, ſeu DR ad RV; ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & R*r* (id eſt RV − V*r*, ſeu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream RDGT, & (per legum Corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum aſcenſûs, alterum ad latus. Et cùm reſiſtentia ſit ut motus, diſtinguetur etiam hæc in partes duas partibus motûs proportionales & contrarias: ideoque longitudo, à motu ad latus deſcripta, erit (per Prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo verò (per Prop. III. hujus) ut area (c), DR × AB − RDGT, hoc eſt, ut linea R*r*. Ipſo autem motûs initio area RDGT æqualis eſt rectangulo DR × AQ, ideoque

(b) Propter figuram BQ*t*I parallelogrammam erunt BQ, I*t* inter ſe æquales. Et propter figuram *t*RDG parallelogrammam erunt DR, G*t* inter ſe æquales. Quapropter cùm ſit N ad QB ut DC ad CP, erit N ad I*t* ut DC ad CP, hoc eſt, ut DR, vel G*t* ad RV. Erunt igitur rectangula G*t*IE, N × RV inter ſe æqualia. At verò N × RV, duobus N × V*r*, N × R*r* ſimul ſumptis eſt æquale. (El. II. 1.) Duo igitur N × V*r*, N × R*r* ſimul ſumpta rectangulo G*t*IE, ſive ſpatiis duobus GT*t*, GTIE ſimul ſumptis ſunt æqualia. Quare ſi N × V*r* æquale ſit ſpatio GT*t*, erit N × R*r* æquale ſpatio GTIE.

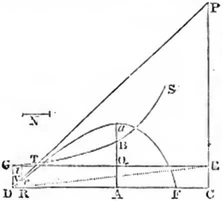
(c) Ut GTIE, hoc eſt ut $\overline{DR \times AB} - RDGT$.

(d) Corpus verò projectum altitudinem maximam in puncto *a* attingere, id ex Propoſitione tertiâ patet, et velocitatem in loco *r* eſſe ut *r*L id quidem ex Propoſitione II^a. Nempe cùm per Prop. II. velocitas motûs ad latus ſit ut RC; velocitas autem ad latus ad velocitatem motûs per Curvam

que linea illa RR (ſeu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc eſt ad DR ut AB − AQ ſeu QB ad N, id eſt, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem ſub initio. Cùm igitur Rr ſemper ſit ut altitudo, ac DR ſemper ut longitudo, atque Rr ad DR ſub initio ut altitudo ad longitudinem: neceſſe eſt, ut Rr ſemper ſit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in lineâ D*raF*, quam punctum *r* perpetuò tangit ([d]). Q. E. D.

Corol. 1. Eſt igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque ſi producatur RT ad X, ut ſit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id eſt, ſi compleatur parallelogrammum ACPY, jungatur DY ſecans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X ([e]); erit X*r* æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Corol. 2. Unde ſi capiantur innumeræ CR, vel, quod perinde eſt, innumeræ ZX in progreſſione geometricâ; erunt totidem X*r* in progreſſione arithmeticâ. Et hinc Curva D*raF* per Tabulam Logarithmorum facilè delineatur.



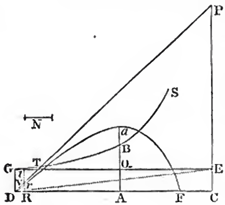
Corol. 3. Si vertice D, diametro DG deorſum productâ, & latere recto quod ſit ad 2DP ut reſiſtentia tota ipſo motûs initio ad vim gravitatis, Parabola conſtruatur: velocitas, quâcum corpus exire debet de loco D ſecundum rectam DP, ut in medio uniformi reſiſtente deſcribat Curvam D*raF*, ea ipſa erit quâcum exire debet de eodem loco D, ſecundum

Curvam in loco *r*, ut $\overline{DR}$ ad $\overline{Dr}$, hoc eſt ut RC ad *r*L.

([e]) Completo parallelogrammo ACPY, junctâque DY, quâcum recta RX, ſi opus ſit producta, in X occurrat, dico rectangula RX × N, DR × AB inter ſe æqualia. Namque recta N eſt ad QB ut DC ad CP; id enim factum eſt. Et propter hyperbolam GBS, cujus centrum C, aſymptotæ CP, CA, erit BA ad DG, vel AQ, ut CD ad CA. Convertendo et invertendo BQ erit ad BA ut DA ad DC. Cùm igitur ſit N ad QB ut DC ad CP; et QB ad AB ut DA ad DC; ex æquo perturbate, erit N ad AB ut DA ad CP vel AY. Productis autem DY, CP concurſum uſque mutuum, qui in puncto Z fiat, erit DA : AY = DC : CZ. Quare N : AB = DC : CZ. Permutando et invertendo DC : N = CZ : AB. Quare RX × DC : RX × N = DR × CZ : DR × AB. Sed rectangulum RX × DC, rectangulo DR × CZ æquale eſt. Nempe cùm, propter rectas RX, CZ inter ſe parallelas, ſit DR : RX = DC : CZ. Unde RX × N æquale erit rectangulo DR × AB. (El. V. 14.) Q. E. D.

eandem

De Motu Corporum



eandem rectam DP, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat Parabolam. Nam latus rectum parabolæ hujus, ipſo motûs initio, eſt $\frac{DV\ quad.}{Vr}$; & Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, hyperbolam GTS tangeret in G, parallela eſt ipſi DK [f], ideoque Tt eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$ [g], & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr eſt $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id eſt (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & latus rectum, $\frac{DV\ quad.}{Vr}$, prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id eſt (ob proportionales QB & CK, DA & AC [h]) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad 2DP, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. Q. E. D.

Corol. 4. Unde ſi corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam DP projiciatur; & reſiſtentia medii ipſo motûs initio detur: inveniri poteſt Curva D*raF*, quam corpus idem deſcribet. Nam ex datâ velocitate datur latus rectum parabolæ, ut notum eſt. Et ſumendo 2DP ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur DP. Dein ſecando DC in A, ut ſit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eâdem illâ ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum A. Et inde datur Curva D*raF*.

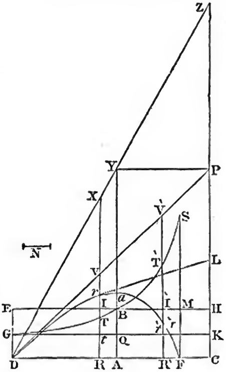
Corol. 5. Et contrà, ſi datur Curva D*raF*, dabitur & velocitas corporis, & reſiſtentia medii in locis ſingulis *r*. Nam ex datâ ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motûs, tum latus rectum parabolæ: & inde datur etiam veloci-

tas

[f] Nam recta GC, ſi ducta eſſet, illam DK mediam divideret. Nempe cùm omnis parallelogrammi diagoniæ ſe mutuò medias dividant. Quare et rectam per punctum G ductam cum illâ DK parallelam, rectis CA, CK hinc illinc occurrentem, punctum ipſum G mediam divideret. Quare recta illa hyperbolam in G contingeret. (Hamilton. Conic. Lib. 1. Prop. XXXVI.)

[g] Nam ex eo quod modò probavimus, rectam per punctum G, quæ cum rectâ DK parallelâ ſit, hyperbolam in G contingere, ſequitur naſcentes Tt, Rr, eſſe primò inter ſe æquales. Sed propter parallelas EK, Rr, eſt $CK : Rr = CD : DR$. Rectangulum igitur $CK \times DR$ rectangulo $CD \times Rr$ æquale erit. Eidem igitur $CK \times DR$ naſcens illud $CD \times Tt$ primò quidem æquale erit. Unde $Tt = \frac{CK \times DR}{CD}$ primò.

[h] Vide



tas ſub initio motûs. Deinde ex longitudine tangentis *r*L, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis *r*.

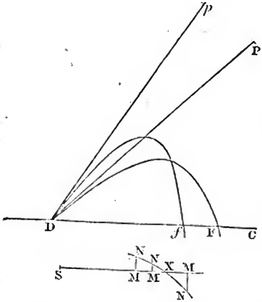
Corol. 6. Cùm autem longitudo 2DP ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in D; & ex auctâ velocitate augeatur reſiſtentia in eâdem ratione, at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: patet longitudinem 2DP augeri in ratione illâ ſimplici, ideoque velocitati ſemper proportionalem eſſe, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, niſi mutetur quoque velocitas..

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi Curvam D*ra*F ex phænomenis quamproximè, & inde colligendi reſiſtentiam, & velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eâdem cum velocitate, de loco D, ſecundum angulos diverſos CDP, CD*p* & cognoſcantur loca F, *f*, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, aſſumptâ quâcunque longitudine pro DP vel D*p*, fingatur quòd reſiſtentia in D ſit ad gravitatem in ratione quâlibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM. Deinde per computationem (ⁱ), ex longitudine illâ aſſumptâ DP, inveniantur longitudines

(ˡ) Vide Not. ˢ.

(ⁱ) —*per computationem*] Quæ ope hyperbolæ GTS facillimè ineatur; nimirum ſi ducatur recta SM cum aſymptotâ CP parallela, quæ abſcindat aream SRM datæ EIG æqualem, hæc SM cum rectâ DC in ipſo puncto F concurret. Per quodvis enim punctum *r* inter punctum altitudinis maximæ *a* punctumque F, ut ſit *r* locus aliquis corporis ab altitudine maximâ jam deſcendentis, ducatur V*r*R cum aſymptotâ CP parallela, quæ rectis DP, EH, GK, DC, hyperbolæque GTS, in punctis V, I, *y*, R, T occurrat. Jam rectangula G*y*IE, N × RV eſſe inter ſe æqualia id ſuprà oſtenſum eſt (Not. ˢ.) Duo igitur N × V*r*, N × R*r*, quæ ſimul ſumpta illud N × RV conficiunt, hæc ſimul ſumpta ſpatiis duobus I*y*GB, GBE ſimul ſumptis ſunt æqualia. Additoque communiter ſpatio EIT, tria N × V*r*, N × R*r*, EIT ſimul ſumpta duobus TGT, BGE ſimul ſumptis

longitudines DF, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum MN. Idem fac iterum ac tertiò, aſſumendo ſemper novam reſiſtentiæ ad gravitatem rationem SM, & colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, & negativæ ad alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN ſecans rectam SMMM in X, & erit SX vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hâc ratione colligenda eſt longitudo DF per calculum; & longitudo, quæ ſit ad aſſumptam longitudinem DP, ut longitudo DF per experimentum cognita ad longitudinem DF modò inventam, erit vera longitudo DP. Quâ inventâ, habetur tum curva linea DraF quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.



Scholium.

Cæterùm, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis, hypotheſis eſt magis mathematica quàm naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, reſiſtentiæ corporum ſunt in duplicatâ ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem

tis ſunt æqualia. Trium verò N×'V'r, N×'R'r, B'I'T, illud N×'V'r, è naturâ curvæ NAF ſpatio 'VG'T eſt æquale. Quare duo reliqua N×'R'r, B'I'T ſimul ſumpta ſpatio RGS ſunt æqualia. Quare N×'R'r illud ipſum eſt quo ſpatium RGS ſpatium B'I'T exſuperat. At vero puncto 'r in ipſum F tranſlato, rectangulum N×'R'r cum ipſâ rectâ 'R'r in nihilum abierit. Unde ſpatia RGS, B'I'T æqualia

quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; eſtque reſiſtentia (per motûs Leg. 2 & 3.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege reſiſtentiæ. LIBER SECUNDUS.

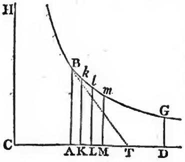
SECTIO II.

De motu corporum quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROP. V. THEOR. III.

Si corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ per medium ſimilare movetur; tempora verò ſumantur in progreſſione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico, quòd velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eâdem progreſſione geometricâ inverſè; & quòd ſpatia ſunt æqualia, quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis eſt reſiſtentia medii, & reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis;

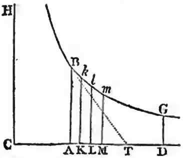


ſi tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum ſingulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in rectâ CD ſumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. hyperbolæ BklmG, centro C, aſymptotis rectangulis CD, CH deſcriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA, & diviſim AB−Kk ad Kk ut AK ad CA, & viciſſim AB − Kk ad AK ut Kk ad CA, ideoque ut AB × Kk ad AB × CA. Unde, cùm AK & AB × CA dentur, erit AB−Kk ut AB × Kk; & ultimò, ubi coeunt AB & Kk, ut ABq. Et ſimili argumento erunt Kk − Ll, Ll − Mm, &c. ut Kk *quad.* Ll *quad.* &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata ſunt ut earundem differentiæ ([a]); & idcirco cùm quadrata

æqualia fient. Definietur igitur punctum F ducendo SM, cum aſymptotâ CF parallelam, quæ abſcindat aream SMB datæ EBG æqualem. Q. E. D.

([a]) NIMIRUM ſi Hyperbola BG motu rectæ AB, cum aſymptotâ CH paralle'æ, ſuper alterâ aſymp- totâ

drata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ, his lineis deſcriptæ, ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio ſecundi KL per lineam K*k*, & longitudo primo tempore deſcripta per aream AK*k*B; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes L*l*, M*m*, &c. & longitudines deſcriptæ per areas L*l*, M*m*, &c. Et compoſitè, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum AM, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum AM*m*B (b). Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut ſint CA, CK, CL, CM, &c. in progreſſione geometricâ; & erunt partes illæ in eâdem progreſſione, & velocitates AB, K*k*, L*l*, M*m*, &c. in progreſſione eâdem inverſâ, atque ſpatia deſcripta A*k*, K*l*, L*l*, &c. æqualia. Q. E. D.



Corol. 1. Patet ergo quòd, ſi tempus exponatur per aſymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & ſpatium totum deſcriptum per aream hyperbolicam adjacentem ABGD; necnon ſpatium, quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate primâ AB, in medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum AB × AD.

Corol. 2. Unde datur ſpatium in medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi AB in medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area hyperbolica ABGD ad rectangulum AB × AD.

Corol.

totâ incedentis ſcribatur, fluxiones incedentium AB duplicatam ipſarum AB rationem inter ſe conſtanter ſervant.

Propter datam enim rectanguli CA × AB magnitudinem fluxio ejus nulla erit. Rectangula igitur $\dot{\overline{\text{CA}}} \times \text{AB}$, $\text{CA} \times \dot{\overline{\text{AB}}}$, quorum utique differentia, ſiquidem ulla eſſet, fluxio eſſet rectanguli CA × AB, hæc inquam rectangula inter ſe æqualia erunt; ne fluat rectangulum CA × AB, quod è naturâ hyperbolæ manet. Erit igitur $\dot{\overline{\text{AB}}}$ ad $\dot{\overline{\text{CA}}}$ ut AB ad CA. Hoc eſt, fluxio rectæ AB erit ad fluxionem abſciſſæ AC, ut AB ad CA. Ponatur AB motu uniformi ferri. Itaque conſtans erit fluxio abſciſſæ

AC,

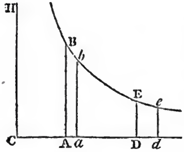
Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia medii, ſtatuendo eam ipſo motûs initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore AC, in medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem AB. Nam ſi ducatur BT quæ tangat hyperbolam in B, & occurrat aſymptoto in T; recta AT æqualis erit ipſi AC (c), & tempus exponet, quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam AB.

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et vice verſâ, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus AC, quo vis centripeta, reſiſtentiæ æqualis, generare poſſit velocitatem quamvis AB: & inde datur punctum B per quod hyperbola, aſymptotis CH, CD, deſcribi debet; ut & ſpatium ABGD, quod corpus incipiendo motum ſuum cum velocitate illâ AB, tempore quovis AD, in medio ſimilari reſiſtente deſcribere poteſt.

PROP. VI. THEOR. IV.

Corpora ſphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus, quæ ſunt reciprocè ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Aſymptotis rectangulis CD, CH deſcriptâ hyperbolâ quâvis, B*b*E*e*, ſecante perpendicula AB, *ab*, DE, *de*, in B, *b*, E, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula AB, DE, & tempora per lineas A*a*, D*d*. Eſt ergo ut A*a* ad D*d* ita (per hypotheſin) DE ad AB, & ita (ex naturâ hyperbolæ) CA ad CD;

AC, eritque fluxio incedentis AB ad rectam datam ut AB ad CA, ſive ut quadratum ex AB ad rectangulum datum AB × CA. Pari ratione eadem data recta erit ad fluxionem rectæ M*m*, ut AB × CA ad quadratum ex M*m*. Ex æquo $\dot{\overline{AB}} : \dot{\overline{Mm}} = AB^2 : Mm^2$. Q. E. D.

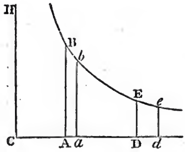
Velocitates igitur, quarum fluxiones duplicatam ipſarum rationem inter ſe conſtanter ſervant, lineis AB, K*k*, L*l*, M*m*, quibus ſimilis eſt decreſcendi lex, haud incommodè repreſentari poterunt.

(b) Vide Lib. 1. Sect. I. Lemma x. Not. F.

(c) Patet per Prop. XXXVI. Lib. 1. Conicorum Hamiltoni.

&

De Motu Corporum



& componendo, ita *ca* ad *cd*. Ergo areæ ABba, DEed, hoc eſt, ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ AB, DE ſunt ultimis *ab*, *de*, & propterea, dividendo, partibus etiam ſuis amiſſis, AB−*ab*, DE−*de*, proportionales. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR. V.

Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ ſunt ut motus primi directè & reſiſtentiæ primæ inverſè, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

Namque motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directè & reſiſtentia inverſè. Quare temporum particulis in eâ ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, ideoque retinebunt velocitates velocitatibus ſuis primis ſemper proportionales. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia, quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujuſque erit ut ejus velocitas & maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc propoſitionem) eſt in ratione priore directè & ratione poſteriore inverſè, id eſt, ut diameter directè & velocitas inverſè; ideoque ſpatium, tempori & velocitati proportionale, eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum ve-

locitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia, quibus globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia, quibus globi quibuſcunque cum velocitatibus moti amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quòd ſi globi non ſint homogenei, ſpatium à globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc propoſitionem) augetur in ratione motus directè, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et ſi globi moveantur in mediis diverſis; ſpatium in medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum Genitæ æquatur momentis Laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque in Arithmeticâ per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in Geometriâ per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, ſine additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & ſimiles. Has quantitates, ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hîc conſidero; & earum incrementa vel

De Motu Corporum

vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis, ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis, ſeu negativis, habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Lateris autem cujuſque generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus Lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur *a*, *b*, *c*, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli, AB, fuerit $aB + bA$; & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$, ſive A^3B^{-2}, momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur verò Lemma in hunc modum.

Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum, AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, ſeu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quàm primùm latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$, ſeu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB + bA$. Igitur laterum incrementis totis *a* & *b* generatur rectanguli incrementum $aB + bA$. Q. E. D.

Caſ. 2. Ponatur AB ſemper æquale G; & contenti ABC, ſeu GC, momentum (per Caſ. 1) erit $gC + cG$, id eſt (ſi pro G & *g* ſcribantur

tur AB & $aB+bA$) $aBC+bAC+cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. Q. E. D.

Caſ. 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuò ſemper æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli AB, momentum $aB+bA$ erit $2aA$; ipſius autem A^3, id eſt contenti ABC, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque A^n eſt naA^{n-1}. Q. E. D.

Caſ. 4. Unde cùm $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$, ſeu ipſius A^{-1}, eſt $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cùm $\frac{1}{A^n}$ in A^n ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unà cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$, ſeu A^{-n}, erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q. E. D.

Caſ. 5. Et cùm $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ ſit A, momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Caſ. 3: ideoque momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ſive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter ſi ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1}, ſeu $nbA^{-\frac{m}{n}}$; ideoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id eſt, æquale momento ipſius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. E. D.

Caſ. 6. Igitur Genitæ cujuſcunque, A^mB^n, momentum eſt momentum ipſius A^m ductum in B^n, unà cum momento ipſius B^n ducto in A^m, id eſt $maA^{m-1}B^n+nbB^{n-1}A^m$; idque ſive dignitatum indices m & n ſint integri numeri vel fracti, ſive affirmativi vel negativi. Et par eſt ratio contenti ſub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, ſi terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipſos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; & ſi detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter ſe ut $-2A-B$, D, $2E$, $3F$.

Corol. 2. Et ſi in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum eſt de lateribus rectanguli cujuſcunque dati.

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 3. Et ſi ſumma vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

Scholium.

In Epiſtolâ quâdam ad D. *J. Collinium* noſtratem 10 Decem. 1672 datâ, cùm deſcripſiſſem methodum Tangentium, quam ſuſpicabar eandem eſſe cum methodo *Sluſii* tum nondum communicatâ, ſubjunxi: *Hoc eſt unum particulare, vel Corollarium potiùs, methodi generalis, quæ extendit ſe citra moleſtum ullum calculum, non modò ad ducendum tangentes ad quaſvis Curvas, ſive Geometricas, ſive Mechanicas, vel quomodocunque rectas lineas aliaſve Curvas reſpicientes, verùm etiam ad reſolvendum alia abſtruſiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum, &c. neque (quemadmodum* Huddenii *methodus de Maximis & Minimis) ad ſolas reſtringitur æquationes illas quæ quantitatibus ſurdis ſunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri iſti, quâ æquationum exegeſin inſtituo, reducendo eas ad ſeries infinitas.* Hactenus Epiſtola. Et hæc ultima verba ſpectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus ſcripſeram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente (d).

PROP. VIII. THEOR. VI.

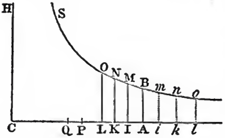
Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) inveſtigentur vires abſolutæ; dico, quòd vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione geometricâ.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; reſiſtentia per lineam indefinitam AK; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP, quæ ſit media proportionalis

(d) *Scholium Editionis Primæ & Secundæ.*

In literis quæ mihi cum Geometrâ peritiſſimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cùm ſignificarem me compotem eſſe methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & ſimilia peragendi, quæ in terminis ſurdis æquè ac in rationalibus procederet, & literis tranſpoſitis hanc ſententiam involventibus [Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice verſâ] eandem celarem: reſcripſit Vir Clariſſimus, ſe quoque in ejuſmodi methodum incidiſſe, & methodum ſuam communicavit à meâ vix abludentem præterquam

proportionalis inter AK & AC, ideoque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ; incrementum reſiſtentiæ, datâ temporis particulâ, factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C, aſymptotis rectangulis, CA, CH, deſcribatur hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO occurrens in B, N, O. Quoniam AK eſt ut APq, erit



hujus momentum KL ut illius momentum 2APQ: id eſt, ut AP in KC; nam velocitatis incrementum PQ (per motûs Leg. 2.) proportionale eſt vi generanti KC. Componatur ratio ipſius KL cum ratione ipſius KN, & fiet rectangulum KL×KN ut AP×KC×KN; hoc eſt, ob datum rectangulum KC×KN, ut AP. Atqui areæ hyperbolicæ KNOL ad rectangulum KL×KN ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L, eſt æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evaneſcens eſt ut AP. Componitur igitur area tota hyperbolica ABOL ex particulis KNOL velocitati AP ſemper proportionalibus, & propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt (e). Dividatur jam area illa in partes æquales ABMI, IMNK, KNOL, &c. & vires abſolutæ AC, IC, KC, LC, &c. erunt in progreſſione geometricâ. Q. E. D. Et ſimili argumento, in aſcenſu corporis, ſumendo, ad contrariam partem puncti A, æquales areas ABmi, *imnk*, *knol*, &c. conſtabit quòd vires abſolutæ AC, *i*C, *k*C, *l*C, &c. ſunt continuè proportionales. Ideoque ſi ſpatia omnia in aſcenſu & deſcenſu capiantur æqualia; omnes vires abſolutæ *l*C, *k*C, *i*C, AC, IC, KC, LC, &c. erunt continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi ſpatium deſcriptum exponatur per aream hyperbolicam ABNK; exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis, & reſiſtentia medii per lineas AC, AP & AK reſpectivè; & vice verſâ.

præterquam in verborum & notarum * formulis & Ideâ generationis quantitatum *. Utriuſque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

(e) NIMIRUM, tempore æquabiliter fluente, area BALO eâ lege fluit, ut illius fluxiones velocitatum corporis cadentis inter ſe rationes gerant. Sed tempore æquabiliter fluente, ſpatii, quod caſu recto corporis conficitur, fluxiones velocitatum quoque rationes induent. Areæ igitur BALO ſpatiique quod caſu recto corporis conficitur, fluxiones proportione inter ſe convenient. Area igitur ipſa ſpatiumque, cùm ſimul à nihilo generari inceperint, proportione inter ſe convenient. (Geometr. Flux. Prop. IV.)

* Hæc verba ſunt editionis ſecundæ. A primâ aberant.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus, in infinitum deſcendendo, poteſt unquam acquirere, exponens eſt linea AC.

Corol. 3. Igitur ſi in datâ aliquâ velocitate cognoſcatur reſiſtentia medii, invenietur velocitas maxima, ſumendo ipſam ad velocitatem illam datam in ſubduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis ad medii reſiſtentiam illam cognitam.

PROP. IX. THEOR. VII.

Poſitis jam demonſtratis, dico quòd, ſi tangentes angulorum ſectoris circularis & ſectoris hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcendendi ad locum ſummum ut ſector circuli, & tempus omne deſcendendi à loco ſummo ut ſector hyperbolæ.

Rectæ AC, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D, ſemidiametro AD, deſcribatur tum circuli quadrans A*t*E; tum hyperbola rectangula AVZ axem habens AX, verticem principalem A, & aſymptoton DC. Ducantur D*p*, DP, & erit ſector circularis A*t*D ut tempus omne aſcendendi ad locum ſummum; & ſector hyperbolicus ATD ut tempus omne deſcendendi à loco ſummo: ſi modò ſectorum tangentes A*p*, AP ſint ut velocitates.

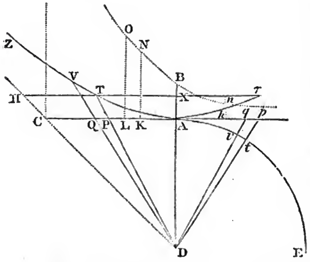
Caſ. 1. Agatur enim D*vq* abſcindens ſectoris AD*t* & trianguli AD*p* momenta, ſeu particulas quàm minimas ſimul deſcriptas, *t*D*v* & D*pq*. Cùm particulæ illæ, ob angulum communem D, ſunt in duplicatâ ratione laterum, erit particula *t*D*v* ut $\frac{qDp \times tD\ quad.}{pD\ quad.}$, id eſt, ob datam *t*D, ut $\frac{qDp}{pD\ quad.}$. Sed *p*D *quad.* eſt AD *quad.* + A*p quad.* id eſt, AD *quad.* + AD × A*k* (f), ſeu AD × C*k*; & *q*D*p* eſt $\frac{1}{2}$AD × *pq*. Ergo ſectoris particula *t*D*v* eſt ut $\frac{pq}{Ck}$; id eſt, ut velocitatis decrementum quàm minimum *pq* directè, & vis illa C*k*, quæ velocitatem diminuit, inverſè; atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens (g). Et, componendo, fit ſumma particularum

(f) Sive AC quad. + AC × A*k*; id eſt (Elem. II. 3.) AC × C*k*, ſive propter AC, AD inter ſe æquales, AD × C*k*.

(g) Nam fluxio velocitatis, erit ut vis illa quæ velocitatem mutat, & fluxio temporis conjunctim. Quare fluxio temporis erit ut fluxio velocitatis directè et vis illa quæ velocitatem mutat, contrariè.

ticularum omnium *tDv* in ſectore AD*t*, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis A*p* particulis amiſſis *pq* reſpondentium, uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus AD*t* eſt ut tempus totum aſcendendi ad locum ſummum. Q. E. D.

Caſ. 2. Agatur DQV abſcindens tum ſectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quàm minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut DT*q* ad DP*q*, id eſt (ſi TX & AP parallelæ ſint) ut DX*q* ad DA*q* vel TX*q* ad AP*q*, & diviſim ut DX*q*−TX*q* ad DA*q*−AP*q*. Sed, ex naturâ hyperbolæ, DX*q*−TX*q* eſt AD*q*, & per hypotheſin AP*q* eſt AD × AK. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut AD*q* ad AD*q*−AD × AK; id eſt, ut AD ad AD−AK, ſeu AC ad CK: ideoque ſectoris particula TDV eſt $\frac{\text{PDQ} \times \text{AC}}{\text{CK}}$ (h); atque ideo ob datas AC & AD, ut $\frac{\text{PQ}}{\text{CK}}$, id eſt, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inverſè; atque ideo ut particula temporis incremento reſpondens (i). Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatitis AP particulæ PQ generantur, ut ſumma particularum ſectoris ATD, id eſt, tempus totum ut ſector totus. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi AB æquetur quartæ parti ipſius AC, ſpatium, quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area ABNK, quâ ſpatium ca-

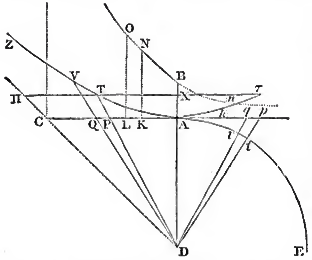
contrariè.

(h) Sive $\frac{\frac{1}{2}\text{AD} \times \text{PQ} \times \text{AC}}{\text{CK}}$.

(i) Vide Not. s.

 dendo

dendo deſcriptum exponitur, ad aream ATD, quâ tempus exponitur. Nam cùm ſit AC ad AP ut AP ad AK, erit (per Corol. 1. Lem. 2. hujus) LK ad PQ ut 2AK ad AP, hoc eſt, ut 2AP ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}$PQ ut AP ad $\frac{1}{4}$AC, vel AB; eſt & KN ad AC, vel AD, ut AB ad CK; itaque ex æquo LKNO ad DPQ ut AP ad CK. Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rurſus ex æquo LKNO eſt ad DTV ut AP ad AC; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam, quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cùm igitur arearum ABNK & ATD momenta, LKNO & DTV, ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ ABNK & ATD ut ſpatia tota ab initio deſcenſûs deſcripta. Q. E. D.



Corol. 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio, quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quòd ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore deſcriptum, ut eſt area AB*nk* ad ſectorem AD*t*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum APD ad ſectorem hyperbolicum ATD. Nam velocitas in medio non reſiſtente foret ut tempus ATD, & in medio reſiſtente eſt ut AP, id eſt, ut triangulum APD. Et velocitates illæ initio deſcenſûs æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ ATD, APD.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, quâ corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum A*p*D ad ſectorem circularem A*t*D; ſive ut recta A*p* ad arcum A*t*.

Corol.

Corol. 5. Eſt igitur tempus, quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam AC in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut ſector ADT ad triangulum ADC: & tempus, quo velocitatem A*p* in medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut arcus A*t* ad ejus tangentem A*p*.

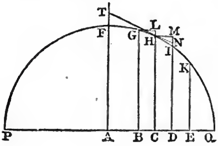
Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima (per Corol. 2 & 3. Theor. VI. Lib. 2.) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo ſectorem ADT, vel AD*t*, ad triangulum ADC in ratione temporis dati ad tempus modò inventum; dabitur tum velocitas AP vel A*p*, tum area ABNK vel AB*nk*, quæ eſt ad ſectorem ADT vel AD*t* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illâ maximâ jam antè inventâ, uniformiter deſcribi poteſt.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato aſcenſûs vel deſcenſûs ſpatio AB*nk* vel ABNK, dabitur tempus AD*t* vel ADT.

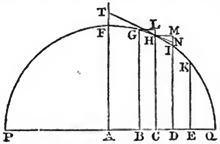
PROP. X. PROB. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.

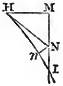
Sit PQ planum illud plano ſchematis perpendiculare; PFHQ linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q; G, H, I, K loca quatuor corporis, in hâc Curvâ, ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE Ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demiſſæ, & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E inſiſtentes; & ſint BC, CD, DE diſtantiæ Ordinatarum inter ſe æquales. A punctis



tis G & H ducantur rectæ, GL, HN, Curvam tangentes in G & H, & ordinatis, CH, DI, ſurſum productis occurrentes in L & N; & compleatur parallelogrammum HCDM. Et tempora, quibus corpus deſcribit arcus GH, HI, erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum, LH, NI, quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, à tangentibus cadendo; & velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ, GH, HI, directè, & tempora inverſè. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & decrementum velocitatis, tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à reſiſtentiâ corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & ſpatium NI cadendo deſcribente, generat velocitatem, quâ duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet, ut *Galilæus* demonſtravit; id eſt, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI deſcribente, auget arcum illum ſolâ longitudine HI − HN, ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$ (k); ideoque generat tantùm velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentiâ ſolâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem



2NI



(k) Centro H, radio HN, ſcribatur arcus circularis Nn, qui Curvæ HI in n occurrat. Evaneſcente arcu HI, erunt HN, Hn ultimò æquales. Unde HI − HN = In. Angulus autem InN, cùm rectus ultimò fiat, recto IMH erit ultimò æqualis. Angulusque MIH figuris duabus MIH, nIN eſt communis. Quare evaneſcente arcu HI, figuræ illæ ultimò fiunt triangula, inter ſe ſimilia, contrariè poſita. Quare lineis NI, In, eadem quæ illis HI, IM erit ratio ultima. Rectangula igitur MI × NI, HI × In ultimò inter ſe æqualia. Unde In, ſive HI − HN, $= \frac{MI \times NI}{HI}$ ultimò.

(l) Vide Lib. I. Sect. XIII. Scholium, Not. c.

(m) Nempe $GH = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}$.

Quare $\frac{t \times GH}{T} = \frac{\overline{Ro + \frac{3}{2}So^2}\sqrt{1+QQ}}{R} - \frac{Ro^2 + \frac{3}{2}So^3}{\sqrt{1+QQ}}\,Q$.

Sed

$\frac{2NI}{t}$; reſiſtentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}+\frac{2MI\times NI}{t\times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t\times GH}{T}-HI+\frac{2MI\times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abſciſſis CB, CD, CE ſcribatur $-o$, o, $2o$. Pro ordinatâ CH ſcribatur P, & pro MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo+Roo+So^3+$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo+So^3+$&c. erunt NI [l], & ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P-Qo-Roo-So^3-$&c. $P-2Qo-4Roo-8So^3-$ &c. & $P+Qo-Roo+So^3-$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum, $BG-CH$, & $CH-DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata; $oo+QQoo-2QRo^3+$ &c. & $oo+QQoo+2QRo^3+$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ}-\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1+QQ}+\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea, ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinatâ DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK ſagittæ, Roo, & $Roo+3So^3$. Et hæ ſunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t: & inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$, ſeu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t\times GH}{T}-HI+\frac{2MI\times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ [m]. Et cùm 2NI ſit $2Roo$, reſiſtentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id eſt, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea eſt, quâcum corpus de loco quovis H, ſecundum tangentem HN egrediens, in parabolâ, diametrum HC &

Sed $HI=o\sqrt{1+QQ}+\frac{QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}=\frac{Ro\sqrt{1+QQ}}{R}+\frac{Ro^2}{\sqrt{1+QQ}}Q$.

Quare $\frac{t\times GH}{T}-HI=\frac{\frac{3}{2}So^2}{R}\sqrt{1+QQ}-\frac{2Ro^2+\frac{3}{2}So^3}{\sqrt{1+QQ}}Q$.

Rurſum evaneſcente o, $MI=Qo$ ultimò, & $NI=Ro^2$ ultimò.

Quare $2MI\times NI=2Ro^3Q$ ultimò.

Et $\frac{2MI\times NI}{HI}=\frac{2Ro^3}{o\sqrt{1+QQ}+\frac{QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}}Q=\frac{2Ro^2}{\sqrt{1+QQ}}Q$ ultimò.

Quare $\frac{t\times GA}{T}-HI+\frac{2MI\times NI}{HI}=\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}-\frac{3So^3Q}{2\sqrt{1+QQ}}=\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ultimò.

latus

De Motu Corporum

latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ ſeu $\frac{1+QQ}{R}$ (n) habente, deinceps in vacuo moveri poteſt.

Et reſiſtentia eſt ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim; & propterea medii denſitas eſt ut reſiſtentia directè & quadratum velocitatis inverſè, id eſt, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè, & $\frac{1+QQ}{R}$ inverſè, hoc eſt, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Q. E. I.

Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet AF in T: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$ (o), ideoque in ſuperioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribi poteſt. Quâ ratione reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii denſitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, ſi curva linea PFHQ definiatur per relationem inter baſem, ſeu abſciſſam, AC, & ordinatim applicatam CH, ut moris eſt; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expeditè ſolvetur, ut in Exemplis ſequentibus.

Exempl. 1. Sit linea PFHQ ſemicirculus ſuper diametro PQ deſcriptus, & requiratur medii denſitas, quæ faciat, ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Biſecetur diameter PQ in A; dic AQ, n; AC, a; CH, e; & CD, o: & erit DIq ſeu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum noſtram (p) extractâ, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}$ – &c. Hîc ſcribatur nn pro $ee+aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ – &c.

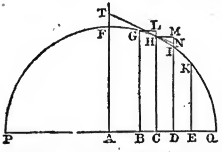
Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; ſecundum, in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium

(n) Nempe $HN^2 = HM^2 + MN^2$. Sed $HM^2 = oo$: et evaneſcente CD, vel o, $MN = Qo$ ultimò, et $MN^2 = QQoo$. Quare $HN^2 = oo \times \overline{1+QQ}$. Rurſum $NI = Roo$ ultimò. Quare $\frac{HN^2}{NI} = \frac{oo \times \overline{1+QQ}}{Roo} = \frac{1+QQ}{R}$.

(o) Propter duas rectas DN, AT, cum tertiâ CH parallelas, erit HT ad AC ut HN ad CD. Unde HT ×

um eſt; & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hîc eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ, CH, inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus terminus, qui hîc eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id eſt, lineolam MN, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum HCDM, atque ideo poſitionem tangentis HN ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo MN ad HM ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hîc eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$, deſignabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & Curvam; ideoque determinat angulum contactûs IHN, ſeu curvaturam quam curva linea habet in H. Si lineola illa IN finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium unà cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſequentes evadent infinitè minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione Problematum, quæ pendent à Tangentibus & Curvaturâ Curvarum (q).

LIBER SECUNDUS.



Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c. cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3$ — &c. & perinde pro P, Q, R & S, ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$, ſeu $\frac{n}{e}$; & prodibit medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc eſt (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, ſeu $\frac{AC}{CH}$, id eſt, ut tangentis longitudo illa HT (r), quæ ad ſemidiametrum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem, terminatur: & reſiſtentia erit ad gravitatem ut

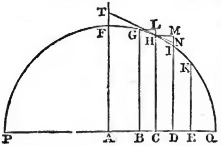
HT × CD = AC × HN. Sive HT × o = AC × o × $\sqrt{1+QQ}$. Unde $\frac{HT \times o}{AC \times o}$, ſive $\frac{HT}{AC}$, = $\sqrt{1+QQ}$.

(p) Vide Analyſ. per Æquat. Infin. Cap. III. § 5. & Geometr. Analyt. Cap. I. § 8.

(q) Confer Lib. I. Sect. 13. Scholium, & Scholium ad finem Libri De Quadraturâ Curvarum.

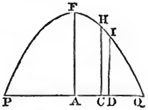
(r) Nimirum juncta AH efficeret triangula duo AHC, AHT inter ſe ſimilia, propter angulos ad C et H rectos, anguloſque CHA, HAT inter ſe æquales. Quare AC : CH = TH : HA. Arithmeticè igitur $\frac{AC}{CH} = \frac{TH}{HA}$. Unde, propter datam HA, erit quantitas $\frac{AC}{CH}$ ut recta TH.

3a ad 2n, id eſt, ut 3AC ad circuli diametrum PQ: velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi corpus juſtâ cum velocitate ſecundum lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & medii denſitas in ſingulis locis, H, ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut 3AC ad PQ, corpus illud deſcribet circuli quadrantem FHQ. Q. E. I.



At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC, ſeu a, ad contrarias partes centri A; & propterea ſignum ejus mutandum eſſet, & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus, aſcendendo à P, deſcribat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus à medio impellente accelerari, non à reſiſtente impediri (s).

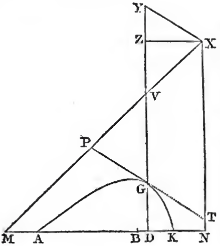
Exempl. 2. Sit linea PFQ Parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile in ipſâ moveatur.



Ex naturâ Parabolæ, rectangulum PDQ, æquale eſt rectangulo ſub ordinatâ DI & rectâ aliquâ datâ: hoc eſt, ſi dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$, ſeu $ac-aa-2ao+co-oo$, æquale eſt rectangulo b in DI, ideoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cùm verò plures non ſint termini, debebit quarti coefficiens S evaneſcere; & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui medii

(s) Et vix magis naturaliter fieri poſſit, meo ſaltem judicio, ut corpus, è loco F projectum, per circuli

dii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nullâ igitur medii denſitate movebitur projectile in Parabolâ, uti olim demonſtravit *Galilæus*. Q. E. I. LIBER SECUNDUS.



Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hâc lineâ.

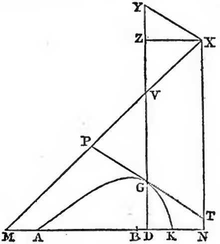
Sit MX aſymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V; & ex naturâ hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb: & completo parallelogrammo DNXZ; dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX, vel DN, ponatur eſſe $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD, ſeu NX−VZ−VG, æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Reſolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in ſeriem convergentem, $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus feriei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in regulâ ſuperiore pro Q, R & S. Quo facto prodit medii denſitas ut

$$\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}} \text{ ſeu } \frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}};$$

id eſt, ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ ſunt

circuli quadrantem FQ deferatur. Cùm ad talem corporis motum eâ opus eſſet materiæ, per quam iter ei faciendum eſſet, denſitate, quæ in loco ſummo F nulla eſſet, in loco Q infinita.

ipſarum XZ & ZY quadrata (t). Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet 3XY ad 2YG (u); & velocitas ea eſt, quâcum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY\ \text{quad.}}{VG}$ habente (x). Ponatur itaque, quòd medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciprocè ut diſtantiæ XY, quòdque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut 3XY ad 2YG; & corpus de loco A, juſtâ cum velocitate emiſſum, deſcribet hyperbolam illam AGK. Q. E. I.



Exempl. 4. Ponatur indefinitè, quòd linea AGK hyperbola ſit, centro X, aſymptotis MX, NX, eâ lege deſcripta, ut, conſtructo rectangulo XZDN, cujus latus ZD ſecet hyperbolam in G & aſymptoton

(t) Nempe evaneſcente o, vel BD, DN vel $ZX = a$ ultimò. Quare $XZ^2 = aa$ ultimò. Rurſum cùm ſit $VG = \frac{bb}{a-o}$, et $VZ = \frac{ma - mo}{n}$, erit $VG = \frac{bb}{a}$, et $VZ = \frac{ma}{n}$ ultimò. Unde $ZY = VG - VZ = \frac{bb}{a} - \frac{ma}{n}$ ultimò. Quare $ZY^2 = \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{a^2}$ ultimò.

Cæterùm denſitatem materiæ, per quam iter corpori faciendum eſſet, quod curſu ſuo hyperbolam AGK ſcriberet, eam cum quantitate $\frac{1}{XY}$ proportione convenire, elegantius longè ad hunc modum concludetur. Recta TG producta cum aſymptotâ XV in P concurrat. Erunt TG, GP inter ſe æquales. (Hamilton. Conic. Lib. 1. Prop. XXXVI.) Ac proinde, cùm parallelæ ſint VG, XT, erunt PV, VX inter ſe æquales. Sed VG, VY inter ſe æquales. (Id enim factum eſt.) Duæ igitur PV, VG, duabus XV, VY ſingulatim ſunt æquales. Anguluſque XVY angulo PVG æqualis. (El. I. 15.) Quare XY, PG (El. I. 4.) ac proinde XY, GT erunt inter ſe æquales. Denſitas igitur, quæ ex Corollario 1°. quantitatis $\frac{S \times BN}{R \times GT}$ rationem ſervat, ea hujus etiam $\frac{S \times BN}{R \times XY}$ rationem ſervabit. Sed $S = \frac{bb}{a^4}$, et $BN = a$. Undè $S \times BN = \frac{bb}{a^3}$. Sed $R = \frac{bb}{a^3}$. Quare $\frac{S \times BN}{R} = 1$, et $\frac{S \times BN}{R \times XY} = \frac{1}{XY}$. Denſitas igitur quantitatis $\frac{1}{XY}$ rationem ſervabit.

(u) Nimirum evaneſcente rectâ BD, ut illæ BN, DN ultimò æquales fiant, renixus materiæ erit ad vim gravitatis (per Cor. 1.) ut $3S \times GT$ ad $4RR \times BN$; hoc eſt, cùm æquales ſint GT, XY (Not. t) ut $3S \times XY$ ad $4RR \times BN$; ſive ut $\frac{3bb}{a^4} \times XY$ ad $\frac{4b^4}{a^6} \times a$, hoc eſt ut $3aXY$, ſive $3BN \times XY$ ad $4b^2$. Sed $b^2 = DN \times VG$. Quare $4b^2 = DN \times 4VG = DN \times 2YG$. Quare renixus materiæ erit ad vim gravitatis ut $3BN \times XY$ ad $DN \times 2YG$, ultimò ſcilicet rectâ BD evaneſcente. Evaneſcente autem rectâ BD, factiſque BN, DN ultimò æqualibus, $3BN \times XY$ erit ultimò ad $DN \times 2YG$ ut 3XY ad 2YG. Renixus

ſ.. nixus

ſymptoton ejus in V, fuerit VG reciprocè ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur medii denſitas, quâ projectile progrediatur in hâc Curvâ.

Pro BN, BD, NX ſcribantur A, O, C reſpectivè, ſitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis $A-O$, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\,\overline{A-O}$, & GD, ſeu $NX-VZ-VG$, æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$. Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$ in ſeriem infinitam, $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. (y) ac fiet GD æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro QO, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro RO^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro SO^3. Et inde medii denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$ (z), ideoque ſi in VZ capiatur VY æqualis $n \times VG$, denſitas illa eſt reciprocè

nixus igitur materiæ erit ad vim gravitatis, in loco utique G, ut 3XY ad 2YG.

(x) VELOCITAS enim corporis, è puncto G hyperbolæ egredientis, ea erit, quâcum ſecundum dictum parabolæ diametro DG, latere recto cujus ſymbolum eſſet $\frac{1+QQ}{R}$, corpus idem per inane ferri poſſit. At verò per Corollarium primum $1+QQ = \frac{GT^2}{BN^2} = \frac{GT^2}{a^2}$. (Ultimo ſcilicet evaneſcente BD, ut illæ BN, DN æquales habeantur.) Et R, è naturâ hyperbolæ, $= \frac{bb}{a^3}$. Unde $\frac{1+QQ}{R} = \frac{GT^2 \times a}{bb} = \frac{GT^2 \times BN}{DN \times VG}$, ultimò ſcilicet rectâ BD evaneſcente. Ita verò BN, DN ultimò æquales fiunt, et illud $\frac{GT^2 \times BN}{DN \times VG}$ huic $\frac{GT^2}{VG}$ fit ultimò æquale. Quare $\frac{1+QQ}{R}$, ſive latus rectum parabolæ de quâ agitur, rectæ $\frac{GT^2}{VG}$, ſive propter æquales GT, XY (Not. [t]) rectæ $\frac{XY^2}{VG}$ æqualis erit.

(y) QUOD ita facillimè efficietur ſi quantitate $\frac{1}{\overline{A-O}|^n}$, ſive $\overline{A-O}|^{-n}$, ope Theorematis binomialis, in ſeriem infinitam $A^{-n} + nA^{-n-1}O + \frac{nn+n}{2}A^{-n-2}O^2 + \frac{n^3+3n^2+2n}{6}A^{-n-3}O^3 +$, reſolutâ, ſeriei illius membra in quantitatem bb ſingulatim multiplicentur.

(z) NEMPE propter $S = \frac{n^3+3n^3+2n}{6A^{n+3}}bb$, et $R = \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bb$, erit $\frac{S}{R} = \frac{n+2}{3A}$. Quare denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, erit $\frac{n+2}{3A\sqrt{1+QQ}}$. Et propter $Q = \frac{d}{e} - \frac{nbb}{A^{n+1}}$ erit $QQ = \frac{dd}{ee} - \frac{2ndbb}{eA^{n+1}} + \frac{n^2b^4}{A^{2n+2}}$.

Et

reciprocè ut XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipſarum XZ & ZY quadrata (aa). Reſiſtentia autem in eodem loco G ſit ad gravitatem ut 3S in $\frac{XY}{A}$ ad 4RR, id eſt, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ VG (bb). Et velocitas ibidem ea ipſa eſt, quâcum corpus projectum in Parabolâ pergeret, verticem G, diametrum GD, & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ ſeu $\frac{2XY \text{ quad.}}{nn+n \text{ in } VG}$ habente (cc). Q. E. I.

Scholium.

Et $1+QQ = 1 + \frac{dd}{ee} - \frac{2ndbb}{eA^{n+1}} + \frac{n^2b^4}{A^{2n+2}}$. Et $A\sqrt{1+QQ} = \sqrt{AA + \frac{dd}{ee}AA - \frac{2ndbb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}$.

Unde denſitas $\frac{n+2}{3A\sqrt{1+QQ}} = \frac{n+2}{3\sqrt{AA + \frac{dd}{ee}AA - \frac{2ndbb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$.

(aa) Nempe $ZX = DN = A - o$. Hinc evaneſcente BD vel o, $ZX = A$ ultimò, et $ZX^2 = AA$ ultimò. Rurſum $VY = nVG = \frac{nbb}{\overline{DN}|^n} = \frac{nbb}{\overline{A-o}|^n} = \frac{nbb}{A^n}$ ultimò. Et $VZ = \frac{d}{e}DN = \frac{d}{e}A$ ultimò.

Quare $ZY = VY - YZ = \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$ ultimò. Unde $ZY^2 = \frac{dd}{ee}AA - \frac{2ndbb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}$.

Hinc $\sqrt{AA + \frac{dd}{ee}AA - \frac{2ndbb}{A^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}} = \sqrt{ZX^2 + ZY^2} = XY$. Unde denſitas $= \frac{n+2}{3XY}$. Ac proinde, propter numeros $n+2$ et 3 datos, denſitas rationem quantitatis XY contrariam ſervat.

(bb) $XY = \sqrt{AA + \frac{dd}{ee}AA - \frac{2ndbb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}$ (per Not. aa) $= A\sqrt{1+QQ}$ (per Not. z). Ergo $XY = A\sqrt{1+QQ}$. Et per Cor. 1. $A\sqrt{1+QQ} = GT$. Quare rectæ GT, XY inter ſe æquales.

Rurſum renixus materiæ erit ad vim gravitatis, in loco G, ut $\frac{3S \times GT}{A}$ ad 4RR (per Cor. 1.) Erit igitur renixus ille ad vim gravitatis ut $\frac{3S \times XY}{A}$ ad 4RR, hoc eſt ut, $\frac{n^3+3n^2+2n}{2A^{n+4}}bbXY$ ad $\frac{\overline{nn+n}|^2}{A^{2n+4}}b^4$.

Sive ut $\overline{n^3+3n^2+2n}.A^n.XY$ ad $2\,\overline{nn+n}|^2 bb$; vel dividendo quantitate $\overline{nn+n}|^2$, ut $\frac{n+2}{nn+n}A^n.XY$ ad $2bb$; vel, propter $A = BN$ &, $bb = VG \times DN^n$, ut $\frac{n+2}{nn+n} \times BN^n.XY$ ad $2VG \times DN^n$. Evaneſcente autem rectâ BD, factiſque BN^n, DN^n ultimò inter ſe æqualibus, erit $\frac{n+2}{nn+n}BN^n XY$ ad $2VG \times DN^n$ ultimò ut $\frac{n+2}{nn+n}XY$ ad 2VG, hoc eſt ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ VG. Renixus igitur materiæ ad vim gravitatis, in loco hyperbolæ G, erit ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ VG.

(cc) 1+

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiit denſitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Corollario primo, ſi reſiſtentia ponatur ut velocitatis, v, dignitas quælibet v^n, prodibit denſitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$ (dd). Et propterea ſi Curva inveniri poteſt eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$,

(c) $1+QQ = \frac{XY^2}{A^2}$ (Not. bb.) Sed $R = \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bb$. Ergo $\frac{1+QQ}{R} = \frac{2XY^2.A^n}{nn+n.bb} = \frac{2XY^2.BN^n}{nn+n\,VG.BN^n}$ $= \frac{2XY^2}{nn+n\,VG}$.

(dd) Nempe Formula, per quam vis renitentis materiæ ad vim gravitatis rationem Newtonus repræſentari docuit, ea quàm maximè generalis eſt: ac quæcunque fuerit lex, quâ vim illam renixûs velocitatibus attemperari ponas, ratio vis ejus ad vim gravitatis ſemper ea erit, quæ quantitatis $3S\sqrt{1+QQ}$ ad quantitatem $4RR$ quantitatibus utique illis, S, Q, R, pro varia lege renixûs variis.

Velocitas quoque quâcum corpus per Curvam FHQ latum (vid. fig. p. 289) à loco H diſcedit, pro omni lege renixûs, ea erit quâcum ex eodem loco H ſecundum rectam HN emitti oporteret, ut ſecundum ductum Parabolæ, diametro HC, latere recto cujus illud $\frac{1+QQ}{R}$ ſymbolum eſſet, per inane ferri poſſet.

Denique, quæcunque fuerit lex renixûs, manet æquatio illa, Corollario primo conſtituta, $\frac{HT}{AC} = \sqrt{1+QQ}$.

Quæcunque igitur fuerit renixûs lex, velocitas quantitatis $\frac{1+QQ}{R}$ rationem ſubduplicatam ſervabit, ſecundum doctrinam Galilæi. Erit igitur velocitas ut $\overline{\frac{1+QQ}{R}}\Big|^{\frac{1}{2}}$. Ponamus igitur renixum eſſe ut denſitas materiæ et poteſtas velocitatis à numero n denominata conjunctim, hoc eſt literâ r renixum ſignificante, literâ D denſitatem, literâ V velocitatem, ponamus r eſſe ut $D \times V^n$; itaque erit D ut $\frac{r}{V^n}$. At verò cùm r ſit ad vim gravitatis æquabilem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, ſi pro vi illâ æquabili gravitatis ponatur 1, erit $r = \frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR} = \frac{3S}{4RR} \times \frac{HT}{AC}$. Rurſum velocitas ſive V, cùm ſit ut $\overline{\frac{1+QQ}{R}}\Big|^{\frac{1}{2}}$, hoc eſt ut $\frac{HT}{R^{\frac{1}{2}} \times AC}$, erit V^n ut $\frac{HT^n}{R^{\frac{n}{2}} \times AC^n}$. Ergo $\frac{r}{V^n} = \frac{3S}{4RR} \times \frac{HT}{AC} \times \frac{R^{\frac{n}{2}} \times AC^n}{HT^n} = \frac{3S}{4.R^{\frac{4-n}{2}}} \times \frac{AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$. Hujus igitur quantitatis rationem, illa D, ſive denſitas materiæ, conſtanter ſervabit. Propter numeros autem 3, 4, datos, hujus etiam, $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \frac{AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, eadem ratio erit.

vel

De Motu Corporum

vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$: corpus movebitur in hâc Curvâ in uniformi medio, cum reſiſtentiâ quæ ſit ut velocitatis dignitas v^n. Sed redeamus ad Curvas ſimpliciores.

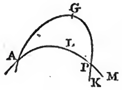
Quoniam motus non fit in Parabolâ niſi in medio non reſiſtente, in Hyperbolis verò hîc deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt, quòd linea, quam projectile in medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propiùs accedit ad hyperbolas haſce (ee) quàm ad parabolam. Eſt utique linea illa hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab aſymptotis; in partibus à vertice remotioribus propiùs ad ipſas accedit, quàm pro ratione hyperbolarum quas hîc deſcripſi (ff). Tanta verò non eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ, in rebus practicis, non incommodè adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quàm hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ verò in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum XYGT, & recta GT tanget hyperbolam in G, ideoque denſitas medii in G eſt reciprocè ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in GV.

Proinde ſi corpus de loco A ſecundum rectam AH projectum deſcribat hyperbolam AGK, & AH producta occurrat aſymptoto NX in H, actaque AI eidem parallela occurrat alteri aſymptoto MX in I: erit medii denſitas in A reciprocè ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut AH ad

2nn

(ee) Cum nullâ tamen earum omni ex parte conveniet. Cùm corporis per quamlibet earum motus eam poſtulaverit materiæ circumfuſæ denſitatem, cui immutabili eſſe non liceat, ſiquidem rectæ mutabilis XY rationem contrariam neceſſe eſt ea conſtanter ſervet. *(Le Seur & Jacquier ad locum.)*



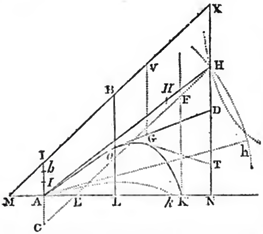
(ff) Puta corpori, è loco A, ſecundum tangentem AH, eâ cum velocitate projecto, quâcum projiciendum eſſet corpus aliud, quod, per materiam variè in variis locis, lege quâ oporteret, condenſatam, per hyperbolam AGK (vid. fig. text. p. 297) incederet, hâc inquam velocitate, è loco A, ſecundum tangentem AH, projecto corpori per materiam, uniformi quâdam denſitate præditam, puta iter faciendum eſſe. Jam ſi denſitas illa uniformis ea ſit, quæ, corpore per hyperbolam AGK incedente, maximam inter minimamque materiæ circumfuſæ denſitatem media eſſet, denſitas materiæ circa locum A, quæ motum corporis per hyperbolam illam præſtaret, uniformi illâ denſitate minor eſſet, ob tangentem AH medii, ſi ita dicam, tangente majorem. Renixus igitur materiæ uniformis, per quam corpus iter facere poſuimus, in loco A, renixu illo qui motum per hyperbolam AGK præſtaret, validior. Impetus igitur corporis è loco A projecti

in

$\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt ſequentes regulæ.

Reg. 1. Si ſervetur tum medii denſitas in A, tum velocitas quâcum corpus projicitur, & mutetur angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX (gg). Ideoque ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expeditè determinari poteſt.

Reg. 2. Si ſervetur tum angulus NAH, tum medii denſitas in A, & mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; ſervabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.



Reg. 3. Si tam angulus NAH, quàm corporis velocitas in A, gravitaſque acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: & propterea minuetur AH in eâdem ratione, & AI minuetur in ratione illâ duplicatâ (hh). Augetur verò proportio reſiſtentiæ ad

in materiâ uniformi citiùs langueſcet, et corpus per Curvam quandem, ALM, feretur hyperbolâ AGX parte ſaltem aſcendente interiorem, ut in figurâ hic appoſitâ.

Curva igitur interior, circa verticem depreſſior, ampliore ſinu brachia pandens, aſymptotas, quas proprias utique habebit, infimâ parte, propiùs acceſſura eſt, quàm hyperbola illa ſuas.

(gg) Nam data denſitate dabitur AH. Datâque velocitate dabitur recta $\frac{AH^2}{AI}$. Quæ ſi dicatur a, erit quadratum ex AH rectangulo $AI \times a$ æquale. Quadratum autem ex datâ AH dabitur. Dabitur igitur rectangulum $AI \times a$. Recta autem a data. Quare et AI. Rectarum autem HX, AI mutua ratio data. Nam ſi producatur HA occurſum uſque aſymptotæ XM, è naturâ hyperbolæ XGA, pars illa omnis tangentis HA, quæ duabus aſymptotis XN, XM intercepta eſt, ad partem illam quæ à puncto contactûs, A, ad aſymptotam XM pertingit, rationem habet quam numerus $n+1$ ad 1. Quare et HX ad AI eandem numeri $n+1$ ad 1 rationem habebit. Rectæ igitur HX ad rectam AI ratio data. Datâ igitur illâ AI, dabitur quoque HX. (Dat. 2.) Tres igitur AH, AI, HX magnitudine ſingulatim datæ. Q. E. D.

(hh) Exponatur recta g datæ cujuſvis longitudinis. Sit Xr alia recta eâ lege mutabilis, ut recta Xr ad datam g rationem ſemper habeat, quam vis motrix reniſûs in loco A ad vim motricem gravitatis. Datoque angulo NAH, datâque etiam corporis, è loco A projecti, velocitate; ſint AH, AI

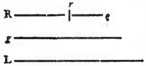
 rectarum

De Motu Corporum

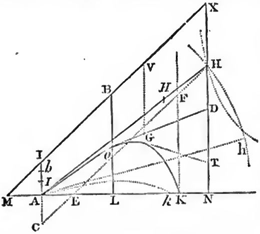
ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine ſit minor, vel medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminutâ, diminuitur in minore ratione quàm pondus.

Reg. 4. Quoniam denſitas medii prope verticem hyperbolæ major

rectarum AH, AI magnitudines, quas proportio illa vis renixûs ad vim motricem gravitatis, quæ eadem ſit quæ rectæ Rr ad rectam *g*, poſtulaverit. Vi autem renixûs ratione gravitatis motricis ita auctâ, ut Rr in Rϱ increverit, rectæ AH, AI magnitudines alias, A*H*, A*I*, ſint adeptæ. Dicit Newtonus, ſi augeatur vis renixûs ratione gravitatis, rectam AH imminui; hoc eſt ſi Rϱ major ſit quàm Rr, eſſe A*H* minorem quàm AH. Dicit etiam AI eâdem ratione minui, quâ quadratum ex AH minuitur; hoc eſt, exiſtente Rϱ majore quàm Rr dicit A*I* minorem eſſe quàm AI, et tali quidem ratione minorem, ut ſit A*I* ad AI ut quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. Dicit denique AH eâdem ratione minui quâ Rr augetur; hoc eſt, dicit A*H* eſſe ad AH ut Rr ad Rϱ. Nos autem ea, quæ Newtonus affirmavit, oſtendimus hoc modo.



Dato angulo NAH, propter rectam AN poſitione datam punctumque A datum, recta AH poſitione data erit. (Dat. 29.) Datâque velocitate illâ quâcum corpus è loco A emiſſum eſt, Parabola, cujus ductum corpus ex eodem loco A, ſecundum rectam poſitione datam AH cum datâ illâ velocitate projectum, per inane ſequeretur, hæc inquam Parabola poſitione dabitur. Quare latus ejus rectum ad verticem A magnitudine dabitur. Huic æqualis ſit recta L. Recta igitur L magnitudine data. Sed quadrata ex A*H*, AH rectangulis $\frac{nn+n}{2}$ A*I* × L, $\frac{nn+n}{2}$ AI × L ſingulatim ſunt æqualia. (Vid. Exempl. 4. Not.[cc].) Quadratum igitur ex A*H* ad quadratum ex AH eam habet rationem quam rectangulum A*I* × L ad rectangulum AI × L, ſive eam quam A*I* ad AI. Jam verò cùm Rϱ major ſit quàm Rr, major eſt Rϱ quàm ut habeat ad rectam *g* rationem eam quam Rr ad *g*. Sed Rϱ eſt ad *g* ut A*H* ad $\frac{2nn+2n}{2+n}$ A*I*; et Rr eſt ad *g* ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI (Exempl. 4. Not.[bb].) Major itaque eſt A*H* quàm ut habeat ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ A*I* rationem eam quam AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI. Habet autem $\frac{2nn+2n}{n+2}$ A*I* ad ipſam A*I* rationem eam quam $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI ad ipſam AI. Ex æquo igitur major erit A*H* quàm ut habeat ad A*I* rationem eam quam AH ad AI. Permutando A*H* major quàm ut habeat ad AH rationem eam quam A*I* ad AI. Sed A*I* ad AI rationem habet quam quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. (Id enim ſuprà oſtenſum.) Major igitur A*H* quàm ut habeat ad AH rationem eam quam quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. Verùm ut A*H* ad AH ita erit quadratum ex A*H* ad rectangulum A*H* × AH. Quadratum igitur ex A*H* majus eſt quàm ut habeat ad rectangulum A*H* × AH rationem eam quam idem quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. Rectangulum igitur A*H* × AH quadrato ex AH minus erit. (El. v. 10.) Atque idcirco recta A*H* rectâ AH minor. Ex eo igitur quòd Rϱ majorem poſueramus quàm Rr, probavimus A*H* minorem eſſe quàm AH. Creſcente igitur Rr, id eſt creſcente vi renixûs ratione gravitatis motricis corporis projecti, AH minuetur. Quod primò demonſtrandum erat.



Dicit præterea Newtonus, rectam AI eâdem ratione minui, quâ quadratum ex AH minuitur. Id verò ex proportionis convenientiâ illâ, quam quadratis ex A*H*, AH cum rectis A*I*, AI intercedere ſuprà oſtendimus, ſatis patet.

Dicit

major eſt quàm in loco A; ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium GT ad tangentem AH inveniri, & denſitas in A augeri in ratione paulo majore quàm ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT (ii).

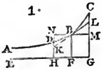
Reg.

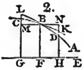
Dicit etiam Newtonus illam AH eâdem ratione minui, quâ vis renixûs in loco A ratione ponderis augetur. Hoc eſt A*H* eſſe ad AH ut R*r* ad R*ρ*. Id verò ſic oſtendimus. Capiatur A*b* duarum A*I*, AI proportione media. Erit igitur quadratum ex A*I* ad quadratum ex A*b* ut A*I* ad AI. Sed A*I* eſt ad AI ut quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. (Id enim ſuprà oſtenſum) Quadratum igitur ex A*H* eſt ad quadratum ex AH, ſicut quadratum ex A*I* ad quadratum ex A*b*. (El. v. 11.) Ac proinde A*H* erit ad AH ut A*I* ad A*b*; ſive ut A*b* ad AI. Eſt autem R*r* ad *g* ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI; ſive ut AH × A*I* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ × AI × A*I*. Rurſum *g* eſt ad R*ρ* ut $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI × A*I* ad A*H* × AI. Ex æquo igitur R*r* : R*ρ* = AH × A*I* ad A*H* × AI. Quare illa R*r* ad R*ρ* rationem habet è rationibus rectæ A*I* ad AI rectæque AH ad A*H* compoſitam, vel, cùm AH ſit ad A*H* ut AI ad A*b*, compoſitam è rationibus rectæ A*I* ad AI rectæque AI ad A*b*. Verùm ex eiſdem compoſita eſt ratio rectæ A*I* ad A*b*. Erit igitur R*r* ad R*ρ* ut A*I* ad A*b*, hoc eſt ut A*H* ad AH. Q. E. D.

(ii) LEMMA VIII. H.

In omnibus Curvis Ordinatarum fluxiones ſecundæ vel poſitivæ erunt, vel negativæ, prout Curvæ baſes ſuas convexæ, vel concavæ, reſpiciant.

Sit Curva quævis ABC, cujus baſis EF, Ordinata FB. Fluente quovis modo baſi EF, dico Ordinatæ FB fluxionem ſecundam vel poſitivam eſſe, vel negativam, prout Curva ABC baſin EF convexa, vel concava, in loco B reſpiciat. Ducatur enim per B recta KL, quæ Curvam in B contingat, ordinatiſque duabus HD, GC, à contrariis partibus ordinatæ BF poſitis, in punctis K, L occurrat. Ducatur etiam per punctum B recta NM cum baſi EF parallela, quæ Ordinatis eiſdem in punctis N, M occurrat. Jam evaneſcentibus rectis FH, FG, Ordinatarum utique GC, HD à mediâ FB diſtantiis, rectæ ML, NK fluxionum Ordinatæ FB, rectæ verò LC, KD fluxionum ejuſdem ſecundarum rationes ultimò aſciſcunt. At verò ſi Curva ABC baſin EF convexa reſpiciat (ut in fig. 1.) tum ſi ordinata BF creſcendo fluat, ut in ipſam GC creſcat, poſitivâ exiſtente ML, erit LC etiam poſitiva. Poſitivam namque habeo plagam eam, verſus quam Ordinatæ à baſi eductæ tendant: contrariam, negativam. Sin decreſcendo fluat ordinata FB, ut in ipſam HD mutetur, tum negativa ſit fluxio prima NK, manet tamen fluxio ſecunda KD poſitiva. Poſitivæ igitur in hoc caſu ſunt Ordinatarum fluxiones ſecundæ, ſive illæ creſcendo, ſive decreſcendo fluant. E contrario, ſi Curva ABC baſin ſuam concava reſpiciat (fig. 2.) tum ſi creſcendo fluat ordinata FB, ut in ipſam GC creſcat, poſitivâ exiſtente fluxione primâ ML, eſt LC negativa. Sin decreſcendo fluat ordinata FB, ut in ipſam HD mutetur, negativa jam fiet fluxio ejus prima NK, et manebit fluxio ſecunda KD negativa. Negativæ igitur in hoc caſu ſunt Ordinatarum fluxiones ſecundæ, ſive illæ creſcendo, ſive decreſcendo, fluant. Ordinatarum igitur fluxiones ſecundæ vel poſitivæ erunt, vel negativæ, prout Curvæ baſes ſuas convexæ, vel concavæ, reſpiciant.





Cor. Curvæ baſes ſuas vel convexæ, vel concavæ, reſpicient, prout Ordinatarum fluxiones ſecundæ poſitivæ, vel negativæ, fuerint.

Ex hiſce, ni fallor, facilis erit demonſtratio ejus quod à Newtono affirmatum eſt, denſitatem materiæ mediocrem, quæ motum corporis per hyperbolam AGK præſtare poſſit, paulo eſſe majorem, quàm quæ habeat ad denſitatem propriam materiæ circa locum A, unde corpus projectum fuit, rationem eam quam tangentium AH, GT ſumma dimidiata ad GT tangentem minimam.

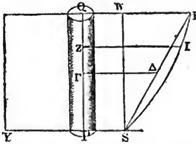
INTELLIGATUR cylindrus rectus cavus, cujus axis, PQ, æqualis ſit arcui hyperbolico AO. Puta hunc cylindrum materiâ quâdam plenum variè condenſatâ; eâ quidem lege, ut ſi in axe PQ capiatur

 piatur

Reg. 5. Si dantur longitudines AH, AI, & deſcribenda ſit figura AGK: produc HN ad X, ut ſit HX ad AI ut $n+1$ ad 1: centroque X, & aſymptotis MX, NX, per punctum A deſcribatur hyperbola, eâ lege, ut ſit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n.

Reg.

piatur pars PZ arcui cuivis hyperbolæ, AO, æqualis, tum cylindrus plano per Z ſecetur ad axem recto, quod circulum efficiat cum baſe cylindri parallelum; denſitas materiæ ejus omnis in cylindro, quæ ſuperficiem hujus circuli contiguam habeat, eadem ſit quæ materiæ circa locum O hyperbolæ. Ita ſcilicet denſitas mediocris materiæ, quæ in cylindro totâ PQ continetur, eadem erit quæ materiæ arcui hyperbolico AG (*fig. p.* 298.) circumfuſæ, per quam corpus, arcum illum percurrendo, iter facit. Axem cylindri PQ ad perpendiculum inſiſtant rectæ QR, PS; quarum illa QR tangenti AH, hæc PS tangenti GT ſit æqualis. Ducatur recta OD, quæ hyperbolam AGK in O contingat, et aſymptotæ ejus XN in D occurrat. Per puncta R, S, duci intelligatur Curva quædam RIS; cujus ea ſit natura, ut acceptâ PZ in axe cylindri arcui cuilibet hyperbolæ, AO, æquali, eductâque à puncto Z ad perpendiculum rectâ ZI Curvam uſque, rectangulum ZI × OD rectangulo QR × PS æquale ſit. Ducatur per S recta SW cum rectâ PQ parallela, quæ rectæ QR in W occurrat. Cùm æqualia ſint rectangula illa ZI × OD, QR × PS, idcirco erit ZI ad PS ut QR, vel AH, ad OD. Sed ut AH ad OD, ita eſt denſitas materiæ in loco O hyperbolæ ad denſitatem in loco A. (Exempl. 4.) Denſitates autem, circa loca A, O hyperbolæ, eædem ſunt quæ circa loca P, Z, cylindri. Quapropter ZI erit ad PS ut denſitas materiæ in cylindro circa punctum Z ad denſitatem circa punctum P. Et in omni ſitu puncti Z idem obtinebit. Unde ſequetur, quantitatem materiæ omnis in cylindro PQ ad quantitatem materiæ, quam uniformi denſitate præditam æquale ſpatium cylindraceum contineret, ſi denſitas illa uniformis ea eſſet, quæ materiæ circa locum P cylindri vel A hyperbolæ: ſequetur inquam, quantitatem materiæ omnis in cylindro ad hujus alterius quantitatem rationem habere eam, quam ſpatium RQPSIR ad rectangulum QS; vel ſi ad rectam PQ applicetur rectangulum QY ſpatio illi RQPSIR æquale, eam quam recta YP ad rectam PS vel GT. Oſtendendum igitur rectam YP tangentium AH, GT ſummâ dimidiatâ paulo eſſe majorem.



Jungatur SR. Media dividatur recta PQ in puncto Γ; agaturque ΓΔ cum QR, PS parallelæ, quæ rectæ SR in Δ occurrat. A puncto O hyperbolæ ducatur OR in aſymptotam XM, cum alterâ aſymptotâ XN parallela. Cùm è naturâ hyperbolæ quantitas $XL^n \times RO$ datæ cuidam ſit æqualis; ſi rectam NL litera y deſignet, rectam RO litera x, erit $y^n \times x$ datæ cuidam æqualis. Unde $ny^{n-1}\dot{y} : \dot{x} = y^n : x$ (Geometr. Flux. Prop. VIII. Cor. 3.) Ac proinde $\dot{y} : \dot{x} = \frac{y}{n} : x = y : nx$.

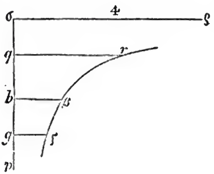
Et $\dot{y}\dot{y} : \dot{x}\dot{x} = y^2 : n^2x^2$. Et $\dot{y}\dot{y} : \dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = y^2 : y^2 + n^2x^2$. Et $\dot{y} : \sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}} = y : \sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Sed $\sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}} = \dot{\overline{AO}}$. Quare $\dot{y} : \dot{\overline{AO}} = y : \sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Sed $\dot{y} : \dot{\overline{AO}} = NL$ vel $y : OD$. Quare $y : OD = y : \sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Hinc $OD = \sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Unde ſi rectangulum datum $QR \times PS$ dicatur B^2, erit $\frac{B^2}{OD} = \frac{B^2}{\sqrt{y^2 + n^2x^2}}$. Sed è natura Curvæ RIS, $\frac{B^2}{OD} = ZI$. Quare $ZI = \frac{B^2}{\sqrt{y^2 + n^2x^2}}$.

Rurſum, cùm ſit $\dot{y}\dot{y} : \dot{x}\dot{x} = y^2 : n^2x^2$, erit $\dot{y}\dot{y} = \frac{y^2}{n^2x^2}\dot{x}\dot{x}$. Quare $\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = \dot{x}\dot{x} \times \overline{1 + \frac{y^2}{n^2x^2}} = \dot{x}\dot{x} \times \frac{n^2x^2 + y^2}{n^2x^2}$. Et $\dot{\overline{PZ}}\ (= \dot{\overline{AO}}) = \sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{nx}\sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Hinc $ZI \times \dot{\overline{PZ}}$, ſive fluxio areæ SPZI, $= \frac{B^2\dot{x}}{nx}$.

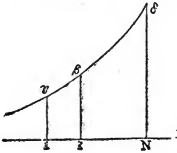
Expoſitâ igitur rectâ quâvis infinitâ σp, ſi in eâ capiatur σq, quæ habeat ad PS rationem eam quam 1 ad n: eductiſque à punctis σ, q ad perpendiculum $\sigma \varrho$, qr, quarum illa $\sigma \varrho$ infinita ſit, altera qr rectæ QR æqualis; ſi centro σ, aſymptotis illis $\sigma \varrho$, σp, ſcribatur hyperbola conica, quæ per punctum r tranſeat; ſumptiſque σg, σb illis VG, OB (*fig. p.* 298) æqualibus, ſi à punctis g, b, educantur ad perpendiculum $gſ$, $b\beta$, hyperbolam uſque; erit area hyperbolica $ſgb\beta$ areæ SPZI æqualis, et harum fluxiones

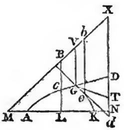
erunt

Reg. 6. Quo major eſt numerus n, eo magis accuratæ ſunt hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab A, & minùs accuratæ in ejus deſcenſu ad K; & contrà (kk). Hyperbola conica mediocrem rationem



erunt inter ſe æquales. Nam cùm σq ſit ad PS ut 1 ad n, propter æquales qr, QR, erit $\sigma q \times qr$ ad $PS \times QR$, ſive ad B^2, ut 1 ad n. Unde $\sigma q \times qr = \frac{B^2}{n}$, & Ordinata hyperbolæ $b\beta = \frac{B^2}{n.\sigma b} = \frac{B^2}{nx}$: nempe cùm σb æqualis ſit illi OB (id enim poſuimus) quam litera x ſignificat. Quare $\beta b \times \dot{\overline{\sigma b}}$, ſive $\beta b \times \dot{x}$, fluxio areæ hyperbolicæ $\beta g b \beta$, quantitati $\frac{B^2\dot{x}}{nx}$ æqualis, cui etiam $ZI \times \dot{\overline{PZ}}$, fluxio areæ SPZI, oſtenſa eſt æqualis. Hinc ſi ordinatam hyperbolæ, βb, litera v generaliter ſignificet, erit $ZI \times \dot{\overline{PZ}} = v\dot{x}$. Vel ſi arcus AO, eique æqualis recta PZ ponatur æquabiliter fluere, et pro datâ $\dot{\overline{PZ}}$, more Newtoniano, ſcribatur 1; erit $ZI = v\dot{x}$. Rectanguli $v\dot{x}$ latera, v, $\dot{x}$, contrariè fluunt. Nam cùm Curva AOG (*fig. p.* 298) baſin ſuam MX convexa reſpiciat, ordinatæ x fluxio ſecunda poſitiva erit. (Per Lemm. H. VIII.) Creſcente igitur x fluxio ejus, $\dot{x}$, creſcet. At verò eâdem x, ſeu σb, creſcente, v, ſive $b\beta$, è naturâ hyperbolæ conicæ decreſcet. Decreſcit igitur v dum illa $\dot{x}$ creſcat. Rectanguli igitur fluentis $v\dot{x}$ latera contrariè fluunt. Quare rectanguli illius fluxio, quæ eſt fluxio rectæ ZI, rectangulorum $v\ddot{x}$, $\dot{v}\dot{x}$ differentia erit. Quare $\dot{\overline{ZI}} = v\ddot{x} - \dot{v}\dot{x}$. Et $\dot{\overline{ZI}} + \dot{v}\dot{x} = v\ddot{x}$. Rurſum creſcente x fluxio ejus ſecunda minuitur uſque; ſiquidem illâ x infinitè creſcente, fluxio ejus datæ arcûs AO infinitè creſcentis fluxioni fit ultimò æqualis; ac proinde fluxio ejus ſecunda nihilo fit ultimò æqualis. Creſcente autem x illa v minuitur uſque, ut ſuprà oſtendimus. Rectanguli igitur fluentis $v\ddot{x}$ latera, v, $\ddot{x}$ eodem modo fluunt; et decreſcendo utrumque ſi creſcente arcu AO, vel rectâ PZ, ipſa x creſcat; ut tam $\dot{\ddot{x}}$ quàm $\dot{v}$ negativa ſit, et ipſius rectanguli $v\ddot{x}$ fluxio negativa; $-v\dot{\ddot{x}} - \dot{v}\ddot{x}$. Rurſum cùm hyperbola conica $r\beta l$, atque altera illa AGK baſes ſuas σp, XM, convexæ reſpiciant; erunt $\ddot{v}$, $\ddot{x}$ poſitivæ (per Lemm. H. VIII). Duæ igitur $\dot{v}$, $\dot{x}$ eodem modo fluunt, et rectanguli $\dot{v}\dot{x}$ fluxio erit $\dot{x}\ddot{v} + \dot{v}\ddot{x}$. Hinc cùm ſit $\dot{\overline{ZI}} + \dot{v}\dot{x} = v\ddot{x}$, erit etiam $\ddot{\overline{ZI}} + \dot{x}\ddot{v} + \dot{v}\ddot{x} = -v\dot{\ddot{x}} - \dot{v}\ddot{x}$. Unde tranſponendo $\ddot{\overline{ZI}} = -v\dot{\ddot{x}} - \dot{x}\ddot{v} - 2\dot{v}\ddot{x}$. Rectæ igitur ZI fluxio ſecunda negativa erit. Curva igitur SIR, cujus eſt illa ZI ordinata, hæc baſin ſuam PQ concava reſpiciet. (Lemm. H. VIII. Cor.) Trapezium igitur SPQR areâ SPQRIS, ſive rectangulo QY, minus erit. Sed propter trapezii latera QR, PS inter ſe parallela, anguloſque ad Q et P rectos, trapezium SPQR rectangulo $PQ \times \Gamma\Delta$ æquale erit. Quare rectangulum $PQ \times \Gamma\Delta$ rectangulo QY, ſive $PQ \times PY$ minus erit. Rectangulum igitur $PQ \times PY$ rectangulo $PQ \times \Gamma\Delta$ majus. Recta igitur PY rectâ $\Gamma\Delta$ major. Sed $\Gamma\Delta$, propter latera trapezii QR, PS inter ſe parallela, duarum QR, PS, ſive duarum AH, GT eſt ſemiſſis. Recta igitur PY, quæ ad PS vel GT rationem habet eam, quam denſitas mediocris materiæ arcui hyperbolico AG circumfuſæ ad propriam materiæ circa locum A denſitatem, hæc major eſt quàm tangentium AH, GT ſumma dimidiata. Q. E. D.

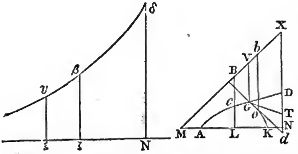




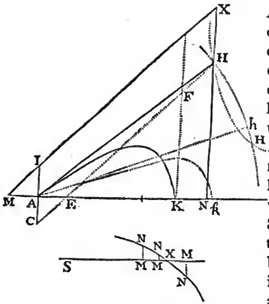
(kk) PER punctum quodvis, O, in arcu aſcenſûs AG, ducatur recta OD, quæ hyperbolam AGK in O contingat, et aſymptotæ NX in D occurrat; aliaque DOL, cum aſymptotâ ND parallela, quæ alteri aſymptotæ XM in L occurrat, hyperbolæ baſi MX in L. Datis XV, VG, XB, ſi augeatur numerus n, minuetur uſque recta OL; atque tali quidem lege,

tionem tenet ([ll]), eſtque cæteris ſimplicior. Igitur ſi hyperbola ſit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A tranſeuntem, quæratur: occurrat producta AN aſymptotis MX, NX in M & N, & ſumatur NK ipſi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eâdem velocitate, in angulis diverſis HAK, *h*A*k*, incidantque in planum horizontis in K & *k*; & notetur proportio AK ad A*k*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo AI, aſſume utcunque longitudinem AH vel A*h*, & inde collige graphicè longitudines AK, A*k*, per Reg. 6. Si ratio AK ad A*k* ſit eadem cum ratione *d* & *e*, longitudo AH rectè aſſumpta fuit. Sin minus, cape in rectâ infinitâ SM longitudinem SM æqualem aſſumptæ AH, & erige perpendiculum MN æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{kA} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus AH invenienda ſunt plura puncta N, & per omnia agenda curva linea regularis NNXN, ſecans



lege, ut magis minuatur OB quàm pro ratione creſcentis numeri *n*; ideſt, ut magis minuatur OB quàm ut rationem numeri *n* contrariam ſervet. Quod ſic oſtendimus. Sit Curva logarithmica *vβδ* aſymptotâ rectâ ξN. Hujus ordinatæ ξv, ζβ rectis illis, XV, XB æquales ſint. Capiatur ξN, quæ habeat ad ξζ rationem eam quam numerus *n* ad unitatem; et à puncto N educatur ordinata Nδ logarithmicam uſque. Et è naturâ logarithmicæ erit ξv ad Nδ ut ξv^n ad $\zeta\beta^n$, vel ut XV^n ad XB^n. Sed è naturâ hyperbolæ AGK, $XV^n : XB^n = OB : VG$. Quare ξv, vel XV ad Nδ ut OB ad VG. Rectangulum igitur Nδ × OB rectangulo XV × VG æquale erit. Et qualiſcunque fuerit numerus *n* rectangulorum æqualitas manebit. Rectangulum autem XV × VG datum; nempe cùm rectæ XV, VG magnitudine ſingulatim datæ ſint. Rectangulum igitur Nδ × OB datum: unde ſi augeatur quâvis ratione recta Nδ, pari ratione illa OB minuetur. At verò creſcente numero *n*, illa Nδ augebitur quidem, et magis quàm pro ratione numeri *n*. Nam cùm logarithmica aſymptotam ſuam ξN convexa reſpiciat, auctâ rectâ ξN, ordinata Nδ magis augebitur quàm pro ratione illius ξN, quæ eâdem ratione, quâ numerus *n*, creſcit; modo numerus *n* numero illo non ſit minor, qui ad unitatem rationem habeat quam ſubtangens logarithmicæ ad ξζ. Magis igitur augetur Nδ quàm pro ratione numeri *n*, ſaltem quando numerus *n* ultra datum limitem increverit. Quare illa OB magis quàm pro hâc ratione minuetur. Creſcente igitur numero *n*, recta *n*OB uſque minuetur. Quare et quadratum ex illâ rectâ, hoc eſt $n^2.OB^2$ eo magis minuetur, quo numerus *n* magis creverit. Recta igitur $OD = \sqrt{y^2 + n^2x^2}$ (Not. [ll]) $= \sqrt{NL^2 + n^2OB^2}$, manente NL, utpote quæ ad datam XB datam



ſecans rectam SMMM in X. Aſſumatur demum AH æqualis abſciſſæ SX, & inde denuò inveniatur longitudo AK; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem AI, & hanc ultimam AH, ut longitudo AK per experimentum cognita ad ultimò inventam longitudinem AK, erunt veræ illæ longitudines AI & AH, quas invenire oportuit. Hiſce verò datis dabitur & reſiſtentia medii in loco A, quippe quæ ſit ad vim gravitatis ut AH ad 2AI (mm). Augenda eſt autem denſitas medii per Reg. 4. & re-

datam rationem habet; hâc NL inquam manente, illa $OD = \sqrt{NL^2 + n\,OB^2}$ uſque minor fiet. E contrario ſi, per punctum quodvis o in arcu deſcenſûs GK, ad contrarias utique partes puncti G, ducatur recta od quæ hyperbolam in o contingat, et aſymptotæ ejus XN in d occurrat, aliaque bol cum aſymptotâ XN parallela, quæ alteri aſymptotæ XM in b, baſi Curvæ in l occurrat: ſimili prorſus modo ope curvæ logarithmicæ oſtendi poteſt, manente abſciſſâ xb, rectam bo, ſi augeatur numerus n, majorem uſque fieri. Quare et $n.ob$ major fiet, et quadratum $n^2.ob^2$ majus. Aucto igitur numero n, recta $od = \sqrt{y^2 + n^2 ob^2} = \sqrt{Nl^2 + n^2.ob^2}$ major fiet.

Aucto igitur numero n, modò eo quem diximus initio non ſit minor, Tangentes per arcum aſcenſûs AG minores fiunt, per arcum deſcenſûs GK majores. Quare tangens minima GT, per punctum G ducta, quod arcus illos diſcriminat, illa quidem certâ longitudine manebit. Tangentes autem per arcum aſcenſûs AG, dum perpetim decreſcendo, minimæ GT æqualitatem ſingulatim accedant, mutuam quoque æqualitatem magis affectant. E diverſo tangentes arcus deſcenſûs GK, dum, perpetim increſcendo à modo minimæ tangentis GT magis abſcedunt, mutuam quoque æqualitatem magis exuunt. Denſitates igitur, quæ contrariam tangentium rationem gerunt, eæ, aucto numero n, per arcum aſcenſûs AG magis fiunt uniformes; per arcum deſcenſûs GK, minùs. Quo major igitur fuerit numerus n, eo arcus AG, per quem corpus aſcenſum facit, Curvæ illius figuram magis referet, cujus ductum corpus aſcendendo ſequeretur, cui per materiam uniformi denſitate præditam progrediendum eſſet; cùm è contrario arcus deſcenſûs GK à figurâ Curvæ, quam corpus, per materiam uniformem iter faciens, deſcendendo ſcriberet, quo major fuerit numerus n eo magis abhorrebit.

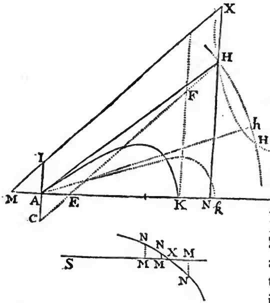
(ll) UTPOTE quæ arcus contrarios, aſcenſûs et deſcenſûs, ſimiles omninò habeat; tangentes ad utramque partem minimæ, æqualibus à vertice diſtantiis, à menſurâ minimæ æqualiter abſcedentes, ac proinde inter ſe æquales.

(mm) PRO AH ad 2AI, lege 3AH ad 4AI. (Vide Exempl. 3, Not. [u], vel Exempl. 4, Not. [bb]) ubi generaliter oſtenditur vim renixûs, quæ motum corporis per quamlibet harum hyperbolarum præſtare poſſit, eſſe ad vim gravitatis ut AH ad $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$ AI. Hoc eſt, ſi n ſit unitas ut AH ad $\frac{4}{3}$ AI. Sive ut 3AH ad 4AI. Eandem hujus loci emendationem attulerunt Patres Doctiſſimi Le Sœur & Jacquier, & in commentariis ſuis Anglicis Emerſonus.

ſiſtentia

ſiſtentia modo inventa, ſi in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.

Reg. 8. Inventis longitudinibus AH, HX; ſi jam deſideretur poſitio rectæ AH, ſecundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emiſſum, incidit in punctum quodvis K: ad puncta A & K erigantur rectæ AC, KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorſum tendat, & æquetur ipſi AI ſeu $\frac{1}{2}$HX. Aſymptotis AK, KF deſcribatur hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum C (nn), centroque A & intervallo AH deſcribatur circulus ſecans hyperbolam illam in puncto H; & projectile ſecundum rectam AH emiſſum incidet in punctum K. Q.E.I. Nam punctum H, ob datam longitudinem AH, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur CH occurrens ipſis AK & KF, illi in E, huic in F; & ob parallelas CH, MX, & æquales AC, AI, erit AE æqualis AM, & propterea etiam æqualis KN. Sed CE eſt ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam (oo) aſymptotis AK, KF deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum C, atque ideo reperitur in communi



(nn) Aſymptotis NK, KF ſcribatur hyperbola, cujus *oppoſita* tranſeat per punctum C.

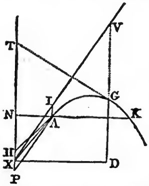
(oo) Aſymptotis NK, KF ſcriptam, cujus *oppoſita* tranſit per punctum C.

(pp) Per punctum X agatur XD cum plano horizontis parallela, quæ rectæ VG, ſi opus ſit, productæ, in D occurrat. Et propter angulum VXD datum, angulumque VDX rectum, triangulum VDX ſpecie datum eſt. Ratio igitur VX ad XD data. Ac proinde ratio illius VX^n ad XD^n data. Sit recta P parameter parabolæ KAX ad verticem X. Ut ſit $VG \times P^{n-1} = VX^n$. Sit b recta tali longitudine, ut ſit b^{n-1} ad P^{n-1} ut XD^n ad VX^n. Erit igitur $VG \times b^{n-1}$ ad $VG \times P^{n-1}$ ut XD^n ad VX^n. Unde cùm $VG \times P^{n-1}$ illi VX^n æquale ſit, erunt etiam $VG \times b^{n-1}$, XD^n inter ſe æqualia. Vel ſi recta XD deſignetur literâ x, erit $VG \times b^{n-1} = x^n$. Vel $VG = \frac{x^n}{b^{n-1}}$. Data ratio rectæ XD ad rectam DV ea ſit, quam e habet ad d. Unde $DV = \frac{d}{e}x$. Et $DG = \frac{d}{e}x - \frac{x^n}{b^{n-1}}$. Ordinatæ igitur,

intervalli

muni interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. Q E. D. Liber Secundus. Notandum eſt autem, quòd hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta AKN horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quòdque ex duabus interſectionibus H, H duo prodeunt anguli NAH, NAH; & quòd in praxi mechanicâ ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C, ut ejus pars FH, circulo & rectæ FK interjecta, æqualis ſit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK ſitæ.

Quæ de Hyperbolis dicta ſunt facilè applicantur ad Parabolas. Nam ſi XAGK parabolam deſignet quam recta XV tangat in vertice X, ſintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abſciſſarum XI, XV digninates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela ſit VG, & GT, AH parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, ſecundum rectam AH productam, juſtâ cum velocitate projectum, deſcribet hanc Parabolam; ſi modò denſitas medii, in locis ſingulis G, ſit reciprocè ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quâcum projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum VG deorſum productam, & latus rectum $\frac{2GTq}{\overline{nn-n} \times VG}$ habente. Et reſiſtentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2}$ VG (PP). Unde ſi NAK lineam horizontalem deſignet,



intervallo o abſciſſæ DY ab ordinatâ DG remotæ, hoc erit ſymbolum generale $\frac{d}{e}\,\overline{x+o} - \frac{\overline{x+o}|^n}{b^{n-1}}$;

ſive, quantitate illâ $\overline{x+o}|^n$ in ſeriem infinitam reſolutâ, $\frac{d}{e}x + \frac{x^n}{b^{n-1}} + \frac{d}{e}o - \frac{nx^{n-1}o}{b^{n-1}} - \frac{nn-n}{2b^{n-1}}x^{n-2}o^2 - \frac{n^3-3n^2+2n}{6b^{n-1}}x^{n-3}o^3 -$,

Unde veniet $Q = \frac{d}{e} - \frac{n}{b^{n-1}}x^{n-1}$ $R = \frac{nn-n}{2b^{n-1}}x^{n-2}$ $S = \frac{n^3-3n^2+2n}{6b^{n-1}}x^{n-3}$.

Quare $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{3x} = \frac{n-2}{3DX}$. Denſitas igitur, cùm per Corollarium 1m ea ſit ut $\frac{S \times DX}{R \times GT}$, erit ut $\frac{n-2}{3GT}$, ſive ut GT contrariè.

De Motu Corporum net, & manente tum denſitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX (qq), & inde datur parabolæ vertex X, & poſitio rectæ XI (rr), & ſumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ projectile tranſibit.

SECTIO III.

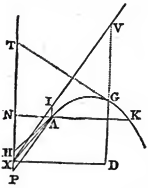
De motu corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ.

PROP. XI. THEOR. VIII.

Si corpori reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ in medio ſimilari movetur: ſumantur autem tempora in progreſſione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progreſſione geometricâ.

Centro C, aſymptotis rectangulis CADd & CH, deſcribatur hyperbola BEe, & aſymptoto CH parallelæ ſint AB, DE, de. In aſymptoto CD dentur puncta A, G: et ſi tempus exponatur per aream

Rurſum vis renixûs, cùm per idem Corollarium ea ſit ad vim gravitatis motricem ut $3S \times GT$ ad $4RR \times DX$, idcirco ad vim motricem gravitatis erit ut $\frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{2b^{n-1}} x^{n-3} GT$ ad $\frac{\overline{nn-n}|^2}{b^{2n-2}} x^{2n-3}$, ſive ut $n^3 - 3n^2 + 2n . GT$ ad $\frac{\overline{2.nn-n}|^2 x^n}{b^{n-1}}$, ſive ut $\frac{n-2}{2nn-2n}$ GT ad $\frac{x^n}{b^{n-1}}$: hoc eſt, cùm ſit $\frac{x^n}{b^{n-1}} = VG$, ut $\frac{n-2}{2nn-2n}$ GT ad VG, vel ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2}$ VG.

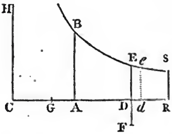


Rurſum latus rectum parabolæ conicæ, quam corpus motu ſuo per inane ſcriberet, ſi è loco G, ſecundum rectam GT, eâ cum velocitate projectum fuerit, quam corpus per Curvam KGX latum in loco illo G habet, hujus inquam parabolæ latus rectum, cùm per idem Corollarium æquale ſit rectæ hoc ſymbolo ſignificatæ, $\frac{GT^2}{DX \times R}$; idcirco huic rectæ æquale erit, $\frac{2b^{n-1}}{nn-n.x^n} GT^2$; quæ vel hoc etiam ſymbolo ſignificabitur, $\frac{2GT^2}{nn-n.VG}$; nempe cùm illud b^{n-1} huic $\frac{x^n}{VG}$ æquale ſit.

(qq) Data ſcilicet materiæ denſitate, datâque etiam velocitate quâcum corpus è puncto A emiſſum eſt, rectas AH, AI magnitudine dari, id iiſdem planè argumentis probare licet, quibus idem in hyperbolis oſtendimus. (Vide Not. ff.) At verò rectam HX magnitudine quoque dari, id nunc oſtendimus.

ream hyperbolicam ABED uniformiter creſcentem; dico, quòd velocitas exponi poteſt per longitudinem DF, cujus reciproca GD, unà cum datâ CG, componat longitudinem, CD, in progreſſione geometricâ creſcentem.

Sit enim areola DE*ed* datum temporis incrementum quàm minimum, & erit D*d* reciprocè ut DE, ideoque directè ut CD. Ipſius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. II.) eſt $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$, ſeu $\frac{CG+GD}{GDq}$; id eſt, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore ABED per additionem datarum particularum, ED*de*, uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{GD}$ in eâdem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc eſt (per hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipſius $\frac{1}{GD}$ decrementum eſt ut ſumma quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior eſt ipſa $\frac{1}{GD}$, & poſterior, $\frac{CG}{GDq}$, eſt ut $\frac{1}{GDq}$: proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, eſt ut velocitas (d). Et ſi quantitas GD, ipſi



oſtendimus hoc modo. Agatur per A recta AP cum tangente AH parallela, quæ parabolæ diametro, NX, in P occurrat. Cùm data ſit recta AI magnitudine dabitur huic æqualis XP. (Æquales autem erunt AI, XP propter figuram AIXP parallelogrammam.) Ratio autem rectæ PX ad XH è parabolæ naturâ data. Nempe cùm ea ſit quæ unitatis eſt ad numerum $n-1$. Recta igitur XH magnitudine data (Dat. 2.) Q. E. D.

(n) NIMIRUM ex dato quovis angulo NAH, dabitur poſitione recta AH. Unde ex datâ ejus longitudine datoque puncto A, punctum H dabitur. (Dat. 27.) Recta igitur HX, per datum punctum H in planum horizontis ad perpendiculum deducta, poſitione data. (Dat. 30.) Quare ex datâ etiam ejus longitudine datoque puncto H punctum X datum. (Dat. 27.) At vero recta AI magnitudine & poſitione data, punctumque A datum. Datum igitur punctum I. (Dat. 27.) Datis autem punctis X, I, recta XI poſitione data. (Dat. 26.) Q. E. D.

(d) HÆC eſt, ni fallor, argumentatio Newtoni.

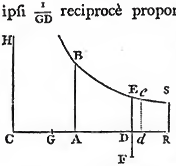
In hyperbolæ cujuſdam BE, poſitione datæ, aſymptotâ CA, dato puncto quolibet G infra centrum hyperbolæ; ſi area hyperbolica, ABDE, quæ aſymptotæ CA parte quâvis AD, rectiſque AB, DE, cum alterâ aſymptotâ parallelis, intercluſa eſt, motu rectæ DE, manente illâ AB, æquabiliter increſcat, ſitque DF recta, quæ cum rectâ GD, inter punctum datum G rectamque mobilem DE interceptâ, rectangulum claudat datæ magnitudinis: fluxio decreſcentis rectæ DF erit ut ipſa DF parte quâdam aucta, quæ quadrati ex DF ſemper rationem geret.

At verò ſi corpus per materiam, vi renixûs, qualis poſita eſt, præditam, ſolâ vi inſitâ impulſum progrediatur; tempore æquabiliter aucto, velocitas corporis eâ lege minuetur, ut fluxio ejus ſit ſemper ut velocitas ipſa parte quâdam aucta, quæ ipſius velocitatis rationem duplicatam geret.

Recta igitur DF corporis velocitatem, ſimili planè lege decreſcentem, optimè repræſentabit, modò aptè ſumptum fuerit punctum G: vel etiam puncto G pro arbitrio aſſumpto, ſi talis ſumatur DF quæ

DE MOTU CORPORUM

ipſi $\frac{1}{GD}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ CG augeatur; ſumma CD, tempore ABED uniformiter creſcente, creſcet in progreſſione geometricâ. Q. E. D.



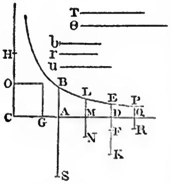
Corol. 1. Igitur ſi, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam ABED, exponi poteſt velocitas per ipſius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca ſub initio,

quæ rectangulo GD × DF juſtam reddat magnitudinem.

Rectam autem DF quo diximus modo fluere, id Newtonus hiſce ferè argumentis probat.

Symbolo A^2, ſignificetur ſpatium illud datum, cui rectangulum GD × DF ponitur æquale. Jam propter rectangulum GD × DF datum, cujus tamen latera, GD, DF, contrariè fluunt, erit (per Geom. Flux. Prop. VIII. Cor. 3.) $\dot{DF} : \dot{GD} = DF : GD$. Rectarum verò GD, CD, propter earum differentiam CG datam, fluxiones inter ſe æquales erunt. (Geom. Flux. Prop. V.) Quare $\dot{DF} : \dot{CD} = DF : GD$. Sed propter æquabilem areæ ABED fluxum, fluxio rectæ CD, è naturâ hyperbolæ, ipſius CD rationem geret; vel, quod idem eſt, recta CD fluxionis ſuæ. Si igitur capiatur DK, quæ ſit ſemper ad CD, ut fluxio rectæ DF ad fluxionem rectæ CD, ſemper erit DK ut fluxio rectæ DF; et DK : CD = DF : GD. Sed cùm punctum G ſit infra centrum hyperbolæ, id enim omninò ponendum eſt, CD major erit quàm GD. Quare et DK major quam DF. (El. V. 14.) Et cùm DK ſit ad CD ut DF ad GD, permutando et convertendo erit DK ad KF, ut CD ad CG. Dividendo DF : FK = GD : CG. Permutando DF : GD = FK : CG. Quare DF^2 erit ad DF × GD, ſive ad datum ſpatium A^2, ut FK ad datam rectam CG. Recta igitur FK, cùm ſit ad datam CG ut quadratum ex DF ad ſpatium datum, quadrati utique ex DF rationem conſtanter ſervabit. Et fluxio rectæ DF, cùm ea ſit ut DK, hoc eſt ut DF + FK, vel ut DF parte FK aucta, erit ut DF parte quâdam aucta, quæ quadrati ex DF rationem ſemper geret. Q. E. D.



Hyperbolâ autem BE cum aſymptotis ſuis CA, CH poſitione datis, rectâque etiam AB, quæ cum aſymptotâ CH parallela eſt, poſitione datâ; ſitus puncti G, qui efficiat ut rectæ DF, datum cum illis GD ſpatium continentes, velocitatum inter ſe rationes induant, dum areæ ABED temporum rationibus reſpondeant, is hâc ratione definiendus erit.

Sumantur ABLM, ABED, quæ temporum duorum T, Θ, rationem gerant; ſumptâque rectâ MN hyperbolæ ordinatæ ML æquali, inveniatur alia DF quæ ad illam MN rationem habeat, quam velocitas corporis ſub finem temporis Θ ad velocitatem ejus ſub finem temporis minoris T. Inveniatur in rectâ DC punctum G, ut ſit GD ad GM ut MN ad DF. Punctum G infra centrum erit hyperbolæ. Areâ enim ABLM æquabiliter creſcente, ordinata ML ratione Geometricâ decreſcet. Quare fluxio rectæ ML ipſius ML rationem ſemper geret. Et ſi velocitas corporis eâ lege decreſceret, ut fluxio ejus ipſius ſemper rationem ſervaret, hyperbolæ ordinata DE ad ordinatam ML, vel ejus æqualem rectam MN, rationem haberet, quam velocitas ſub finem temporis Θ ad velocitatem ſub finem temporis T. Namque area hyperbolica LMDE logarithmus eſt rationis quam ML habet ad DE. Et tempus Θ − T logarithmus eſſet rationis, quam velocitas ſub finem temporis T ad velocitatis ſub finem temporis Θ haberet, ſi geometricâ ratione velocitas decreſceret. Sed area LMDE temporis Θ − T rationem ſervat. Unde, propter mutuam logarithmorum competentiam, ratio velocitatis ad velocitatem eadem quæ rectæ ML ad rectam DE eſſet. Sed velocitas,

cùm

initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis ABED, inveniettur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri poteſt.

PROP. XII. THEOR. IX.

Iiſdem poſitis, dico, quòd ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione arithmeticâ, velocitates, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progreſſione Geometricâ.

In aſymptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS, quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur deſcriptum ſpatium per

cùm eâ lege decreſcat, ut fluxio ejus ſemper ſit ut velocitas ipſâ parte quâdam aucta, quæ ipſius rationem duplicatam gerat, velociùs utique decreſcit, quàm ut fluxio ejus ipſius rationem ſervet. Ac propterea, dato quovis tempore, minor fiet, quàm ſi geometricâ ratione decrementum ſubiiſſet. Minor igitur, quàm illa DE, erit recta quæ ad ML, vel ejus æqualem MN, rationem habebit quam velocitas ſub finem temporis Θ ad velocitatem ſub finem temporis T. Quare DF minor erit quàm DE. Quare MN major erit, quàm ut habeat ad DF rationem eam, quam MN, vel ML, ad DE. (El. v. 8.) Sed MN : DF = GD : GM. (Id enim factum eſt) Et ML : DE = CD : CM, propter hyperbolam. Quare GD major erit, quàm ut habeat ad GM rationem eam, quam CD ad CM. Convertendo, minor erit GD quàm quæ habeat ad DM rationem eam quam CD ad DM. Quare GD minor erit quàm CD. (El. v. 10.) Quare punctum G infra C centrum hyperbolæ. Et cùm GD ſit ad GM ut MN ad DF, rectangula GD × DF, GM × MN erunt inter ſe æqualia. Et tempore Θ utcunque aucto, ſi capiatur area ABQP, quæ ad aream ABED rationem habeat, quam tempus illud majus ad tempus Θ, velocitas ſub finem temporis illius majoris erit ad velocitatem ſub finem temporis Θ ut recta QR, quæ cum GQ rectangulum contineat dato GM × MN æquale, ad rectam DF.

Sed leviore negotio efficere liceat, ut rectæ DF velocitatum rationes præ ſe ferant, ſi punctum G pro arbitrio ſumatur. Sumatur enim. Sint r, u rectæ eâ lege mutabiles, ut illæ r renixûs, illæ u velocitatis ſemper rationes gerant. Sit b recta datæ magnitudinis. Et talis ponatur lex renixûs, ut ſit ſemper $r = u + \frac{uu}{b}$. In aſymptotâ CH capiatur CO datæ b æqualis, et compleatur rectangulum OG. Capiatur GA ejus longitudinis, ut cum datâ illâ rectæ u longitudine, qualem utique initio motûs illa habuit, rectangulum contineat dato OG æquale. Tum ſi capiatur DF ejus ſemper longitudinis, quæ efficiat rectangulum DF × DG eidem OG æquale, illa DF ita fluet, ut velocitatis ſemper rationem ſervet, modò area ABED temporis rationem tueatur. Area enim ABDE æquabiliter fluente erit $\dot{\overline{DF}} = DF + \frac{DF^2}{A^2}\,CG$ (per ea quæ ſuprà oſtenſa ſunt). Vel ſi pro ſymbolo A^2 rectangulum OG ſubſtituatur, $\dot{\overline{DF}} = DF + \frac{DF^2}{OC} = DF + \frac{DF^2}{B}$. Sed $\dot{u} = u + \frac{uu}{B}$. Quare ſi initio fluxûs illæ DF, u æquales fuerint, æquales tunc erunt earum fluxiones, et rectæ ipſæ, decrementis æqualibus imminutæ, æquales uſque manebunt. Sunt autem, initio fluxûs, illæ DF, u æquales. Tempore enim Θ paulatim imminuto, area ABED pari ratione paulatim minuatur, uſque dum tempore Θ ad nihilum redacto, area ABED in nihilum ſimul abeat, ordinatâ DE cum illâ AB ultimò congruente. Recta verò DF, increſcendo utique dum GD decreſcat, ut rectangulo DF × GD ſua conſtet magnitudo, rectæ AS magnitudinem ultimò adepta ſit. Rectangulum igitur AS × GA dato OG æquale. Talis autem accepta eſt recta GA, quæ cum rectâ u, qualis utique initio motûs illa fuit, rectangulum contineat illi OG æquale. Quare AS, quæ eſt longitudo rectæ DF, quam naſcente areâ ABED primam illa habuit, eadem longitudo erit rectæ u, quam primam illa, naſcente tempore Θ, habuit. Sunt igitur illæ DF, u initio fluxûs inter ſe æquales. Quare æquales ſemper erunt, dummodo area ABED tueatur temporis rationem. Et tempore æquabiliter aucto, cùm area ABED æquabiliter ſimul creſcat, recta GD, quæ ipſius DF contrariam ſemper rationem gerit, datâ CG aucta, geometricâ ratione creſcet.

arcam

De Motu Corporum

aream hyperbolicam RSED *(vid. ſig. p. 308)*; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ, cum datâ CG, componit longitudinem CD in progreſſione geometricâ decreſcentem, interea dum ſpatium RSED augetur in arithmeticâ.

Etenim ob datum ſpatii incrementum ED*de*, lineola D*d*, quæ decrementum eſt ipſius GD, erit reciprocè ut ED, ideoque directè ut CD, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem GD & longitudinis datæ CG. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciprocè proportionali, quo data ſpatii particula D*de*E deſcribitur, eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim; id eſt, directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverſè ut velocitas; ideoque directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quàm lineæ GD, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim; & propter analoga decrementa, analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes; nimirum velocitas & linea GD [b]. Q. E. D.

Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem GD, ſpatium deſcriptum erit ut area hyperbolica DESR.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum R, invenietur punctum G, capiendo GR ad GD, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis RSED deſcriptum. Invento autem puncto G, datur ſpatium ex datâ velocitate, & contrà.

Corol. 3. Unde cùm (per Prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore

(b) Nimirum in hyperbolæ cujuſvis, DE, poſitione datæ, aſymptotâ CA dato puncto G infra centrum *(vid. ſig. p. 308)*, ſi area hyperbolica RSED, quæ aſymptotæ CA parte quâvis RD, rectiſque RS, DE, cum alterâ aſymptotâ parallelis, intercluſa eſt, motu rectæ DE verſus aſymptotam CH, manente illâ RS, æquabiliter increſcat; rectæ decreſcentis GD fluxio erit ſemper ut GD datâ CG aucta. Nam propter æquabilem areæ SRDE fluxum, recta CD è naturâ hyperbolæ ratione geometricâ decreſcet. Quare fluxio rectæ CD ipſius CD rationem ſemper ſervabit. Unde ponere liceat $-\dot{CD} = CD$. (Geometr. Flux. Def. 5.) Sed rectarum GD, CD fluxiones, ob datam fluentium differentiam, CG, ſemper inter ſe æquales erunt. (Geometr. Flux. Prop. V.) Quare $-\dot{GD} = \dot{CD} = CD = CG + GD$.

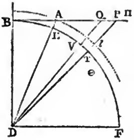
Verùm ſi corpus per materiam, vi renixûs, qualis poſita eſt, præditam, ſolâ vi inſitâ impulſum progrediatur, tum ſi arithmeticè ſumantur itineris confecti ſpatia, velocitas corporis eâ quidem lege minuetur, ut fluxio ejus ſit ſemper ut velocitas ipſa datâ quâdam aucta. Sint enim R, V, S, T, rectæ eâ lege mutabiles, ut illæ R renixûs, illæ V velocitatis, illæ S itineris confecti, illæ T temporis quo conficitur iter S, rationem tueantur. Sit B recta datæ magnitudinis. Atque talis ponatur lex renixûs, ut ſit ſemper $R = V + \frac{VV}{B}$. Sive $BR = BV + VV$. Jam cùm $\dot{V}$ ſit ſemper ut $R \times \dot{T}$, et $\dot{T}$ ſit ſemper ut $\frac{\dot{S}}{V}$, erit $\dot{V}$ ut $\frac{R \times \dot{S}}{V}$, ſive datâ $\dot{S}$, quod poſuimus, ut $\frac{R}{V}$. Unde ponere liceet

pore, & per hanc propoſitionem detur ſpatium ex datâ velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contrà.

PROP. XIII. THEOR. X.

Poſito quòd corpus, ab uniformi gravitate deorſum attractum, rectà aſcendit vel deſcendit; & quòd eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ: dico quòd, ſi circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum ſectores, rectis à centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contrà.

Caſ. 1. Ponamus primò quòd corpus aſcendit; centroque D & ſemidiametro quovis DB deſcribatur circuli quadrans BETF, & per ſemidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, ſemidiametro DF parallela. In eâ detur punctum A, & capiatur ſegmentum AP velocitati proportionale. Et cùm reſiſtentiæ pars altera ſit ut velocitas, & pars altera ut velocitatis quadratum; ſit reſiſtentia tota ut AP *quad.* + 2BAP. Jungan-



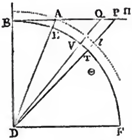
licet $\dot{\text{v}} = \frac{\text{BR}}{\text{V}}$. (Geometr. Flux. Def. 5.) Quare $\dot{\text{v}} = \text{B} + \text{V}$. R—— V—— B— Y— S—— T——.

Recta igitur GD corporis velocitatem, ſimili planè lege decreſcentem, optimè repræſentabit, ſi dato punctorum G, R altero, alterum aptè ſumatur.

Dato autem puncto G (*fig. p.* 308), talis ſumenda eſt GR, quæ ad rectæ V, qualem utique initio motûs illa habuit, longitudinem rationem habeat quam CG ad B. Vel dato R, talis ſumenda eſt CG quæ ad GR rationem habeat quam data B ad longitudinem rectæ V, qualem utique initio motûs illa habuit. Ita ſemper GD velocitatis rationem ſervabit, modò area SRDE itineris confecti rationem ſervet. Puta enim ſpatium itineris S tempore quodam T confectum; eodemque tempore aream SRDE generatam, et velocitatem quæ initio fuerit V in minorem Y abiiſſe. Dico GR eſſe ad GD ut V ad Y. Cùm enim, datâ $\dot{s}$, $\dot{\text{v}}$ ſit ut B + V, ſpatio S æquabiliter aucto, recta B + V ratione geometricâ decreſcet. Quare iter confectum S logarithmus erit rationis quam B + V habet ad B + Y. At verò area hyperbolica SRDE rationis quam CR habet ad CD, è naturâ hyperbolæ, erit logarithmus; et area illa hyperbolica ſimili ſemper ratione cum itinere confecto creſcit. Ob mutuam igitur logarithmorum competentiam, eadem erit ratio rectæ B + V ad B + Y quæ rectæ CR ad CD, ſive quæ CG + GR ad CG + GD. Et permutando B + V : CG + GR = B + Y : CG + GD. Eſt autem B : CG = V : GR. (Id enim factum eſt.) Erit igitur B + V : CG + GR = B : CG. (El. v. 12.) Et cùm ſit etiam B + V : CG + GR = B + Y : CG + GD, erit B : CG = B + Y : CG + GD. (El. v. 11.) Quare permutando B : B + Y = CG : CG + GD. Invertendo et dividendo Y : B = GD : CG. Permutando B : CG = Y : GD. Sed B : CG = V : GR. Quare V : GR = Y : GD. Permutando V : Y = GR : GD. Q. E. D.

4

tur



tur DA, DP, circulum ſecantes in E ac T, & exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in P ut DAq ad $APq + 2BAP$ ([c]): & tempus aſcenſûs totius erit ut circuli ſector EDT.

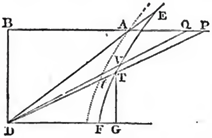
Agatur enim DVQ, abſcindens & velocitatis AP momentum PQ, & ſectoris DET momentum DTV dato temporis momento reſpondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut ſumma virium gravitatis DAq & reſiſtentiæ $APq + 2BAP$, id eſt (per Prop. XII. Lib. II. Elem.) ut DPq *quad.* Proinde area DPQ, ipſi PQ proportionalis, eſt ut DP *quad.* & area DTV, quæ eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, eſt ut datum DTq ([d]). Decreſcit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori aſcenſûs totius proportionalis eſt. Q. E. D.

Caſ.

([c]) Hujus lineationis ratio ita, ni fallor, apertiùs exponatur. Recta AP poſitione data, manente puncto A, eâ lege fluat, ut mutabilem corporis cujuſdam velocitatem referat, quod per materiam vi renixûs, qualis poſita eſt, præditam, urgente vi uniformi gravitatis, rectâ cadat vel aſcendat. Sit R alia recta, quæ eâ lege fluat, ut renixûs materiæ ſemper rationem ſervet. Detur magnitudine recta β. Atque talis ponatur lex renixûs, ut ſit ſemper $\beta R = \beta \times AP + AP^2$. In PA productâ capiatur AB ſemiſſi rectæ β æqualis. Unde ſemper erit $2AB \times R = 2BAP + AP^2$. Et rectâ AP ad modum velocitatis fluente, ſpatium $2BAP + AP^2$ ita fluet, ut renixûs ſemper rationem ſervet. Datam puta rationem quam vis renixûs ad vim conſtantem gravitatis habeat, quando corpus dato quodam velocitatis gradu feratur. Atque detur etiam rectæ mutabilis AP magnitudo, AΠ, quæ datam illam velocitatem referat. Ita dabitur ſpatium, quod ad datam tunc ſpatii fluentis $2BAP + AP^2$ magnitudinem, $2BA\Pi + A\Pi^2$, rationem illam datam habeat quam vis gravitatis ad vim renixûs. Sit C recta cujus quadratum huic ſpatio æquale eſt. Et cùm vis renixûs ſpatii mutabilis $2BAP + AP^2$ rationem ſemper ſervet, vis conſtans gravitatis erit ſemper ad vim renixûs, ut quadratum è rectâ C datum ad mutabile $2BAP + AP^2$. Recta autem C vel major erit quàm AB, vel minor, vel ei æqualis. Si major ſit, deducatur à puncto A in rectam BD, ad perpendiculum à puncto B eductam, recta AD illi C æqualis. Centro D intervallo DB ſcribatur circulus. Sint Π, P duo quævis loca puncti mobilis P. Junctæ DΠ, DP circulo in Θ, T occurrant. Tempus aſcendendi à loco illo, ubi corporis velocitas ea eſt quam recta AΠ refert, locum uſque quem corpus, extinctâ ſenſim velocitate, ſummum attigerit, ad tempus aſcendendi à loco alio, ubi velocitas eſt ea quam recta AP refert, locum uſque ſummum, erit ut ſector ΘDE ad ſectorem TDE. Vel ſermone Newtoniano, ſector TDE erit ut tempus, quo velocitas AP aſcendendo extinguitur.

([d]) Hoc eſt, fluxio trianguli DPA, quæ fluxionis rectæ AP rationem ſervat, ea ad quadratum ex DP datam rationem geret. Sed fluxio trianguli DPA eſt ad fluxionem ſectoris DTE ut quadratum ex DP ad quadratum ex DT. Permutando $\overline{\dot{DTE}} : DT^2 = \overline{\dot{DPA}} : DP^2$. Quare cùm $\overline{\dot{DPA}}$ ſive fluxio trianguli DPA, ad quadratum ex DP datam rationem habeat, fluxio ſectoris DTE ad quadratum ex DT datam quoque rationem geret. Sed recta DT, cùm rectæ BD æqualis eſt, magnitudine datur. Nam AD poſitione data. (Dat. 31.) Et BD poſitione data. (Dat. 29.) Quare punctum D datum. (Dat. 25.) Et B datum; quia extremum eſt rectæ AB, magnitudine et poſitione datæ, cujus alterum extremum A datur. (Dat. 27.) Recta igitur BD, & illi æqualis DT, magnitudine data eſt. (Dat. 26.) Quare quadratum ex DT magnitudine datum, et fluxio ſectoris circularis

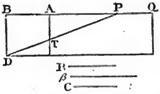
Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem AP ut priùs, & reſiſtentia ponatur eſſe ut $APq + 2BAP$, & ſi vis gravitatis minor ſit quàm quæ per DAq exponi poſſit; capiatur BD ejus longitudinis, ut ſit $ABq - BDq$ gravitati proportionale (e); ſitque DF ipſi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F deſcribatur hyperbola FTVE, cujus ſemidiametri conjugatæ ſint DB & DF, quæque ſecet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus aſcenſûs totius ut hyperbolæ ſector TDE.



Nam velocitatis decrementum PQ, in datâ temporis particulâ factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, id eſt, ut $BPq - BDq$. Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq; ideoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum TG, ut GTq, ſeu $GDq - DFq$, ad BDq, utque GDq ad BPq; & diviſim ut

circularis DTE magnitudine data. Sector igitur DTE, cujus fluxio conſtans, æquabiliter fluit.

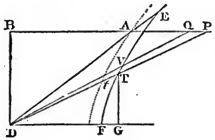
(e) JAM verò c non ſit major quàm AB. Vel minor igitur erit, vel ei æqualis. Sit æqualis primò; cujus caſûs demonſtrationem Newtonus, ad alia properans, neglexit. A puncto B ad perpendiculum eductâ BD, capiatur BD ipſi AB æqualis. Per A educatur ad perpendiculum recta AT, cui juncta DP in T occurrat. Dico tempus, quo conſumitur aſcendendo velocitas AP, eſſe ut triangulum DTA *; ſive ut recta TA. Cùm enim vis conſtans gravitatis ſit ſemper ad vim renixûs ut c^2 ad $2BAP + AP^2$; idcirco, poſitis c, AB æqualibus, ſumma virium gravitatis renixûſque erit ut $BA^2 + 2BAP + AP^2$,



hoc eſt (per El. II. 4.) ut BP^2. Velocitatis autem fluxio, tempore æquabiliter aucto, ſummæ virium gravitatis renixûſque rationem ſervabit. Quare fluxio rectæ AP erit ſemper ut quadratum ex BP. Vel ſi ad datam BD applicetur rectangulum QD quadrato ex BP æquale, rectæ AP fluxio ad rectam BQ rationem datam geret. Sed cùm recta DP, polo D mobilis, rectas AP, AT poſitione datas ſecet, erit $\dot{\overline{AP}} : \dot{\overline{AT}} = DP \times PA : DT \times TA$. (Introduct. Quad. Curv. § 8.) Sed propter parallelas AT, BD, erit $PA : PB = TA : BD$. Quare $DP \times PA : DP \times PB = DT \times TA : DT \times BD$. Permutando $DP \times PA : DT \times TA = DP \times PB : DT \times BD$. Quare $\dot{\overline{AP}} : \dot{\overline{AT}} = DP \times PB : DT \times BD$. Sed propter rectas AT, DB parallelas, erit $DP : PB = DT : BA$, vel BD. Rectangula igitur $DP \times PB$, $DT \times BD$ inter ſe ſimilia erunt, et quadratorum è lateribus PB, BD inter ſe rationem gerent. Hoc eſt $DP \times PB : DT \times BD = PB^2 : BD^2 = QB : BD$. Quare $\dot{\overline{AP}} : \dot{\overline{AT}} = QB : BD$. Permutando $\dot{\overline{AP}} : QB = \dot{\overline{AT}} : BD$. Sed ratio illius $\dot{\overline{AP}}$ ad QB data eſt. Quare et illius $\dot{\overline{AT}}$ ad datam BD data. Quapropter $\dot{\overline{AT}}$ data erit magnitudine. Et recta AT, cujus conſtans eſt fluxio, nimirum ſi tempus æquabiliter augeatur, æquabiliter ad modum temporis ipſa fluet. Q. E. D.

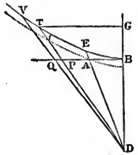
At verò ſi c minor ſit quàm AB, capiatur BD ejus longitudinis, ut quadratum ex BD illud ſit, quo quadratum ex AB exſuperat quadratum ex c. Ita fiet $AB^2 - BD^2 = c^2$; et vis gravitatis ſemper erit ad vim renixûs ut $AB^2 - BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$.

* *In appoſitâ figurâ* ſculptor *rectam* DA *cælare neglexit. Ut in figurâ caſus ſuperioris, p. 312, rectam* DH.



DF*q* ad BP*q*−BD*q*. Quare cùm area DPQ ſit ut PQ, id eſt, ut BP*q*−BD*q*; erit area DTV ut datum DF*q*. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. Q. E. D.

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & AP*q*+2BAP reſiſtentia, & BD*q* − AB*q* vis gravitatis (f), exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur hyperbola rectangula BETV ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus totum deſcenſûs.



Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut BD*q*−AB*q*−2BAP−AP*q*, ſeu BD*q*−BP*q*. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DT*q* ad DP*q*, ideoque ut GT*q*, ſeu GD*q* −BD*q*, ad BP*q*, utque GD*q* ad BD*q*, & diviſim ut BD*q* ad BD*q* − BP*q*. Quare cùm area DPQ ut ſit BD*q*−BP*q*, erit area DTV ut datum BD*q*. Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſûs proportionalis eſt. Q. E. D.

Corol. Si centro C, ſemidiametro DA, per verticem A ducatur arcus A*t* ſimilis arcui ET, & ſimiliter ſubtendens angulum ADT: velocitas AP erit ad velocitatem, quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris DA*t*; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in medio non reſiſtente, tempori, atque ideo ſectori huic proportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in medio utroque, ubi quàm minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli.

Scholium.

(f) Si corpus recta cadat, rectâ c ut priùs inventâ, in rectâ BD à puncto B ad perpendiculum eductâ

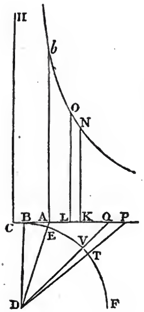
Scholium.

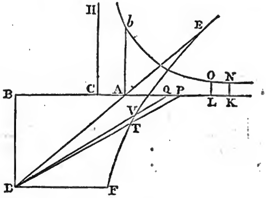
Demonſtrari etiam poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis minor eſt quàm quæ exponi poſſit per DA*q* ſeu AB*q* + BD*q*, & major quàm quæ exponi poſſit per AB*q*−BD*q*, & exponi debet per AB*q* (g). Sed propero ad alia.

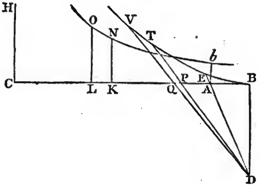
PROP. XIV. THEOR. XI.

Iiſdem poſitis, dico quòd ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum, eſt ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujuſdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progreſſione Arithmeticâ, ſi vires ex reſiſtentiâ & gravitate compoſitæ ſumantur in progreſſione Geometricâ.

Capiatur AC (in fig. tribus ultimis) gravitati, & AK reſiſtentiæ







proportionalis. Capiantur autem ad eaſdem partes puncti A, ſi

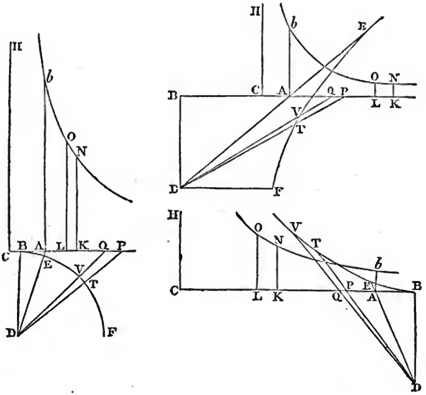
eductâ capiatur ED, cujus quadratum quadratis ex AB et ex C ſimul ſumptis æquale ſit.

(g) Vide Not. *.

 corpus

De Motu Corporum

corpus deſcendit; aliter ad contrarias. Erigatur Ab, quæ ſit ad DB ut DBq ad 4BAC: & deſcriptâ ad aſymptotos rectangulas, CK, CH hyperbolâ bN, erectâque KN ad CK perpendiculari, area AbNK augebitur vel diminuetur in progreſſione Arithmeticâ, dum vires CK in progreſſione Geometricâ ſumuntur. Dico igitur quòd diſ-



tantia corporis ab ejus altitudine maximâ ſit ut exceſſus areæ AbNK ſupra aream DET.

Nam cùm AK ſit ut reſiſtentia, id eſt, ut APq + 2BAP; aſſumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma II.) erit ipſius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ ſeu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ AbNK momentum KLON æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ ſeu $\frac{BPQ \times BD\ cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Caſ. 1. Jam ſi corpus aſcendit, ſitque gravitas ut ABq + BDq, exiſtente BET Circulo (in figurâ primâ) linea AC, quæ gravitati

proportionalis eſt, erit $\frac{ABq+BDq}{Z}$; & DPq, ſeu APq+2BAP+ABq+ BDq, erit AK×Z+AC×C, ſeu CK×Z; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad CK×Z.

Caſ. 2. Sin corpus aſcendit, & gravitas ſit ut ABq−BDq, linea AC (in figurâ ſecundâ) erit $\frac{ABq-BDq}{Z}$; & DTq erit ad DPq ut DFq, ſeu DBq, ad BPq−BDq, ſeu APq+2BAP+ABq−BDq; id eſt, ad AK×Z+AC×Z, ſeu CK×Z. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad CK×Z.

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut BDq−ABq, & linea AC (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BDq-ABq}{Z}$, erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad CK×Z: ut ſuprà.

Cùm igitur areæ illæ ſemper ſint in hâc ratione; ſi pro areâ DTV, quâ momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, puta BD×m, erit area DPQ, id eſt, $\frac{1}{2}$BD×PQ, ad BD×m ut CK×Z ad BDq. Atque inde ſit PQ×BD *cub.* æquale 2BD×m×CK×Z; & areæ AbNK momentum, KLON, ſuperiùs inventum, ſit $\frac{BP\times BD\times m}{BA}$. Auferatur areæ DET momentum DTV, ſeu BD×m, & reſtabit $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$; & propterea, ob datum $\frac{BD\times m}{AB}$, ut velocitas AP, id eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud, proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia, ſunt proportionalia. Q. E. D.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream DET ad lineam BD, dicatur M; & longitudo alia V ſumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea DA ad lineam DE: ſpatium, quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus in medio non reſiſtente, è quiete cadendo, eodem tempore deſcribere poteſt, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD\times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in medio non reſiſtente eſt in duplicatâ ratione temporis, ſive ut V^2; &, ob datas BD & AB, ut $\frac{BD\times V^2}{AB}$. Hæc area æqualis

qualis eſt areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & ipſius M momentum eſt m; & propterea hujus areæ momentum eſt $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum eſt ad momentum differentiæ arearum prædictarum DET & A*b*NK, *viz.* ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2}$BD × AP, ſive ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP; ideoque, ubi areæ DET & DAP quàm minimæ ſunt, in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum DET & A*b*NK, quando omnes hæ areæ quàm minimæ ſunt, æqualia habent momenta; ideoque ſunt æquales. Unde cùm velocitates, & propterea etiam ſpatia, in medio utroque in principio deſcenſûs vel fine aſcenſûs ſimul deſcripta accedant ad æqualitatem; ideoque tunc ſint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & A*b*NK differentia; & præterea cùm ſpatium in medio non reſiſtente ſit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & ſpatium in medio reſiſtente ſit perpetuò ut arearum DET & A*b*NK differentia: neceſſe eſt, ut ſpatia in medio utroque, in æqualibus quibuſcunque temporibus deſcripta, ſint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & A*b*NK differentia. Q. E. D.

Scholium.

Reſiſtentia corporum ſphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex denſitate Medii. Et reſiſtentiæ partem illam, quæ oritur ex denſitate fluidi diximus eſſe in duplicatâ ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, eſt uniformis, ſive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim vi uniformi, ſeu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed ſufficit aditum patefeciſſe ad hanc ſpeculationem in Propoſitionibus VIII & IX. quæ præcedunt, & eorum Corollariis. In iiſdem utique pro corporis aſcendentis reſiſtentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, ſubſtitui poteſt reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus ſolâ vi inſitâ movetur; & corpore rectâ aſcendente addere licet hanc uniformem reſiſtentiam vi gravitatis; eandemque

(²) Nimirum TQ eſt ad PD ut TS ad PE, propter tres rectas, PT, DQ, ES, inter ſe parallelas. Evaneſcente

que ſubducere, quando corpus rectâ deſcendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in Propoſitionibus præcedentibus XIII & XIV. in quibus etiam reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis ſubſtitui poteſt, vel cum eâdem, ut priùs, componi. Sed propero ad alia.

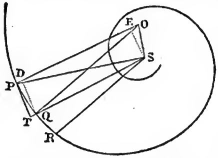
SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis reſiſtentibus.

LEMMA III.

Sit PQR *Spiralis, quæ ſecet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT, *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* SQ *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico, quòd ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × 2PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis OPQ, OQR ſubducantur anguli æquales SPQ, SQR, & manebunt anguli æquales OPS, OQS. Ergo circulus, qui tranſit per puncta O, S, P, tranſibit etiam per punctum Q. Coeant puncta P & Q, & hic circulus, in loco coitûs PQ, tanget Spiralem, ideoque perpendiculariter ſecabit rectam OP. Fiet igitur OP diameter circuli hujus, & angulus OSP in ſemicirculo rectus. Q. E. D.



Ad OP demittantur perpendicula QD, SE, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: TQ ad PD ut TS, vel PS, ad PE, ſeu 2PO ad 2PS; item PD ad PQ ut PQ ad 2PO [a]; & ex æquo perturbatè TQ ad PQ ut PQ ad 2PS. Unde fit PQq æquale TQ × 2PS. Q. E. D.

PROP.

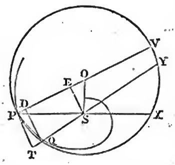
(a) Evaneſcente autem angulo PST, recta TS fit rectæ PS ultimò æqualis. Erit igitur TQ ad PD ul-

timò

PROP. XV. THEOR. XII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicatâ ratione denſitatis: dico quòd corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur SQ ad V *(fig. p.* 322.) ut ſit SV æqualis SP. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat



timò ut PS ad PE. Sed propter angulum OSP rectum, anguloſque ad E rectos, erit PS ad PE, ut PO ad PS (El. VI. 8.) hoc eſt, ut 2PO ad 2PS. Ergo TQ erit ad PD ultimò ut 2PO ad 2PS.

Recta PO circulo, qui radio OP circum centrum O ſcriptus fuerit, iterum in V occurrat. Propter angulum ad D rectum (talis enim factus eſt), quadratum ex DQ rectangulo VD × DP æquale eſt; ultimò ſcilicet, arcu ſpirarum PQ infinitè imminuto, ut punctum Q ſit ad circulum illum cujus radius OP, quique ſpiras in puncto P oſculatur. Evaneſcendo arcus PQ rectaque DQ fiunt ultimò inter ſe æquales. Quare quadrata evaneſcentia ex PQ, DQ, ultimò æqualibus, fiunt ultimò inter ſe æqualia. Quadratum igitur ex PQ et rectangulum VD × DP æqualium rationem ultimò inter ſe aſciſcunt. Sed propter rectam VD ipſi VP ultimò æqualem, rectangula quoque evaneſcentia VD × DP, VP × PD ultimò inter ſe æqualia erunt. Quadratum igitur ex PQ et rectangulum VP × PD fiunt ultimò inter ſe æqualia. Unde PD erit ultimò ad PQ ut PQ ad VP, vel 2PO. Cùm igitur ſit TQ ad PD ultimò ut 2PO ad 2PS, et PD ad arcum PQ ultimò, ut PQ ad 2PO; ex æquo perturbatè, inquit Newtonus, erit TQ ad PQ ultimò, ut PQ ultimò ad 2PS; ac propterea quadratum ex PQ et rectangulum TQ × 2PS erunt ultimò inter ſe æqualia.

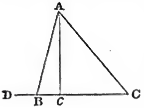
In re minimè difficili rationum concluſiones accuratiùs deduximus, ne quis facili errore deceptus, quales ferè incautos ex Cavalerii diſciplinâ homines miserè ludificari ſolent, eò utique quòd rectus ultimò ſit angulus, quem recta OQ arcuſque PQ intercluduot, et quòd arcus ille quàm minimus pro rectâ haberi poſſit, concludendum ſtatim exiſtimaret, PD eſſe ultimò ad PQ ut PQ ad PO; propter ultimam ſcilicet quam ſomniaverit triangulorum OQP *, QDP evaneſcentium ſimilitudinem. Unde id ſequeretur, quadrati ex PQ ad rectangulum TQ × 2PS rationem ultimam, quam Newtonus æqualitatem ipſam ſtatuit, eam binarii potius ad unitatem eſſe. Reverà ſi figuræ illæ evaneſcentes OPQ, PQD certas aliquas triangulorum rectilinearium ſpecies ultimò affectarent: hoc eſt, ſi ad triangulorum quorumvis rectilineariúm, quæ ſpecie data eſſent, figuras evaneſcendo infinitè accederent; è rationibus quæ triangulorum illorum lateribus rectis intercederent, evaneſcentium PD, PQ rationes ultimæ certiſſimè æſtimandæ eſſent. Atqui ea profecto evaneſcentium OPQ, QPD eſt conditio, ut cum nullâ planè figurâ triangulari, à lineis rectis factâ, eæ comparari poſſint. Siquidem illa QPD ita evaneſcit, ut angulum DQP ultimò omni acuto, qui lineis rectis concludatur, minorem habeat: ita verò illa OPQ ut duos in angulis ſuis habeat rectos; tertium, acuto omni, quem lineæ rectæ intercludunt, minorem. Cùm igitur trianguli naturæ, à lineis rectis facti, id maximè contrarium ſit, ut duos angulos rectos habeat, tertium vel acutiſſimo minorem; evaneſcentium OPQ, PQD nulla planè conſenda eſt figura ultima triangularis. Figurarum autem quæ nullæ ſunt, haud ulla ut opinor ſimilitudo erit. Ex ſimilitudioibus verò quæ nullæ ſuot, mutuas rerum rationes deſiniendas quis non ſtultè ſperaverit.

In ſummâ illud monitos velim imperitiores; in acie, quod aiunt, novaculæ conſiſti, ſiquando areâ aliquâ triangulari evaneſcente, argumentum aliquod de ultimâ laterum vel angulorum ejus mutabilium ratione ex eo petitur, quòd pro trianguli rectilinearis lateribus, vel angulis, ultimò haberi poſſint: nimirum ſi area tali modo evaneſcat, ut uno ex angulis ſuis in nihilum abeunte, ſpeciem ſuam triangulam ultimò prorſus exuat. Et neſcio an ex alio fonte errores plures gravioreſque promanârint. Ut ſiquis poſito triangulo ABC, cujus manente latere AB cum angulo ABC, reliqua duo latera, evaneſcente angulo BAC, cum aogulo tertio fluant; propter ultimam rectarum AB, AC æqualitatem

* *Junge rectam* OQ *quam cælare artifex neglexit.*

ſcribat corpus arcum quàm minimum PQ, & tempore duplo arcum quàm minimum PR; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentiâ oriunda, ſive defectus ab arcubus, qui in medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: eſt itaque decrementum arcûs PQ pars quarta decrementi arcûs PR (a*). Unde etiam, LIBER SECUNDUS.

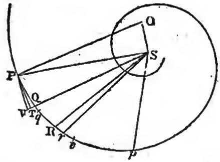
æqualitatem, triangulum evaneſcens ultimò iſoſceles pronuntiet: tum ex eo quòd triangulum ultimò iſoſceles futurum ſit, angulos ad baſin ABC, ACB ultimò æquales ſtatuat. Haud enim angulo ABC ſed externo ABD, congruentibus utique rectis AC, AB, ſit ille ACB ultimò æqualis. Error autem inde venerit, quòd triangulum ABC habitum ſit iſoſceles, tunc cùm omnem planè trianguli ſpeciem exueret. Qui triangulum illud evaneſcens ultimo iſoſceles contendere velit, proferat oportet triangulum iſoſceles, cujus anguli ad baſin duobus rectis æquales ſint. Quod ſi nemo facere poſſit, abjudicanda certè areæ evaneſcenti ABC trianguli iſoſcelis conditio. Neque cum Larvis pugno. Novimus primarios quoſdam in Philoſophiâ viros ſimili errore captos. Quid dicam primarios? Certè nec coryphæus ille omnium noſtrum Newtonus ſemper ab eo immunis erat. (Vide Locum ipſum in Editione Primâ.)



Cæterùm id verum eſſe quod Newtonus pronunciavit, quadrati ex PQ rectanguli que TQ × 2PS rationem ultimam æqualitatem eſſe, vel hàc ratione approbare liceat. (*Vid. fig. p.* 320.) Rectæ PS, QS circulo cujus radius OP, in punctis X, Y iterum occurrant. Quadratum ex PT rectangulo YT × TQ ultimò æquale erit. (El. III. 36.) Evaneſcente autem angulo PSQ, recta TY congruet ultimò cum PX, et fiet illi ultimò æqualis. Unde rectangula YT × TQ, XP × TQ ultimò æqualia fient. Sed et arcus PQ rectæ PT ultimò æqualis erit. Quadratum igitur ex PQ rectangulo PX × TQ ultimò æquale. Sed cùm O centrum ſit circuli XYP, et angulus OSP rectus, recta OS illam PX mediam dividet. (El. III. 3.) Quare PX = 2PS. Et PX × TQ = 2PS × TQ. Quadratum igitur ex PQ & rectangulum 2PS × TQ ultimò erunt inter ſe æqualia. Q. E. D.

Atque hanc demonſtrationem Newtonianâ firmiorem judico. Nempe cùm hæc noſtra haud alias loquitur quantitatum rationes ultimas, præter eas quæ verè ſunt rationes; ſive tales quæ magnitudinibus datis verè intercedant. Newtoni probatio ultimâ quâdam nititur rationum convenientiâ, quæ rationes reverâ ultimò nullæ ſunt. Nam rationes eæ evaneſcentis PD ad evaneſcentem PQ, PQ item evaneſcentis ad datam 2PO, quas Newtonus ultimò eaſdem ſtatuit, eæ nullæ potiùs ultimò habendæ ſunt. Siquidem PQ minor ſit ultimò quam ut datam aliquam rationem ad datam 2PO gerat. Minor itidem ultimò evaneſcens PD, quàm quæ datam rationem gerat, ad illam PQ unà evaneſcentem. Nec aliter ſe habet ultimò illa PD, vel PQ, ratione illius PQ, vel PV, ac ſi manente PD vel PQ, altera PQ vel PV, ſenſim creſcendo, infinitam quandam longitudinem adepta eſſet. Infiniti autem cum finito nullam comparationem, cum Euclide nullam inter ea rationem agnoſco. Neque tamen vitioſa adeo eſt argumentatio Newtoni, quin levi emendatione ſanari poſſit, et firmiſſima evadat quâ parte vel maximè laborat. Nam ex eo quòd tres rectæ PT, DQ, ES ſint inter ſe parallelæ, certiſſimè concluditur eſſe TQ ad PD ut TS ad PE. Quin et illud etiam veriſſimè dictum eſt, rectam TS illi PS fieri ultimò æqualem. Unde et illud ei concedi neceſſe eſt, eſſe TQ ad PD ultimò ut PS ad PE. Jam verò PS eſſe ad PE ut 2PO ad 2PS ex triangulorum OSP, PES inter ipſa ſimilitudine neceſſario ſequitur. Unde illud etiam pro certiſſimo tenendum, TQ eſſe ad PD ultimò ut 2PO ad 2PS. Hinc autem illud Newtono efficiendum erat, ſi demonſtrationem ſuam quàm maximè ex arte concinnare ſategiſſet, rectangula TQ × 2PS, PD × 2PO eſſe ultimò inter ſe æqualia. Jam verò quadratum ex PQ rectangulo PD × 2PO eſſe ultimò æquale, invictiſſimis rationibus ex ipſius circuli naturâ comprobatum eſt. Cùm igitur rectangula TQ × 2PS, PD × 2PO oſtenſa ſint ultimò inter ſe æqualia, atque horum illud PD × 2PO quadrato ex PQ oſtenſum ſit ultimò æquale; fieri nequit, quin quadratum ex PQ & rectangulum TQ × 2PS ipſam inter ſe æqualium rationem ultimò induant. Nec in tali argumentationis contextu inventurum quempiam ſpero, quod commodè improbari poterit.

(a*) Lib. I. Lemma x.



ſi areæ PSQ æqualis capiatur area QSr, erit decrementum arcûs PQ æquale dimidio lineolæ Rr ([b]); ideoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem, ut lineolæ $\frac{1}{2}$Rr & TQ quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in P, eſt reciprocè ut SPq, & (per Lem. X. Lib. I.) lineola TQ, quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus PQ deſcribitur (nam reſiſtentiam, in hoc caſu, ut infinitè minorem quàm vis centripeta negligo ([c])) erit TQ × SPq, id eſt (per Lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}$PQq × SP, in ratione duplicatâ temporis; ideoque tempus eſt ut PQ × $\sqrt{SP}$; & corporis velocitas, quâ arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$, ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$; hoc eſt, in ſubduplicatâ ratione ipſius SP reciprocè. Et ſimili argumento,

([b]) Sint q, t loca, quæ corpus, ſi per inane latum ſpirarum ductum ſequeretur, iiſdem temporibus attigiſſet, quibus materiæ circumfuſæ offenſu impeditum arcus PQ, PR confecerit, modò pari cum velocitate à loco P exiiſſet. Ita erunt Qq, Rt ſpatia, quibus arcus PQ, PR per materiæ renixum breviores facti fuerint, quàm pro ratione motûs in ſpatiis vacuis. Arcus autem evaneſcentes Pq, qt rationem inter ſe ultimam æqualium habituri ſunt. Sed et PQ, QR evaneſcentes æqualium inter ſe rationem ultimò aſciſcunt. Quare Qq = qt − Qr ultimò. Additoque Qq, 2Qq = Qt − Qr = rt ultimò. Hoc eſt, ille rt ad illum Qq rationem ultimam, quæ binarius ad unitatem habet. Sed Qq ad Rt rationem ultimam quam unitas ad quaternarium. Igitur ex æquo rt ad Rt rationem ultimam, quam binarius ad quaternarium habet. Quare rt ultimò ſemiſſis erit illius Rt; ac proinde illi Rr, rt ultimò inter ſe æquales. Unde ille Qq qui oſtenſus eſt ſemiſſis illius rt, idem et illius Rr ſemiſſis erit. *(Emerſonus ad locum.)*

([c]) —*nam reſiſtentiam, in hoc caſu, ut infinite minorem quàm vis centripeta negligo.*] Vellem hæc abeſſent. Sive enim parva ſive magna fuerit vis renixûs ratione vis centralis, recta tamen TQ, ſive declinatio corporis à tangente centrum verſus, à ſolâ vi centrali provenerit; ac proinde rationem quæ componitur è ratione vis illius cum duplicatâ temporis, quo arcus PQ conficitur, eam, naſcendo utique primam, illa TQ ſemper propriam habebit. Cave enim credas illam TQ, primùm utique naſcentem, non à nudâ vi centripetâ, ut in ſpatiis vacuis, ſed à majore efficaciâ vis centripetæ præ vi renixûs genitam, differentiæ virium illarum rationem cum duplicatâ temporis, quo arcus PQ conficitur, compoſitam naſcendo ſervare. Næ ille multùm à vero aberraverit, cui id in mentem venerit rem eo modo agi. Nimirum cùm renixus omnis motui ſit contrarius, corpus dum per arcum PQ incedat, nullum planè renixum ſentiet, niſi qui ſecundum arcum illum agat. Materia, à corpore progrediente à P verſus Q in arcu PQ propulſa, viciſſim repellere conatur corpus in arcu illo à Q verſus P. Conatus autem ille repellendi in duos eſt reſolvendus (per Leg. Mot. II.) duobus illis, è quibus compoſitus eſt corporis per arcum PQ motus, contrarios: quorum cùm alter ſecundum tangentem TP directus ſit, alter ſecundum radium SP, hic vi centripetæ opponitur atque ejus efficaciam minuit. Duo autem conatum repellendi ſecundum arcum QP componunt; nec aliud juncti præſtant, niſi ut arcum illum, dato tempore confectum, breviorem reddant quàm pro ratione motûs per inane. Arcus igitur Qq, quo PQ abeſt ab illo Pq qui eodem tempore in ſpatiis vacuis conficiendus eſſet, illud omne refert, quod vis renixûs effecerit, dum corpus per arcum PQ iter

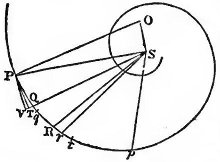
mento, velocitas quâ arcus QR deſcribitur, eſt in ſubduplicatâ ratione ipſius SQ reciprocè. Sunt autem arcus illi, PQ & QR, ut velocitates deſcriptrices ad invicem; id eſt, in ſubduplicatâ ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos SPQ, SQr, & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ſeu $\frac{1}{2}VQ$. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ eſt æqualitatis. Quoniam decrementum arcûs PQ, ex reſiſtentiâ oriundum, ſive hujus duplum Rr, eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQ_q \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad $\frac{1}{2}VQ$: & inde $\frac{Rr}{PQ_q \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$, ſive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SP_q}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob ſimilia triangula PVQ, PSO (d), fit PQ ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Eſt igitur $\frac{OS}{OP \times SP_q}$ ut reſiſtentia,

iter faceret. Neque alia erit vis renixûs ſecundum radium SP efficacia, quâ vi centripetæ officiat, præter illam, quæ cum alterâ ejus ſecundum tangentem efficaciâ compoſita effectum totum Qq præſtat. Minuit igitur vis renixûs declinationem corporis à tangente dato tempore: ſed imminutionem illam effectus compoſitus, Qq, in ſe totam habet. Et quanta quanta fuerit vis renixûs ratione vis centripetæ, nihilominus illa TQ à nudâ vi centripetâ provenerit, haud ſecus ac ſi in ſpatiis vacuis motus perageretur. Nam ſi effectum vis renixûs, ad declinationem corporis à tangente imminuendam, iterum in rectâ TQ ſeorſim conſiderare velis, cujus aliàs in effectu compoſito Qq rationem habuiſti, profectò efficaciam vis renixûs vi centripetæ contrariam imprudens duplicem poſueris, quæ ſimplex omninò ponenda erat. Nec aliter Newtonum intellexiſſe, utut aliter ſcripſiſſe videatur, ex Corollariis, quæ huic Propoſitioni comitantur, ſatis patet. Quorum ne ullum quidem generaliter obtineret, ſi ipſius Propoſitionis rationes in eo ponendæ eſſent, quòd vis renixûs ratione vis centripetæ perexigua eſſet. Immo, vocabulis illis *in hoc caſu* illud ipſum credo ſignificare voluit, partem illam vis renixûs, quæ, ſecundum radium agendo, corpus à centro repellat, ad minuendam illam TQ nihil planè valere. Quam tamen rectiùs dixiſſet ad partes non denuò vocandam, cùm aliàs ejus ratio habita eſſet, quàm præ parvitate ſuâ negligendam; cui vel dimidiæ vi centripetæ æquali eſſe liceat, ſicut Corollario quarto Newtonus ipſe conſtituit.

Sed rem ſatis difficilem, ſi potero, enodatiùs explicabo. Cogita junctam Sq in tangentem PT produci. Quæ pars productæ Sq à Curvâ & tangente intercepta fuerit, ea ſcilicet declinatio erit corporis à recto tramite, quam tempore, quo arcus PQ conficitur in ſpatio impedito, vis centripeta effeciſſet in ſpatiis liberis. Pars illa productæ Sq rectâ TQ ſemper quidem major erit. Atqui evaneſcente arcu PQ, arcus Pq unà evaneſcit; tali quidem lege, ut licet ſemper major ſit quàm PQ, eorum tamen differentia Qq velociùs multo quàm pro ratione arcûs PQ minuatur. Arcu igitur PQ infinitè imminuto et ad nihilum tandem redacto, Qq ſimul in nihilum abierit; arcus PQ, Pq fient ultimò æquales; recta Sq congruet ultimò cum SQ; & pars illa productæ Sq, quæ à Curvâ et tangente intercepta erit, ipſi TQ fiet ultimò æqualis. Arcu igitur PQ infinitè imminuto, recta TQ et declinatio corporis à recto tramite quam mera vis centripeta in ſpatiis vacuis, eodem tempore quo generata fuerit TQ, effeciſſet; hæ rationem ſive evaneſcendo ultimam, ſive naſcendo primam, ipſam æqualitatem habent. Haud aliâ igitur quantitate naſci poterit recta TQ ac ſi à merâ vi centripetâ proveniſſet. Id verò non quaſi parva ſit vis renixûs ratione vis centralis; ſed quia talis ſit, quæ mutationem aliquam vis inſitæ in corpore moto non niſi lentè admodum et gradatim pariat.

(d) Nimirum ſi centro S, radio SP, ſcriptus ſit arcus circularis, per punctum V tranſibit, propter

ter



reſiſtentia, id eſt, in ratione denſitatis medii in P & ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii denſitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$ (e). Detur Spiralis (f), & ob datam rationem OS ad OP, denſitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus denſitas eſt reciprocè ut diſtantia à centro SP, corpus gyrari poteſt in hâc Spirali. Q. E. D.

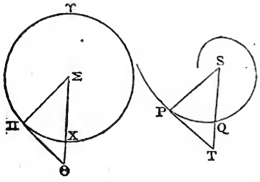
Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt, quâcum corpus, in medio non reſiſtente, eâdem vi centripetâ gyrari poteſt in Circulo, ad eandem à centro diſtantiam SP (g).

Corol. 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{OS}{OP}$, ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii.

ter æquales SP, SV. Et propter angulum ad V rectum, angulumque PQV, è Spirarum naturâ, datum; figura PQV, quæ arcu ſpirarum PQ, circulari PV, rectâque VQ eſt concluſa, arcubus illis PQ, PV, evaneſcentibus, trianguli cujuſdam rectilinearis rectanguli ſpeciem ultimò induet. Dico ipſi POS figuram PQV fieri ultimò ſimilem. Nam cùm rectus ſit angulus OPQ, angulus SPQ illius OPS complementum erit. Verùm ejuſdem OPS ille SOP complementum. Angulus igitur SOP angulo SPQ æqualis. Sed eidem SPQ ille PQV è Spirarum naturâ æqualis. Anguli igitur SOP, PQV inter ſe æquales. Triangula igitur POS, PQV, quæ angulos ad S, V rectos, acutoſque ad O, Q æquales habent, ea omninò inter ſe ſimilia erunt.

(e) Litera D ſignificetur recta quædam, eâ lege mutabilis ut denſitatis ſemper rationem gerat. Erit igitur $\frac{D}{SP}$ ut renixus, id eſt, ut $\frac{OS}{OP \times SP^2}$. Quare D, ſive denſitas, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

(f) Hoc eſt, detur angulus ad ſpiram SPQ.



(g) Puta vires quaſdam centrum Σ, in inani conſtitutum, reſpicere; tales quæ viribus centrum S, in ſpatio impedito conſtitutum, reſpicientibus, in æqualibus à centro diſtantiis æquales ſint. Circum centrum Σ, radio ΣΠ, cuilibet è Spirarum radiis SP æquali, ſcribatur circulus ΠXϒ. Dico corporis in ſpatio impedito per Spiras lati, in loco P, velocitatem velocitati illi æquabili eſſe æqualem, quâcum corpus in inani circum centrum Σ per circulum ΠXϒ feretur. Sint enim PQ, ΠX arcus, ille Spirarum, hic Circuli, eodem tempore confecti; junctæque SQ, ΣX rectis PT, ΠΘ, quæ Curvas in punctis P, Π contingunt,

Medii denſitatem aptari poteſt ([h]).

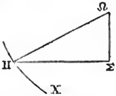
Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}$OS ad OP. Nam vires illæ ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$R*r* & TQ; ſive ut $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$; hoc eſt, ut $\frac{1}{2}$VQ & PQ, ſeu $\frac{1}{2}$OS & OP. Datâ igitur Spirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam; & vice verſâ ex datâ illâ proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc Spirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quàm dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ, & Spiralis conveniet cum lineâ rectâ PS; inque hâc rectâ corpus deſcendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem, quâ probavimus in ſuperioribus in caſu Parabolæ (Theor. X. Lib. I.) deſcenſum in medio non reſiſtente fieri, in ſubduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium ([i]). Et tempora deſcenſûs hic erunt reciprocè ut velocitates, atque ideo dantur ([k]).

Corol.

gunt, in punctis T, Θ occurrant. Jam cùm illa TQ, arcu PQ primùm naſcente, à nudâ vi centripetâ provenerit, quòd modò probavimus (Not. [e]) naſcentes primùm TQ, ΘX, cùm ab æqualibus viribus centripetis eodem tempore oriundæ ſint, erunt inter ſe æquales. Quare propter SP, ΣΠ inter ſe æquales, rectangula naſcentia 2SP × TQ, 2ΣΠ × ΘX, primò quidem inter ſe æqualia erunt. At verò rectangulo naſcenti 2SP × TQ quadratum ex naſcente PQ primò eſt æquale. (Probatur à Lemmate III.) Rectangulo item naſcenti 2ΣΠ × ΘX quadratum è naſcente primò ΠX. (Probatur à circulo.) Quadrata igitur è naſcentibus PQ, ΠX erunt primò inter ſe æqualia. Quare et naſcentes PQ, ΠX primò inter ſe æquales. Velocitates autem corporum, à locis P, Π egredientium, eam inter ſe rationem habent, quæ arcuum naſcentium PQ, ΠX inter ipſos prima eſt. Velocitates igitur in locis illis erunt inter ſe æquales. Q. E. D.

([h]) NIMIRUM ſi dentur Spiræ PQ *(fig. text. p. 324)* per quas corpus feratur, per materiam, datâ quâdam denſitate, in datâ à centro S diſtantiâ SP, præditam, dabuntur ſpiræ aliæ ΠX *(in figurâ appoſitâ)* per quas corpus feretur, cui cum materiâ circumfuſâ luctandum ſit, quæ in aliâ à centro Σ diſtantiâ datâ ΣΠ, aliam datam denſitatem habeat:



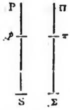
Spirarum PQ ſit radius *sp* radio ΣΠ ſpirarum ΠX æqualis. A puncto Π eductam puta rectam ΠΩ, quæ Curvam ΠX ad perpendiculum inſiſtat, rectæque ΣΩ, à puncto Σ ad perpendiculum cum radio ΣΠ eductæ, in Ω occurrat. Denſitates in locis P, Π ſignificentur literis D, Δ. Denſitas in loco *p* literâ *d*. Erit D : *d* = *sp* : SP. Quare datis *sp*, SP, datâque etiam denſitate D, denſitas *d* dabitur. Sed *d* : Δ = OS × ΩΠ : ΩΣ × OP. Datarum autem *d*, Δ ratio data. Rectangulorum igitur OS × ΩΠ, ΩΣ × OP ratio data. Latera autem OS, OP magnitudine data. Quare mutua eorum ratio data. (Dat. 1.) Quare et reliquorum laterum ΩΠ, ΩΣ ratio data. (Dat. 68.) Triangulum igitur ΩΣΠ, cujus angulus ad Σ rectus, ſpecie datum. (Dat. 43.) Angulus igitur ΣΩΠ datus. Sed angulo ΣΩΠ angulus ΣΠX, radio ΣΠ Curvâque interclufus, æqualis eſt. Angulus igitur ſpirarum datus. Spiræ igitur ſpecie datæ. Dato igitur centro Σ, radioque ΣΠ magnitudine et poſitione dato, Spiræ, cùm ſpecie datæ ſint, poſitione etiam dabuntur. Q. E. D.

([i]) Per Cor. 1. & Lib. I. Prop. IV. Cor. 6.

([k]) CORPORA duo rectâ cadant; alterum per inane verſus centrum Σ, alterum verſus centrum S per

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus à centro diſtantiis velocitas eadem eſt in Spirali PQR, atque in rectâ SP, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in datâ ratione, nempe in ratione OP ad OS ([l]); tempus deſcenſûs in Spirali erit ad tempus deſcenſûs in rectâ SP in eâdem illâ data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo circuli; & manentibus hiſce circulis, mutetur utcunque angulus, quem Spiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum, quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo



per materiam quandam circumfuſam, cujus denſitates diſtantiarum à centro S rationes contrarias ſervent. Ponantur vires, quæ centrum utrumque, Σ & S, reſpiciunt, rationem duplicatam diſtantiarum contrariam ſervare; et vires diverſas ad æquales à centro diſtantias inter ſe æquales eſſe. Ponantur autem ΣΠ, SP inter ſe æquales; et velocitas corporis per inane cadentis, in loco Π, ea ſit, quam caſu infinito locum uſque Π adeptum eſſet; ea verò corporis per materiam circumfuſam cadentis, in loco P, quâcum in ſpatiis vacuis circulum circum centrum S ad diſtantiam SP, deſcribere poſſet. Sint Σπ, Sp, aliæ corporum à centris diſtantiæ inter ſe æquales. Dicit Newtonus tempus caſûs per rectam Ππ in ſpatio vacuo ad tempus caſûs per æqualem Pp in ſpatio impedito, rationem habere ſubduplicatam ejus quam unitas ad binarium habet. Tempora cadendi per Ππ, Pp literis Θ, T ſingulatim ſignificentur; velocitates corporum à centris ſuis Σ, S æqualiter diſtantium, literis Υ, V. Erit $\dot{\overline{\Pi\pi}} : \dot{\overline{Pp}} = \dot{\Theta} \times \Upsilon : \dot{T} \times V$. Ponantur Sπ, Sp, quæ initio fuerunt ΣΠ, SP, eâ lege fluere, ut mutabiles Σπ, Sp ſemper ſint inter ſe æquales. Ita fluxiones, $\dot{\overline{\Pi\pi}}$, $\dot{\overline{Pp}}$, ſemper erunt inter ſe æquales. Ac proinde rectangula $\dot{\Theta} \times \Upsilon$, $\dot{T} \times V$ inter ſe æqualia. Quare $\dot{\Theta} : \dot{T} = V : \Upsilon$. Sed $V : \Upsilon = 1 : \sqrt{2}$. Quare $\dot{\Theta} : \dot{T} = 1 : \sqrt{2}$. Et cùm hæc conſtans ſit fluxionum ratio, fluentibus etiam Θ, T, utpote quæ ſimul generari inceperint, eadem intercedet. Et cùm in omni magnitudine æqualium Ππ, Pp, hæc ratio vigeat, vigebit etiam quando æquales Ππ, Pp in totas ΠΣ, PS creverint. Hoc eſt tempus caſûs ab altitudine quâvis ΣΠ centrum uſque Σ in inani, ad tempus caſûs ab æquali altitudine SP centrum uſque S, in ſpatio impedito, rationem habebit ſubduplicatam ejus quam unitas ad binarium habet; modò velocitates, quibuſcum caſus in locis Π, P incipiantur, eæ ſint, quas præſcripſimus. Q. E. D.

([l]) Nimirum cùm hæc conſtans ſit fluxionum Curvæ radiique ratio.

([m]) Circum centrum S (*fig. p.* 327), quod vires centripetæ reſpiciant, quæ duplicatæ diſtantiarum rationi contrariè reſpondeant, ſcriptos puta circulos ABC, DEF. Spatium illud omne, quod horum circulorum circumflexus undique cingunt, materiâ quâdam intelligatur conſpergi, cujus denſitates in variis locis rationem diſtantiarum à centro S contrariam ſervent. Siquod igitur corpus è loco A projectum fuerit, ſecundum rectam tali angulo ad radium SA inclinatam, quem denſitas materiæ in loco A poſtulaverit; atque eâ cum velocitate, quâcum, urgentibus eiſdem viribus centripetis, per circulum ABC in inani æquabiliter ferretur: corpus, inquam, eo modo è loco A projectum, per ſpiras æquiangulares certæ cujuſdam ſpeciei circa centrum S feretur. Dentur anguli ASG, ASH. Literæ autem *x*, *y* numeros quoſdam adhuc incognitos ſignificent. Ac primùm eam puta materiæ in loco A denſitatem, quæ ſpiris æquiangulis, per quas corpori è loco A projecto eundum erit, ſpeciem inducat eam, in quâ radii, angulos qui dato ASG ſint æquales, cum Curvâ faciant. Tales autem ſpiræ, per punctum A ductæ, ad punctum D radii SA pertingant poſtquam centrum S tot gyris cinxerint, quot ſint in numero *x* unitates. Dein mutatam puta materiæ, quâcum ſpatium circulis interclusum oppleri poſuimus, denſitatem; tali quidem ratione, ut ſpecies ſpirarum, per quas corpori, è loco A projecto, eundum ſit, in illam tranſeat, cujus radii cum Curvâ angulos faciant dato ASH æquales. Atque tales ſpiræ per punctum A ductæ ad punctum D radii SA perveniant, poſtquam centrum ſuum S tot gyris cinxerint, quot ſint in numero *y* unitates. Ducatur per A recta AH, quæ circulum ABC in A contingat. et rectis SG, SH datos angulos ASG, ASH, cum radio SA efficientibus, in punctis G, H occurrant.

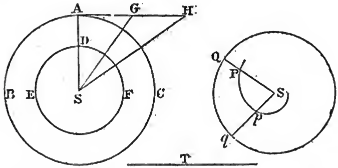
Dicit

gendo in Spirali à circumferentia ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$; ſive ut tangens anguli illius, quem Spiralis continet cum radio PS; Tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut ſecans anguli ejuſdem, vel etiam reciprocè ut medii denſitas (m).

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus denſitas eſt reciprocè ut diſtantia locorum à centro, revolutionem in Curvâ quâcunque AEB circa centrum illud fecerit, & radium primum AS in eodem an-

Dicit Newtonus numerum *x* ad numerum *y* rationem habere eam, quam recta AG ad rectam AH. Tempus autem, quo corpus à loco A in locum D per ſpiras primas delatum fuerit, ad tempus, quo delatum fuerit ab eodem loco A in eundem D per ſpiras alteras, rationem habere eam quam recta SG ad rectam SH; ſive eam, quam denſitas poſtremò poſita ad denſitatem primò poſitam. Nos autem oſtendimus quæ Newtonus dicit hoc modo.

Spirarum æquiangularium ea eſt natura, ut ſi duo ex earum radiis, SP, *sp*, qui datum quemvis angulum contineant, circulo, datæ cujuſlibet magnitudinis, circum centrum ſpirarum S ſcripto, occurrant, ut in punctis Q, *q*; tum ſi ſumatur T tangenti anguli quem radii ſpirarum cum curvâ contineant, pro radio SQ, æqualis; arcus Q*q* à radiis SQ, S*q* interceptus, rationis ejus quam SP ad *sp* habet, pro modulo T logarithmus erit. (Cotes. Harmon. Menſur. Part I. Prop. VI.)



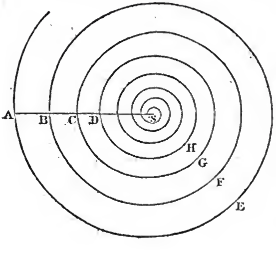
Hæc autem cùm ità ſint, ſi circuli ABC ambitus ſignificetur literâ P, erit utique *x*P logarithmus rationis, ejus quam SA habet ad SD, pro modulo AG. Erit etiam *y*P ejuſdem rationis logarithmus pro modulo AH. Ejuſdem autem rationis in ſyſtematis diverſis logarithmi ſunt ut moduli. (Cotes. Harmon. Menſur. Part I. Prop. I. Cor. 3.) Erit igitur *x*P ad *y*P ut AG ad AH. Sed *x*P eſt ad *y*P ut numerus *x* ad numerum *y*. Omninò igitur numerus *x* ad numerum *y* ut AG ad AH. Quod primùm demonſtrandum erat.

Jam verò tempus, quo corpus è loco A in locum D transferatur per ſpiras quarum angulus ASG, eſt ad tempus quo per ſpatium AD rectâ cecidiſſet, ſi talis fuiſſet materiæ denſitas, quæ vim renixûs vis centripetæ dimidiam effeciſſet, ut OS ad SA (per Cor. 5.) Quin et tempus illud rectâ cadendi per ſpatium AD, ad tempus quo transferatur corpus è loco A in locum D per ſpiras quarum angulus ASH, ut SA ad SH (per Cor. 5.) Quare ex æquo tempus per ſpiras primas ad tempus per has alteras, ut SG ad SH. Quod alterum demonſtrandum erat. Denique rationem rectæ SG ad SH denſitatum eſſe contrariam, id quidem ex Cor. 2. ſatis patet.

Stabunt autem hujuſce Corollarii rationes, etiamſi ſpiræ circulum interiorem non ad eundem radium ſecent, ad quem exteriorem ſecuerint, ſed in diverſis locis; puta ſi primæ in E, alteræ in F: modò pro numero converſionum *x* vel *y*, longitudo illa ſubſtituatur, quam radii mobilis terminus A, in circuli ſui ABC circumflexu, curſitando emenſus erit, dum corpus per ſpiras ſuas à circulo in circulum tranſlatum fuerit.

gulo

De Motu Corporum



gulo ſecuerit in B quo priùs in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in A reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro (id eſt, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones BFC, CGD, &c. facere, & interſectionibus

(*) Ut corpus viribus centripetis incitatum, quæ duplicatæ diſtantiarum rationi contrariè reſpondeant, per ſpiras aliquas feratur ex æquiangularibus; non modò illud neceſſe eſt, ut materiæ circumfuſæ denſitas rationem diſtantiæ à centro contrariam ſervet, ſed etiam ut corpus ex dato loco cum certâ velocitate projiciatur, & ſecundum rectam certo quodam angulo ad radium inclinatam: nempe cum velocitate eâ, quâcum in inani, urgentibus iiſdem viribus centripetis, per circulum ferretur ad eandem à centro diſtantiam (per Cor. 1.); eâ autem ad radium inclinatione, cujus coſinus rationem ad radium habeat, quam dupla vis renixûs ad vim centripetam (per Cor. 3.) Quòd ſi vel aliâ cum velocitate, vel ſecundum rectam aliter ad radium inclinatam, corpus projectum fuerit, fieri nullo modo poteſt, ut per ſpiras aliquas ex æquiangularium genere curſum teneat. At verò per Curvam aliquam. Quænam illa erit? Difficillimam hanc quæſtionem ne omninò intactam videretur reliquiſſe, Newtonus, ut opinor, ſeptimum hoc corollarium poſuit. Nempe fieri poteſt, ut corpus aliter è loco A projectum, quàm quo motus per ſpiras logiſticas præſtari poſſit, Curvam quandam circa centrum S ſcribat, cujus, liceat haud prorſus æquiangularis ſit, data tamen quædam ad radium inclinatio certis locis redeat. Si igitur talis ſit, cujus, cùm ſemel centrum cinxerit, eadem ad radium SA inclinatio redeat, quam in loco A habuit; hoc eſt ſi radium SA eâdem inclinatione in locis duobus A, B ſecuerit, ſi præterea velocitates in locis, A, B, ſubduplicatam radiorum SA, SB rationem contrariè gerant: dicit Newtonus Curvam illam centrum S gyris innumeris cingere, qui omnes ad radium AS ſimiliter inclinati erunt, et radium illum in partes innumeras divident, geometricâ ratione inde ab initio decreſcentes. Tempora verò, quibus corpus per hanc Curvam latum orbes ſingulos AEB, BFC, CGD ordine confecerit, rationem habere è ratione longitudinum ipſorum orbium cum ratione velocitatum in locis A, B, C compoſitam; ſive eam, quæ cuborum è radiis AS, BS, CS ſubduplicata erit. Quorum omnium hæc erit demonſtratio.

Perpetua ſi ſit inter rectas SA, SB, SC, SD proportionis convenientia, erunt aliquæ ex ſpiris æquiangularibus, quæ, ſi polus eorum ipſi S ſuperimpoſitus eſſet, radius autem ipſi SA æqualis in ipſum radium SA, radios ſuos alios, qui illis SB, SC, SD æquales eſſent cum ipſis SB, SC, SD congruentes haberent; et inter puncta quæque proxima, A, B; B, C; C, D; ſimplici ſemper orbe polum S cingerent. Jam verò vires centripetæ acceleratrices, quibus corpus per Curvam AEB incedens in locis A, B urgetur, eædem ſunt, quæ corpus per ſpiras illas latum in eiſdem locis urgerent. Velocitates item corporis per Curvam AEB incedentis quas in locis A, B, habet, cum eandem inter ſe rationem gerant, quam velocitates corporis quod per ſpiras ferretur, quas in eiſdem locis utique id haberet: permutando, velocitas in Curvâ AEB in loco A, ad velocitatem in loco A in ſpiris, ut velocitas in curvâ AEB in loco B ad velocitatem in loco B in ſpiris. Denſitates etiam materiæ in locis A, B eædem, ſive corpus per Curvam AEB, ſive per ſpiras incedat. Denique cum tam ſpirarum quàm Curvæ eædem ſint in locis A, B, ad radium communem SA inclinationes, eadem ſcilicet in utroque loco Curvæ ad ſpiras inclinatio erit. Motus igitur corporis è loco B egredientis,

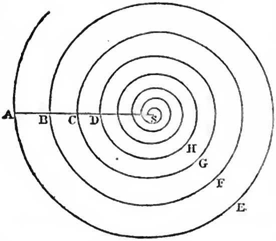
bus diſtinguet radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directè, & velocitates in principiis A, B, C, inverſè; id eſt, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ (n). Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut ſumma omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id eſt, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$ (o), ſive ut $\frac{2}{3}$AS ad AB quàm proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam

dientis, ad motum corporis, cui ex eodem loco egredienti ſecundus ſpirarum orbis ſeribendus eſſet, eodem planè modo ſe habet, quo motus corporis è loco A egredientis ad motum corporis ſe habuit, cui, cùm ex eodem loco egrederetur, per primum ſpirarum orbem eundum eſſet. Vires etiam illæ omnes, quibus corpori è loco B egredienti obtemperandum eſt, ad vires illas, quæ motum per ſecundum ſpirarum orbem præſtarent, eodem modo ſe habent, quo vires, quibus corpori è loco A egredienti obtemperandum erat, ad vires quæ motum per ſpirarum orbem primum præſtarent. Fieri igitur nequit, cùm in rerum naturà nihil ſine ratione fiat, quin corpus è loco B egreſſum per Curvam quandam feratur, cui cum orbe ſpirarum ſecundo eadem planè cognatio intercedat, quæ Curvæ AEB cum orbe illarum primo. Unde etiam Curva illa BFC cum ſecundo ſpirarum orbe in loco C iterum concurret, et tam radium communem SC quàm ſpiras eiſdem angulis in C, quibus in B vel A, ſecabit. Et ſimilibus planè argumentis efficietur corpus è loco C egreſſum per tertium quendam orbem ferri, cui cum orbe ſpirarum tertio eadem cognatio intercedat, quæ orbibus AEB, BFD cum ſpirarum orbibus primo et ſecundo: et è loco C egreſſum corpus per orbem quartum CGD feretur cum orbe ſpirarum quarto ſimiliter cognatum. In ſummâ, Curva, per quam corpus feretur, centrum S orbibus innumeris einget; qui ſpirarum orbibus innumeris in punctis A, B, C, D ordine occurrentes, radium primum SA, in innumeros SA, SB, SC, SD ratione geometricâ decreſcentes neceſſario divident. Et cùm innumeri illi hujus Curvæ orbes ſpirarum innumeros ſimili inclinatione ſingulatim ſecent, ad radium etiam illi omnes in interſectionum punctis ſimiliter inclinati erunt.

Præterea ex ſimili orbium omnium Curvæ ad ſpirarum orbes, ſi ordine conferantur, cognatione, ſequitur orbibus Curvæ, primo, ſecundo tertio, innumeriſque deinceps aliis, eaſdem planè inter ipſos rationes intercedere, quæ ſpirarum orbibus primo, ſecundo, tertio innumeriſque deinceps aliis: quin et tempora, quibus Curvæ orbes conficientur, temporum, quibus ſpirarum orbes conficiendi eſſent, rationem inter ſe ſervare. Nam cùm ex orbium, Curvæ ſpirarumque, ſeu cognatione ſeu diverſitate omnis temporum ſeu cognatio ſeu diverſitas proveniat, ex ſimili orbium cognatione ſimiles planè temporum ſeu cognationes ſeu diverſitates venerint. Tempus igitur quo conficitur orbis AEB erit ad tempus quo conficitur orbis BFC, ut tempus quo primus ſpirarum orbis ad tempus quo ſecundus conficiendus eſſet. Sed tempus quo primus conficeretur ſpirarum orbis ad tempus quo ſecundus rationem habet è ratione longitudinis orbis primi ad longitudinem orbis ſecundi, cum contrariâ velocitatum in locis A, B ratione compoſitam. Nimirum cùm orbes inter ſe ſunt ſimiles, dataque ſit velocitatum ratio, quibus ſimilium illorum orbium partes omnes ſimiles conficiendæ eſſent. Sed longitudines orbium, propter ſimilitudinem eorum inter ſe, ſunt ut radii SA, SB. Et velocitatum contraria ratio radiorum SA, SB ſubduplicata erit. Quare ratio ex hiſce compoſita cuborum è radiis SA, SB eſt ſubduplicata. Tempus igitur quo primus ſpirarum orbis conficeretur ad tempus quo ſecundus, ac proinde tempus quo conficitur orbis AEB, ad tempus quo orbis alter BFC, rationem habet quam $SA^{\frac{3}{2}}$ ad SB^{3}. Q. E. D. *Horum demonſtrationem ex eiſdem principiis arceſſiverunt doctiſſimi Patres Le Sœur & Jacquier.*

(o) Vide Analyſ. per Æquat. Infinit. Not. [a].



quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro S, intervallis continuè proportionalibus SA, SB, SC, &c. deſcribe circulos quotcunque, & ſtatue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio de quo egimus, eſſe ad tempus revolutionum inter eoſdem in medio propoſito, ut medii propoſiti denſitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, denſitatem mediocrem inter eoſdem quàm proximè: ſed & in eâdem quoque ratione eſſe ſecantem anguli, quo Spiralis præfinita, in medio de quo egimus, ſecat radium AS, ad ſecantem anguli quo Spiralis nova ſecat radium eundem in medio propoſito: atque etiam ut ſunt eorundem angulorum tangentes, ita eſſe numeros revolutionum omnium inter circulos eoſdem duos quàm proximè. Si hæc fiant paſſim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari poſſimus, quibus modis ac temporibus corpora, in medio quocunque regulari, gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali ſuperius deſcriptâ, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi Spiralibus peragantur.

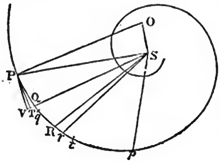
PROP.

(p) Nimirum ex eo quòd tempus quo conficitur arcus PQ ſit ultimò ùt $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, ſequitur velocitatem in loco P eſſe ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$. Arcus autem evaneſcentes PQ, QR eam ultimam inter ſe rationem habent, quam velocitates in punctis P, Q. Hoc eſt $PQ : QR$ ultimò $= SQ^{\frac{1}{2}n} : SP^{\frac{1}{2}n}$. Coeuntibus autem punctis P, Q, ut illa SQ, SP, vel SV, ultimò æquales fiant; erit $SQ^{\frac{1}{2}n}$ ad $SP^{\frac{1}{2}n}$ ultimò ut SQ ad $SQ + \frac{1}{2}nQV$. Unde $PQ : QR$ ultimò $= SQ : SQ + \frac{1}{2}nVQ$. Rurſum cùm æquales ſint areæ PSQ, QSr, anguliqueSPQ, SQr inter ſe æquales: cùm præterea areæ illæ evaneſcentes triangulorum rectilinearium rationem inter ſe ultimò aſciſcant: idcirco PQ erit ad Qr ultimò ut QS ad SP. (El. VI. 15.) Cùm igitur ſit PQ ad QR ultimò ut SQ ad $SQ + \frac{1}{2}nVQ$, et PQ ad Qr ultimò ut SQ ad

PROP. XVI. THEOR. XIII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quòd corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Demonſtratur eâdem methodo cum Propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciprocè ut diſtantiæ, SP, dignitas quælibet, SP^{n+1}, cujus index eſt $n+1$: colligetur ut ſuprà, quòd tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ, erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQ_q \times SP^{n}}$, ſive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^{n} \times SQ}$ (p), ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$; hoc eſt, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciprocè ut SP^{n+1}. Et propterea, cùm velocitas ſit reciprocè ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciprocè ut SP.



Corol. 1. Reſiſtentia eſt ad vim centripetam ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP (q).

Corol. 2. Si vis centripeta ſit reciprocè ut SP *cub.* erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque reſiſtentia & denſitas medii nulla erit, ut in Propoſitione nonâ Libri Primi.

Corol. 3. Si vis centripeta ſit reciprocè ut dignitas aliqua radii SP cujus index eſt major numero 3, reſiſtentia affirmativa in negativam mutabitur (r).

ad SP vel SQ + VQ: erit (per El. v. 24) PQ ad Rr ultimò ut SQ ad $VQ - \frac{1}{2}nVQ$. Unde $Rr = \frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} . VQ \times PQ}{SQ}$. Jam verò id quo arcus PQ propter renixum brevior redditur, ſive ejus duplum, Rr, rationem ſervabit è ratione vis renixûs cum duplicatâ temporis compoſitam. Quare vis renixûs erit ut $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$; hoc eſt, pro Rr æquali ejus ſubſtituto, ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} VQ}{PQ \times SQ \times SP^n}$: id eſt, propter SQ, SP ultimò inter ſe æquales ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} VQ}{PQ \times SP^{n+1}}$.

(q) Id enim eodem modo oſtendatur quo Corollarium tertium Propoſitionis præcedentis.

(r) Fieri igitur nequit, ut corpus per materiam renitentem in ſpirâ æquiangulari iter faciat, ſi vires centripetæ poteſtatis alicujus diſtantiarum, quæ cubicâ elatior ſit, contrariam rationem ſerant.

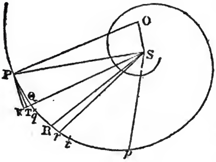
 Scholium.

Scholium.

Cæterùm hæc Propoſitio & ſuperiores, quæ ad Media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major denſitas quàm ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque, cæteris paribus, denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in Mediis, quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROP. XVII. PROB. IV.

Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, quâ corpus in datâ Spirali, datâ velocitatis lege, revolvi poteſt.



Sit Spiralis illa PQR. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum PQ, dabitur tempus; & ex altitudine TQ, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum, PSQ & QSR, differentià RS*r*, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas medii.

PROP. XVIII. PROB. V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii denſitatem in locis ſingulis, quâ corpus datam Spiralem deſcribet.

Ex vi centripetâ invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii denſitas; ut in Propoſitione ſuperiore.

Methodum verò tractandi hæc Problemata aperui in hujus Pro-

3 poſitione

poſitione decimâ, & lemmate ſecundo; & lectorem in hujuſmodi perplexis diſquiſitionibus diutiùs detinere nolo. Addenda jam ſunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque denſitate & reſiſtentiâ Mediorum, in quibus motus hactenus expoſiti & his affines peraguntur.

SECTIO V.

De denſitate & compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtaticâ.

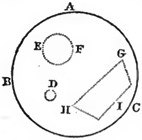
Definitio Fluidi.

Fluidum eſt corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facilè moventur inter ſe.

PROP. XIX. THEOR. XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſitâ condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & ſine omni motu à preſſione illâ orto permanent in locis ſuis.

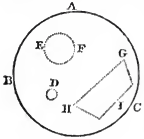
Caſ. 1. In vaſe ſphærico, ABC, claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico, quòd ejuſdem pars nulla ex



illâ preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua D moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes, ad eandem à centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc ideo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui à preſſione illâ oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propiùs accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra hypotheſin. Non poſſunt longiùs ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervatâ ſuâ à centro diſtantiâ moveri in plagam

plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. Q. E. D.

Caſ. 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim EF pars ſphærica fluidi; & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebunt in locis ſuis, per caſum eundem primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis, per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſò dicebatur, quòd ſphæra EF non undique premebatur æqualiter. Q. E. D.



Caſ. 3. Dico præterea, quòd diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuò premunt æqualiter in puncto contactûs, per motûs Legem III. Sed &, per caſum ſecundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eâdem vi. Q. E. D.

Caſ. 4. Dico jam, quòd fluidi partes omnes undique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt à partibus ſphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas ſphæricas æqualiter premunt, per Caſum 3, & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per motûs legem tertiam. Q. E. D.

Caſ. 5. Cùm igitur fluidi pars quælibet, GHI, in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuò æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt, quòd fluidi cujuſcunque, GHI, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuò premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. Q. E. D.

Caſ. 6. Igitur ſi fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem preſſioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

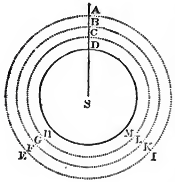
Caſ.

Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quàm primùm à parte magis preſſâ recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, ſine motu locali: & ſubinde partes fluidi, per caſum quintum, ſe mutuò prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. Q. E. D.

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externâ ſuperficie illatam, mutari poſſunt; niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes, intenſiùs vel remiſſiùs ſeſe premendo, difficiliùs vel faciliùs labuntur inter ſe.

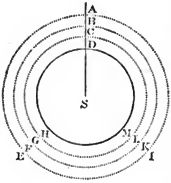
PROP. XX. THEOR. XV.

Si fluidi ſphærici, & in æqualibus à centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis, partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.



Sit DHM ſuperficies fundi, & AEI ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris BFK, CGL diſtinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema AE vi ſimplici gravitatis propriæ, quâ & omnes orbis ſupremi partes, & ſuperficies ſecunda BFK (per Prop. XIX) pro menſurâ ſuâ æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda BFK vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem

De Motu Corporum



preſſionem duplam. Hâc preſſione, pro menſurâ ſuâ, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt, preſſione triplâ, urgetur ſuperficies tertia CGL. Et ſimiliter preſſione quadruplâ urgetur ſuperficies quarta, quintuplâ quinta, & ſic deinceps. Preſſio igitur, quâ ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc eſt, gravitati Solidi, cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (ſi modò orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis à ſuperficie infimâ ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. Q. E. D. Et ſimili argumentatione patet propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quâvis aſſignatâ diſtantiæ à centro, ut & ubi fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet, quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo à fluidi figurâ fornicatâ ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem à centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit horizonti parallela, vel perpendicularis, vel obliqua; ſive fluidum, à ſuperficie preſſâ ſurſum continuatum, ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit obliquè per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maximè irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem theorematis hujus ad caſus ſingulos fluidorum.

Corol. 3. Eâdem demonſtratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quòd fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe; ſi modò excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Corol.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc Fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt, manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt, manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido liberè innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret, & indueret formam fluidi; hoc, ſi priùs aſcenderet, vel deſcenderet, vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet, vel deſcenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus, cæteræque motuum cauſæ, permanent. Atqui (per Caſ. 5. Prop. XIX.) jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & priùs.

Corol. Proinde corpus, quod ſpecificè gravius eſt quàm Fluidum ſibi contiguum, ſubſidebit; & quod ſpecificè levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſûs, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutrâ Libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in Fluidis conſtitutorum duplex eſt Gravitas: altera Vera & Abſoluta, altera Apparens, Vulgaris & Comparativa. Gravitas Abſoluta eſt vis tota, quâ corpus deorſum tendit: Relativa & Vulgaris eſt exceſſus gravitatis, quo corpus magis tendit deorſum quàm fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum, & corporum omnium, gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis; id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in Aere ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant

gravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quàm exceſſus verorum ponderum ſupra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minùs gravia, Aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparativè levia ſunt, non verè, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in Aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparativè & apparenter gravia vel levia; & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus, quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ, vel ab eâ ſuperatur. Quæ verò nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aquâ. Nam ſimilis eſt horum caſuum demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de Gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel à gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, & corpus ab eâdem vi urgeatur fortiùs; differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus Propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus à vi illâ urgeatur leviùs, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

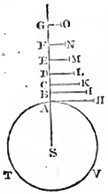
Corol. 9. Cùm autem Fluida, premendo corpora incluſa, non mutent eorum figuras externas, patet inſuper (per Corollarium Prop. XIX.) quòd non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi Animalia immergantur, & ſenſatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora à compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum Syſtematis Fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent Gravitatem ſuam Comparativam; niſi quatenus Fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

PROP.

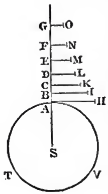
PROP. XXI. THEOR. XVI.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ diſtantiis ſuis à centro reciprocè proportionali deorſum trahantur: dico quòd, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continuè proportionales, denſitates Fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continuè proportionales.

Deſignet ATV fundum ſphæricum cui Fluidum incumbit; S centrum; SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c. diſtantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. quæ ſint ut denſitates Medii in locis A, B, C, D, E, F; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primùm has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, à B ad C, à C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD, &c. conficient preſſiones AH, BI, CK, &c. quibus fundum ATV (juxta Theorema XV.) urgetur. Suſtinet ergo particula A preſſiones omnes AH, BI, CK, DL, pergendo in infinitum; & particula B preſſiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & ſic deinceps: ideoque particulæ primæ A denſitas AH eſt ad particulæ ſecundæ B denſitatem BI ut ſumma omnium AH + BI + CK + DL, in infinitum, ad ſummam omnium BI+CK+DL, &c. Et BI denſitas ſecundæ B eſt ad CK denſitatem tertiæ C; ut ſumma omnium BI+CK+DL, &c. ad ſummam omnium CK+DL, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque ideo continuè proportionales (per hujus Lem. I.) proindeque differentiæ AH, BI, CK, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continuè proportionales. Quare cùm denſitates in locis A, B, C, &c. ſint ut AH, BI, CH, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per ſaltum, & ex æquo in diſtantiis SA, SC, SE continuè proportionalibus, erunt denſitates AH, CK, EM continuè proportionales.

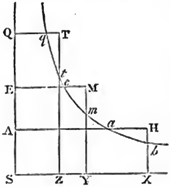


De Motu Corporum



tionales. Et eodem argumento, in diſtantiis quibuſvis continuè proportionalibus, SA, SD, SG, denſitates, AH, DL, GO, erunt continuè proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, D, E, &c. eò ut progreſſio gravitatum ſpecificarum à fundo A ad ſummitatem Fluidi continua reddatur; & in diſtantiis quibuſvis continuè proportionalibus, SA, SD, SG, denſitates, AH, DL, GO, ſemper exiſtentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. Hinc ſi detur denſitas Fluidi in duobus locis, puta A & E, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco



Q. Centro S, Aſymptotis rectangulis SQ, SX deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula AH, EM, QT in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula HX, MY, TZ, ad Aſymptoton SX demiſſa, in *b*, *m* & *t*. Fiat area Y*mt*Z ad aream datam Y*mb*X ut area data E*eq*Q ad aream datam E*ea*A; & linea Z*t* producta abſcindet lineam QT denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ SA, SE, SQ ſunt continue proportionales, erunt areæ E*eq*Q, E*ea*A æquales; & inde areæ his proportionales Y*mt*Z, X*bm*Y etiam æquales, & lineæ SX, SY, SZ, id eſt, AH, EM, QT, continuè proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ SA, SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continuè proportionalium,

(*) Hujus conſtructionis in eo poſita eſt ratio, quòd ad omnes à centro diſtantias logarithmi rationum inter denſitates cum rationum inter ipſas diſtantias logarithmis ratione convenient. Inter diſtantias enim quaſvis datas SA, SE (in fig. Sup.) capiantur quot libuerit continuâ proportione mediæ SB, SC, SD. Erunt igitur denſitates BI, CK, DL, inter denſitates AH, EM, continuâ proportione mediæ. Logarithmi rationum, quæ diſtantiis SA, SB, denſitatibus AH, IB intercedunt, ſignificentur literis L, A. Quot verò ſumptæ fuerint diſtantiæ SB, SC, SD, inter duas SA, SE, continuâ proportione mediæ, tot ſint in numero $m-1$ unitates. Erit igitur mL logarithmus rationis quæ diſtantiis SA, SE intercedit. Cùm verò inter denſitates AH, EM tot ſint aliæ BI, CK, DL continuâ proportione mediæ, quot inter diſtantias SA, SE diſtantiæ; ideirco tot erunt denſitates BI, CK, DL inter duas AH, EM continuâ proportione mediæ, quot ſunt in numero $m-1$ unitates. Quare mA rationis ejus, quæ denſitatibus AH, EM intercedit, erit logarithmus. Jam verò mL : mA = L : A. Logarithmus igitur rationis inter diſtantias SA, SB, ad logarithmum rationis inter denſitates AH, BI eandem rationem habet, quam logarithmus inter rationis diſtantias SA, SE ad logarithmum rationis inter denſitates AH, EM. Nec huic rationi officiet diſtantiarum, quæ inter datas SA, SE, mediæ ſumptæ fuerint, multitudo, parva illa magnave fuerit. Quare et numero earum infinitè aucto, ut partes

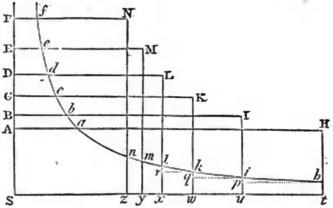
AB,

um, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in aliâ ſerie quantitatum continuè proportionalium ([a]).

PROP. XXII. THEOR. XVII.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum à centro reciprocè proportionali deorſum trahantur: dico quòd, ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione Muſicâ, denſitates fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione Geometricâ.

Deſignet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE diſtantias in pro-

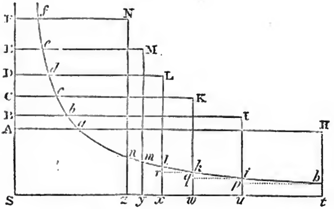


greſſione Geometricâ. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, &c. quæ ſint ut Fluidi denſitates in locis A, B, C, D, E, &c. & ipſius

AB, BC, CD, DE, necnon denſitatum AH, BI, CK, DL, EM differentiæ evaneſcant; inter evaneſcentes logarithmos, L, Λ, ratio data logarithmi rationis inter diſtantias SA, SE, ad logarithmum rationis inter denſitates AH, EM vel ultimò manebit. Quæ verò logarithmi evaneſcentis L ad evaneſcentem Λ ultima eſt ratio, ea fluxionis logarithmi inter diſtantias ad fluxionem logarithmi inter denſitates ratio erit. Quare fluxionibus hiſce data ratio intercedet logarithmi rationis inter diſtantias datas SA, SE, ad logarithmum rationis inter denſitates datas AH, EM. Eadem igitur fluentium inter ipſas ratio erit. Logarithmi igitur rationum inter denſitates eorum, qui rationum inter diſtantias ſunt logarithmi, rationem conſtanter ſervabunt. Jam verò in lineatione Newtoni *(vid. fig. Cor.)* poſitis SA, SE, SQ diſtantiis, ſi AH, EM, QT ſint inter ſe ut denſitates in diſtantiis illis; ſpatia hyperbolica *a*AE*e*, *e*EQ*q* rationum inter diſtantias SA, SE, SQ erunt logarithmi: item ſpatia hyperbolica *h*XYM, Y*mtz* rationum inter denſitates AH, EM, QT logarithmi. Quare Y*mtz* : *h*XYM = *e*EQ*q* : E*ea*A. Datis autem tribus diſtantiis SA, SE, SQ, cum denſitatibus duabus AH, EM, ſpatia tria E*ea*A, *e*EQ*q*, *h*XYM magnitudine data ſunt. Quare tertii *h*XYM ad quartum Y*mtz* ratio data. Spatium igitur Y*mtz* magnitudine datum. Quare rectâ etiam SY magnitudine datâ, dabitur magnitudine SZ, et illi æqualis QT (per Excerpt. ex Epiſt. 4. § 7.)

gravitates

De Motu Corporum gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, ſecundam à B ad C, tertiam à C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cùm denſitates ſunt ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum AH−BI, BI−CK, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, Aſymptotis SA, S*x* deſcribatur Hyperbola quævis, quæ ſecet per-



pendicula AH, BI, CK, &c. in *a*, *b*, *c*, &c. ut & perpendicula ad Aſymptoton S*x* demiſſa H*t*, I*u*, K*w* in *h*, *i*, *k*; & denſitatum differentiæ *tu*, *uw*, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. ſeu *tp*, *uq*, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id eſt, ut A*a*, B*b*, &c. Eſt enim, ex naturâ hyperbolæ, SA ad AH vel S*t*, ut *th* ad A*a*, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale A*a*. Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale B*b*, &c. Sunt autem A*a*, B*b*, C*c*, &c. continuè proportionales, & propterea differentiis ſuis A*a*−B*b*, B*b*−C*c*, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula

(b) Nimirum è naturâ hyperbolæ D*d* erit ad F*f* ut SF ad SD. Unde D*d*−F*f* : F*f* = FD : SD. Sed F*f* : A*a* = SA : SF. Et SA : SF = AD : DF propter progreſſionem muſicam. Quare F*f* : A*a* = AD : DF. Cùm igitur ſit D*d*−F*f* : F*f* = FD : SD; et F*f* : A*a* = AD : DF: ex æquo perturbatè D*d*−

gula *tp*, *uq*, &c. ut & ſummis differentiarum A*a*−C*c* vel A*a*−D*d* ſummæ rectangulorum *tp*+*uq* vel *tp*+*uq*+*wr*. Sunto ejuſmodi termini quàm plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta A*a*−F*f*, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta *zthn*, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ *zthn*, ideoque huic areæ proportionalis eſt differentia A*a*−F*f*. Sumantur jam diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progreſſione Muſicâ, & differentiæ A*a*−D*d*, D*d*−F*f* erunt æquales [b]; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ *thlx*, *xlnz* æquales erunt inter ſe, & denſitates S*t*, S*x*, S*z*, id eſt, AH, DL, FN, continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. Hinc ſi dentur Fluidi denſitates duæ quævis, puta AH & BI, dabitur area *thiu*, harum differentiæ *tu* reſpondens; & inde invenietur denſitas FN in altitudine quâcunque SF, ſumendo aream *tbnz* ad aream illam datam *thiu* ut eſt differentia A*a*−F*f* ad differentiam A*a*−B*b*.

Scholium.

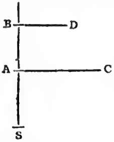
Simili argumentatione probari poteſt, quòd ſi gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicatâ ratione diſtantiarum à centro, & quadratorum diſtantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\ cub.}{SAq}$, $\frac{SA\ cub.}{SBq}$, $\frac{SA\ cub.}{SCq}$) ſumantur in progreſſione Arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometricâ. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\ cub.}$, &c.) ſumantur in progreſſione Arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometricâ. Et ſic in infinitum. Rurſus ſi gravitas particularum Fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione Arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione Geometricâ, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſ-

D*d*−F*f* : A*a* = AD : SD. Quare rectangula $\overline{Dd-Ff}\times SD$ et $Aa\times AD$ inter ſe æqualia. Rurſum, propter hyperbolam, A*a* : $\overline{Aa-Dd}$ = SD : AD. Quare rectangula $\overline{Aa-Dd}\times SD$ et $Aa\times AD$ inter ſe æqualia. Rectangula igitur $\overline{Dd-Ff}\times SD$, $\overline{Aa-Dd}\times SD$ inter ſe æqualia. Quare A*a*−D*d*, D*d*−F*f* inter ſe æquales.

ſione Arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione Geometricâ. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi Fluidi, compreſſione condenſati, denſitas eſt ut vis compreſſionis; vel, quod perinde eſt, ſpatium à Fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis leges; ut quòd cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione denſitatis. Quo in caſu, ſi gravitas eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ à centro, denſitas erit reciprocè ut cubus diſtantiæ. Fingatur quòd cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciprocè in ſeſquiplicatâ ratione diſtantiæ.

(c) Sed omnes generatim in duas Formulas concludam.

Sit S centrum ad quod gravia tendant; SA diſtantia quælibet data, per literam a deſignanda; SB alia quælibet, generaliter deſignanda per literam x. Ea verò vis centripetæ ſit conditio, ut poteſtatis cujuſdam è diſtantiâ, cujus index ſit m, rationem ea ſemper ſervet. Nimirum ut vis centripeta in loco A ſit ad vim centripetam in loco B ut SA^m ad SB^m, exiſtente nimirum indice m vel



poſitivo vel negativo, integro vel fracto, modò non ſit -1. Jam ſi vis centripeta in loco dato A exponatur per rectam SA, vis centripeta in loco quovis alio exponetur per rectam $\frac{SB^m}{SA^{m-1}}$; cujus hoc erit ſymbolum algebraicum $\frac{x^m}{a^{m-1}}$. Ponatur recta AC cujuſvis magnitudinis. Et ſit alia BD, quæ ad datam AC rationem habeat, quam denſitas in loco B ad datam in loco A denſitatem. Rectaque BD generaliter deſignetur literâ y. Jam cùm gravitas, in loco quovis B, ſymbolo $\frac{x^m}{a^{m-1}}$ generaliter ſignificetur, hoc alio $\frac{x^m}{a^m} y \times \dot{x}$, fluxionem vis comprimentis generaliter deſignare liceat. Quare ſi talis ponatur denſitas materiæ fluidæ, quæ vis comprimentis rationem ubique ſervet, cùm fluxio quoque denſitatis fluxionem vis comprimentis rationem ſervare debeat, ponere licebit $\frac{x^m}{a^m} y\dot{x} = b\dot{y}$ deſignante mimirum illâ b rectam quandam juſtæ magnitudinis. Quare $\dot{y} : \frac{x^m}{a^m}\dot{x} = y : b$. Sive $\dot{y} : \overline{\frac{x^{m+1}}{m+1 . a^m}}^{\,\cdot} = y : b$. Quare $\frac{1}{m+1} \frac{SB^{m+1}}{SA^m} - \frac{1}{m+1} SA$ logarithmus erit rationis ejus quam BD habet ad AC, ſive denſitas in loco B ad denſitatem datam in loco A, pro modulo b. Unde ſi tales ſumantur diſtantiæ SB, ut earum poteſtates per quantitatem $m+1$ indicatæ arithmeticè uſque creſcant, denſitatum progreſſio Geometrica erit.

2. Reliquis manentibus, talis ponatur denſitas, quæ non ſimplici vis comprimentis rationi, ſed rationi poteſtatis alicujus à vi comprimente conſtanter reſpondeat. Ejus poteſtatis index ſit n, poſitivus quivis ſive integer ſive fractus, modò non ſit $+1$, neve 0. Neque omninò negativum ponere liceat indicem n, ne rarior eſſet materia fluida, quæ majore vi comprimeretur: qualem nullius materiæ conditionem rerum natura ægrè, ut opinor, patiatur. Deſignet litera C rectam quandam

SD

tantiæ. Fingatur quòd vis comprimens ſit in duplicatâ ratione denſitatis, & gravitas reciprocè in ratione duplicatâ diſtantiæ, & denſitas erit reciprocè ut diſtantia. Caſus omnes percurrere longum eſſet (c). Cæterùm per experimenta conſtat, quòd denſitas Aeris ſit ut vis comprimens vel accuratè vel ſaltem quàm proximè: & propterea denſitas Aeris in Atmoſphærâ Terræ eſt ut pondus Aeris totius incumbentis; id eſt, ut altitudo Mercurii in Barometro.

LIBER SECUNDUS.

eâ lege mutabilem, ut vis comprimentis rationem ea ſemper gerat. Erit igitur EN vel y ut c^n, et $\dot{y}$ ut $nc^{n-1}\dot{c}$; vel, dato n, ut $c^{n-1}\dot{c}$. Hoc eſt, cùm $y^{\frac{1}{n}}$ ſit ut c, ac proinde $y^{\frac{n-1}{n}}$ ut c^{n-1}; $\dot{y}$ erit ut $y^{\frac{n-1}{n}}\dot{c}$. Ponere igitur licebit $\dot{y} = \frac{y^{\frac{n-1}{n}}\dot{c}}{b^{\frac{n-1}{n}}}$, ſive $\frac{b^{\frac{n-1}{n}}}{y^{\frac{n-1}{n}}}\dot{y} = \dot{c}$, deſignante b rectam quandam juſtæ magnitudinis. (*Geom. Flux. Def.* 5.) At verò talis inveniebatur fluxio vis comprimentis, quæ rectanguli illius $\frac{x^m}{a^m}y\dot{x}$ rationem conſtanter ſervaret. Quare recta $\dot{c}$ talis eſſe debet, quæ hujus rectanguli rationem ſervet. Unde ponere licet $a\dot{c} = \frac{x^m}{a^m}y\dot{x}$. Unde efficietur $\frac{x^m}{a^m}y\dot{x} = \frac{a.b^{\frac{n-1}{n}}}{y^{\frac{n-1}{n}}}\dot{y}$. Sive $\frac{x^m}{a^m}\dot{x} = \frac{a.b^{\frac{n-1}{n}}}{y^{\frac{2n-1}{n}}}\dot{y}$. Et ex hâc fluxionum æquatione hæc alia fluentium veniet, $\frac{x^{m+1}}{\overline{m+1}.a^m} = \frac{\frac{n}{n-1}a.b^{\frac{n-1}{n}}}{y^{\frac{n-1}{n}}}$; modò illud generaliter obtineat, diſtantiâ x infinitè auctâ, denſitatem item ſenſim imminui; ut datâ quâvis tandem minor fiat: è contrario, diſtantiâ in nihilum redactâ, denſitatem omni datâ ultimò majorem fieri. At ſi verè ponatur æquatio illa, diſtantiarum poteſtates, à quantitate $m+1$ indicatæ, earum à denſitatibus poteſtatum, quas quantitas $\frac{n-1}{n}$ indicaverit, rationem contrariam gerent.

Jam ſi in caſu primo pro m numeri -3, -4, 0, 1 ordine ſubſtituantur; in caſu autem ſecundo ſi pro m ſcribatur -2, & pro n quantitates $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ ordine ſubrogentur, veriſſima invenientur ea quæ, in caſu utroque, à Newtono affirmata ſunt.

Cæterùm in caſu ſecundo neceſſe eſt ut quantitates $m+1$, $\frac{n-1}{n}$ eiſdem prædita ſint ſignis. Nam ſi contraria fortè gerant, fieri nequit ut diſtantiâ infinite auctâ denſitas in nullam abeat; & viciſſim, diſtantiâ infinitè imminutâ, ut denſitas infinitè creſcat.

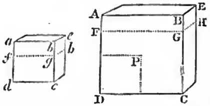
Formulas generales, noſtrarum haud multum abſimiles, poſt Varignonium, patres Doctiſſimi Le Sœur & Jacquier ad locum poſuerunt.

De Motu Corporum

PROP. XXIII. THEOR. XVIII.

Si Fluidi, ex particulis ſe mutuò fugientibus compoſiti, denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice verſâ, particulæ viribus, quæ ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum, ſe mutuò fugientes componunt Fluidum Elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.

Includi intelligatur Fluidum in ſpatio cubico ACE; dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace:* & particularum, ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio obtinentium, diſtantiæ erunt ut cuborum latera AB, *ab*; & Mediorum denſitates reciprocè ut ſpatia continentia AB, *cub.* & *ab cub.* In cubi majoris latere plano, ABCD, capiatur quadratum, DP, æquale lateri plano cubi minoris, *db*; & ex hypotheſi, preſſio, quâ quadratum DP urget Fluidum incluſum, erit ad preſſionem, quâ illud quadratum *db* urget Fluidum incluſum, ut Medii denſitates ad invicem, hoc eſt, ut *ab cub.* ad AB *cub.* Sed preſſio, quâ quadratum DB urget Fluidum incluſum, eſt ad preſſionem, quâ quadratum DP urget idem Fluidum, ut quadratum DB ad quadratum DP, hoc eſt, ut AB *quad.* ad *ab quad.* Ergo, ex æquo, preſſio quâ quadratum DB urget Fluidum, eſt ad preſſionem quâ quadratum *db* urget Fluidum, ut *ab* ad AB [d]. Planis FGH, *fgh*, per media cuborum ductis, diſtinguatur Fluidum in duas partes; & hæ ſe mutuò prement iiſdem viribus, quibus premuntur à planis AC, *ac* [e], hoc eſt, in proportione *ab* ad AB: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones



(d) Nempe cùm ſit preſſus quadrati DB ad preſſum quadrati DP, ut AB^2 ad ab^2, ſive ut ſolidum $AB^2 \times ab$ ad ab^3; cùm ſit etiam preſſus quadrati DP ad preſſum quadrati *db* ut ab^3 ad AB^3, ex æquo erit preſſus quadrati DB ad preſſum quadrati *db* ut ſolidum $AB^2 \times ab$ ad AB^3, hoc eſt, ut recta *ab* ad rectam AB.

(e) Per Prop. XIX.

(f) Litera E ſignificetur denſitas liquoris in ſpatium cubicum *ade* coacti; literâ *e* minor ejuſdem liquoris denſitas, quâ ſpatium amplius cubicum ADE impleat. Jam ſi tales ponantur vires, quibus efficitur ut ſolida liquoris corpuſcula ſe mutuò fugiant, quæ earum à centrorum diſtantiis poteſtatum, quæ numero *n* indicatæ ſint, rationem contrariam gerant, vires

ſiones ſuſtinentur, ſunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemque ſitum in utroque cubo, vires, quas particulæ omnes ſecundum plana FGH, *fgh* exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum FGH in cubo majore, ſunt ad vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab* ad AB, hoc eſt, reciprocè ut diſtantiæ particularum ad invicem. Q. E. D. LIBER SECUNDUS.

Et vice verſâ, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciprocè ut diſtantiæ, id eſt, reciprocè ut cuborum latera AB, *ab*; ſummæ virium erunt in eâdem ratione, & preſſiones laterum DB, *db* ut ſummæ virium; & preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris DB ut *ab quad.* ad AB *quad.* Et, ex æquo, preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris *db* ut *ab cub.* ad AB *cub.* id eſt; vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. Q. E. D.

Scholium.

Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si vires centrifugæ ſint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantiâ, & E pro denſitate Fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciprocè ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n+2$: & contrà ([f]). Intelligenda verò ſunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis, quæ terminantur in particulis proximis; aut non longè ultrà diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in ſui generis corporibus ſibi

vires illæ ſimilium à rectis *ab*, AB poteſtatum contrariam rationem gerent; et preſſus quadrati *db* erit ad preſſum quadrati DB ut AB^n ad ab^n. Quare cùm ſit preſſus quadrati DB ad preſſum quadrati DP ut AB^2 ad ab^2, rationes haſce componendo, efficietur preſſus quadrati *db* ad preſſum quadrati DP ut AB^{n+2} ad ab^{n+2}. Sed $E : e = AB^3 : ab^3$. Ergo $AB : ab = E^{\frac{1}{3}} : e^{\frac{1}{3}}$. Et AB^{n+2} ad ab^{n+2} ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$. Quare preſſus quadrati *db* ad preſſum quadrati DP ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. E. D.

 proximis.

De Motu Corporum

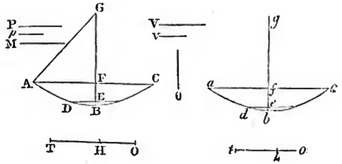
proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à Magnete quàm à laminâ trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur Fluida, de quibus actum eſt in hâc Propoſitione. Quòd ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris quantitatis Fluidi. An verò Fluida Elaſtica ex particulis ſe mutuò fugantibus conſtent, Quæſtio Phyſica eſt. Nos proprietatem Fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium Mathematicè demonſtravimus, ut Philoſophis anſam præbeamus quæſtionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De Motu & Reſiſtentiâ Corporum Funependulorum.

PROP.

(*) Corpora pendula, centris G, *g*, funibus æqualibus GB, *gb*, ſuſpenſi, arcus ABC, *abc*, vel circulares vel alios quoſ libet, dummodo ſimiles inter ſe ſint & æquales, centris oſcillationum B, *b*, in ſpatiis vacuis oſcillando ſcribant. Arcuum ABC, *abc* ſumantur partes quævis inter ſe ſimiles et æquales, & ſimiliter in totis poſitæ, AD, *ad*. Dicit Newtonus tempora, quibus conſiciuntur



arcus AD, *ad*, eandem inter ſe habere rationem, quam tempora quibus arcus integri ABC, *abc* conficiendi ſunt. Dicit etiam velocitates corporum in locis D, *d* rationem inter ſe habere è rationibus virium motricûm et temporum, quibus arcus integri ABC, *abc* conficiuntur, cum contrariâ materiæ ratione compoſitam.

Primum verò quod dicit Newtonus, id nos oſtendimus hoc modo.

Exponatur recta P datæ cujuſvis longitudinis. Capiatur alia *p*, quæ ad illam P rationem habeat, quam pondus corporis *b* ad pondus corporis B. Capiatur etiam alia M, quæ habeat ad *p* rationem eam, quam materia corporis B ad materiam corporis *b*. Sint V, v rectæ eâ lege mutabiles, ut in omni magnitudine arcuum æqualium AD, *ad*, illæ V, v velocitatum in locis D, *d* inter

PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directè, & materia inverſè. Quo major eſt vis, vel majus tempus, vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motûs Legem ſecundam manifeſtum eſt. Jam verò ſi Pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices, in locis à perpendiculo æqualiter diſtantibus, ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cùm tempora, quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes correſpondentes, ſint ut tempora oſcillationum totarum; erunt velocitates ad invicem, in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè (a): ideoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum

inter ſe rationem ſervent. Sint aliæ etiam rectæ TH, th, eâ lege mutabiles, ut temporum, quibus conficiantur arcus æquales AD, *ad*, hæ rationem ſervent. Et quando arcus illi in integros creverint, rectæ TH, *th* longitudines TO, *to* ſint adeptæ; arcubus autem illis primùm naſcentibus, cum temporibus, quibus arcus naſcentes conficiuntur, in nihilum ipſæ ſingulatim abeant. Oſtendere oportet rectas TH, *th* cum illis TO, *to* proportione convenire. In rectas BG, *bg*, quæ à punctis arcuum ABC, *abc* mediis, ad perpendiculum fuerint erectæ, ducantur ab arcuum principiis A, *a*, nec non à punctis D, *d*, rectæ AF, *af*, DE, *de*, cum plano horizontis parallelæ. Jam arcuum AD, *ad* fluxiones rationem inter ſe habebunt, è ratione velocitatum in locis D, *d*, cum eâ quæ temporum, quibus arcus illi conficiuntur, fluxionibus intercedit, compoſitam. Hoc eſt $\dot{\overline{AD}} : \dot{\overline{ad}} = V \times \dot{\overline{TH}} : v \times \dot{\overline{th}}$. At verò cùm talia ſemper ſint tempora TH, *th*, ut arcus AD, *ad* ſemper ſint inter ſe æquales, arcuum etiam eorum fluxiones, $\dot{\overline{AD}}$, $\dot{\overline{ad}}$, ſemper erunt inter ſe æquales. Quare et rectangula $V \times \dot{\overline{TH}}$, $v \times \dot{\overline{th}}$ erunt inter ſe æqualia; et temporum TH, *th* fluxiones velocitatum V, v contrariam inter ſe rationem gerent. At verò eæ ſunt corporum in locis D, *d* velocitates, quas in locis E, *e* adeptа eſſent, ſi è locis F, *f*, vi proprii utrumque ponderis rectâ cecidiſſent. Eam igitur velocitates illæ inter ſe rationem gerent, quæ efficitur è rationibus ponderum corporum B, *b*, temporumque quibus corpora illa, rectâ cadendo è locis F, *f*, ſpatia æqualia FE, *fe* confeciſſent, cum contrariâ materiæ, quæ corporibus ineſt, ratione compoſitis. Hoc eſt, cùm ſit pondus corporis B, ad pondus corporis *b*, ut P ad *p*, et materia in corpore *b* ad materiam in corpore B, ut *p* ad M; ratio rectæ V ad v ea erit, quæ componitur è rationibus rectæ P ad M, temporiſque, quo corpus B rectâ cadendo confeciſſet ſpatium FE, ad tempus quo corpus alterum *b*, rectâ itidem cadendo, confeciſſet ſpatium *fe*. Sit igitur θ recta quædam eâ lege mutabilis, ut ad mutabilem TH eam ſemper rationem gerat, quam tempus, quo corpus *b* ſpatium *fe* caſu recto confeciſſet, ad tempus quo corpus B caſu recto confeciſſet ſpatium FE. Igitur V erit ad v ut rectangulum P × TH ad rectangulum M × θ. At

verò

num tempora directè & velocitates reciprocè. Sed velocitates reciprocè ſunt ut tempora: atque ideo tempora directè & velocitates reciprocè ſunt ut quadrata temporum; & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum; id eſt, ut pondera & quadrata temporum. Q. E. D.

Corol. 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol.

verò cùm corpora, oſcillando per arcus ABC, *abc*, in locis à perpendiculo æqualiter remotis, qualia ſemper erunt illa D, *d*, à viribus urgeantur quæ ipſam ponderum rationem inter ſe conſtanter gerant; fieri nequit, quin tempora, quibus corpora è locis F, *f*, in locis E, *e*, vi proprii utriuſque ponderis, rectà ceciderint, ad tempora quibus conficiuntur arcus ſimiles et æquales AD, *ad*, ſimilem ſingulatim rationem gerant. Hoc eſt, fieri nequit, quin ſit TH : *th* = TH : *b*. Fieri igitur nequit, quin ſint æquales rectæ illæ *th*, *b*, et rectangula M × *b*, M × *th* inter ſe æqualia. Cùm igitur ſit V : v = P × TH : M × *b*, erit etiam V : v = P × TH : M × *th*. At verò jam antè oſtendimus eſſe V ad v ut $\dot{\overline{tb}}$ ad $\dot{\overline{TH}}$. Erit igitur $\dot{\overline{tb}}$: $\dot{\overline{TH}}$ = P × TH : M × *th*. Quare *th* × $\dot{\overline{tb}}$: *th* × $\dot{\overline{TH}}$ = P × TH : M × *th*. Sed *th* × $\dot{\overline{TH}}$: TH × $\dot{\overline{TH}}$ = M × *th* : M × TH. Ex æquo igitur *th* × $\dot{\overline{tb}}$. TH × $\dot{\overline{TH}}$ = P : M. Quadratorum autem è rectis *th*, TH fluxiones rectangulorum, *th* × $\dot{\overline{tb}}$, TH × $\dot{\overline{TH}}$ inter ſe rationem gerunt. Quare fluxionibus illis conſtans rectarum P, M ratio intercedet. Eadem igitur et fluentibus; ipſis utique rectarum *th*, TH quadratis; ſiquidem quadrata illa, cum rectis ipſis arcubuſque AD, *ad* ſimul generari inceperint. Rectarum igitur TH, *th*, quarum duplicata ratio data eſt, earum propria certè inter ipſas ratio dabitur. Et ſi arcus AD, *ad*, ſemper inter ſe æquales, in totos ABC, *abc* creverint, et rectæ TH, *th* in illas TO, *to*; erit TH ad *th* ut TO, *to*: et tempora quibus arcus æquales AD, *ad* conficiuntur, quorum utique temporum rationem rectæ TH, *th* referunt, ea cum temporibus, quibus arcus integri conficiuntur, per rectas TO, *to* expoſitis, proportione convenient. Q. E. D.

Jam verò quod alterum Newtonus dicit, eſſe V ad v ut P × TO ad M × *to*, id ex iis quæ oſtenſa ſunt, facilè obtinendum eſt. Nempe oſtendimus TH eſſe ad *th* ut TO ad *to*. Erit igitur P × TH ad M × *th* ut P × TO ad M × *to*. Sed illud etiam oſtendimus, eſſe V ad v ut P × TH ad M × *th*. Quare V : v = P × TO : M × *to*. Q. E. D.

Cæterum Propoſitio ipſa, cujus approbandæ gratiâ hæc velocitatum ratio allegata eſt, vel ex eo ſatis in aperto poſita eſt, quod modò nos oſtendimus, rectas M, P rationem inter ſe habere, ejus quæ temporibus TH, *th*, quibus arcus æquales conficiuntur, intercedit, duplicatam. Cùm enim ſit M : P = TH^2 : th^2 = TO^2 : to^2; ratio M ad *p*, quæ componitur è rationibus rectæ M ad P rectæque P ad *p*, ea componetur è rationibus rectæ P ad *p* et quadrati ex TO ad quadratum ex *to*. Sed ratio rectæ M ad *p* ea eſt quæ materiæ in corpore B ad materiam in corpore *b*; et ratio rectæ P ad *p* ea eſt quæ ponderis corporis B ad pondus corporis *b*; et ratio mutua rectarum TO, *to*, ea temporum, quibus corpora arcus integros oſcillando confecerint, mutua eſt ratio. Ratio igitur materiæ ad materiam compoſita eſt è ratione ponderum cum duplicatâ temporum ratione. Q. E. D.

(*) Corpora A, α, à centris G, γ, funibus longitudine inæqualibus, GB, γβ ſuſpenſi, arcus ABC, αβκ ſive circulares, ſive alios quoſlibet, inæquales quidem, ſed inter ſe ſimiles, in ſpatiis vacuis oſcillando, centris oſcillationum B, β ſcribant. Poſuit Newtonus in Corollario quarto, temporum, quibus corpora arcus ſimiles ABC, αβκ confecerint, quadrata eſſe inter ſe ſicut longitudines GB, γβ, ſi corpora A, α tam pondere quàm materiâ inter ſe fuerint æqualia. Inde verò conſequi ait, pondera corporum, A, α, longitudinum, GB, γβ, rationem inter ſe ſervare, ſi æqualis ſit in utroque corpore materia, et ſi tempora oſcillandi per arcus illos ſimiles æqualia ſint. Et in Corollario quinto, id univerſè conſtituit, materiam corporis cujuſcunque penduli rationem è tribus rationibus

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cùm quadrata temporum, cæteris paribus, ſint ut longitudines Pendulorum; ſi & tempora & quantitates materiæ æqualia ſunt, pondera erunt ut longitudines Pendulorum.

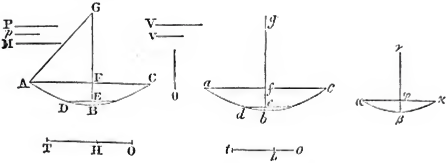
Corol. 5. Et univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directè, & longitudo Penduli inverſè (b).

Corol.

tionibus compoſitam, ponderis, duplicatâ temporis, contrariâ longitudinis, conſtanter ſervare.

Nos primum quod poſuit Newtonus ſic oſtendimus.

Per puncta A, C, α, κ, arcuum ſimilium ABC, αβκ extrema, ducantur rectæ AC, ακ, quæ rectis GB, γβ, quæ à mediis arcuum illorum punctis ad perpendiculum fuerint erectæ, in punctis F, φ occurrant. Jam cùm ſimiles ſint arcus ABC, αβκ, idcirco in locis, quæ à perpendiculo æqualibus va-



cillantium ſunium inclinationibus remota fuerint, corpora, per arcus ABC, αβκ oſcillando, à viribus incitabuntur, quæ ipſorum ponderum rationem inter ſe conſtanter gerent. Ac propterea fieri nequit, quin tempora, quibus corpora, ſi è locis F, φ, cecidiſſent, vi proprii utrumque ponderis in loca B, β caſu recto delata eſſent, ad tempora, quibus arcus ſimiles ABC, αβκ oſcillando conficiantur, ſimilem rationem gerant. Quare et duplicata illorum ratio horum etiam duplicata erit. Atqui ſpatia FB, φβ, cùm corpora ponantur tam pondere quàm materiâ inter ſe æqualia, rationem inter ſe habebunt temporum, quibus caſu recto confecta eſſent, duplicatam: quare et eorum temporum duplicatam, quibus arcus ſimiles ABC, αβκ corpora oſcillando confecerint. Sed cùm ſimiles ſint arcus iiii ABC, αβκ, quæ ſpatiis FB, φβ eadem longitudinibus GB, γβ inter ipſas ratio erit. Quare et longitudines illæ temporum, quibus arcus ABC, αβκ conficiantur, rationem inter ſe duplicatam gerant. Sicut in Corollario 4, Newtonus poſuit. Q. E. D.

Inde verò quod in Corollario quinto Newtonus univerſè conſtituit, facili argumento obtinebimus. Manente enim corporum A, α, cùm materiæ tum ponderis æqualitate, intelligatur corpus quodpiam tertium *b* centro *g*, fune *gb*, qui illius GB longitudine æqualis, ſit ſuſpenſum, arcum *abc* oſcillando ſcribere illius ABC ſimilem et æqualem. Jam materia corporis *a* ad materiam corporis A, ſive ad materiam corporis α, rationem habet è ratione ponderis corporis *a* ad pondus corporis A vel α, cùm temporis, quo conficitur arcus *abc*, ad tempus, quo conficitur arcus ABC, duplicatâ ratione compoſitam (per Prop. XXIV.) Sed temporis, quo conficitur arcus *abc*, ad tempus, quo conficitur ABC, duplicata ratio componitur è duplicatâ temporis quo conficitur arcus *abc* ad tempus quo arcus αβκ, et duplicatâ ejus quo arcus αβκ ad tempus quo ABC. Quæ poſtrema eadem eſt quæ longitudinis γβ ad longitudinem GB vel *gb*: ſicut Newtonus poſuit, et à nobis oſtenſum eſt. Quare materia corporis *a* ad materiam corporis α rationem habet ex tribus compoſitam;

ponderis

De Motu Corporum

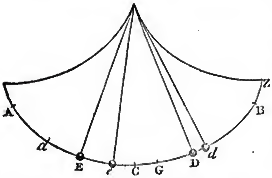
Corol. 6. Sed & in Medio non reſiſtente (c) quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo Penduli inverſè. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut ſuprà explicui; ideoque idem præſtat in tali Medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis; tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quàm accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

PROP. XXV. THEOR. XX.

Corpora funependula quibus, in Medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.

Sit AB Cycloidis arcus, quem corpus D, tempore quovis in Medio non reſiſtente, oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in C, ita ut C ſit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix, quâ corpus urgetur in loco quovis D, vel *d*, vel E, ut longitudo arcûs CD, vel C*d*, vel CE. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cùm reſiſtentia ſit ut momentum temporis,



pònderis a ad pondus α, temporum quibus conficiuntur arcus abc, $\alpha\beta\kappa$ duplicatâ, et longitudinum gb, $\gamma\beta$ contrariâ. Q. E. D.

Hinc verò veritatem ejus quod in Corollario quarto Newtonus affirmavit, quivis colliget. Corporum pendulorum a, α pondera ſignificentur literis a, α; materia illius literâ m; hujus, literâ μ. Tempora quibus arcus ſimiles abc, $\alpha\beta\kappa$ oſcillando confecerint literis t, τ. Cùm ſit $m : \mu = a \times t^2 \times \gamma\beta : \alpha \times \tau^2 \times gb$; ſi ponantur m, μ inter ſe æquales, erunt $a \times t^2 \times \gamma\beta$, $\alpha \times \tau^2 \times gb$ inter ſe æqualia. Unde ſi æqualia ſint t^2, τ^2, erunt etiam $a \times \gamma\beta$, $\alpha \times gb$ inter ſe æqualia. Ac propterea

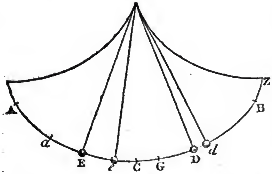
ideoque detur ([d]), exponatur eadem per datam arcûs Cycloidis partem CG; & ſumatur arcus G*d* in ratione ad arcum CD quam habet arcus GB ad arcum CB: & vis, quâ corpus in *d* urgetur in Medio reſiſtente, cùm ſit exceſſus vis C*d* ſupra reſiſtentiam CG, exponetur per arcum G*d*; ideoque erit ad vim, quâ corpus D urgetur in Medio non reſiſtente in loco D, ut arcus G*d* ad arcum CD; & propterea etiam in loco B ut arcus GB ad arcum CB. Proinde ſi corpora duo, D, *d* exeant de loco B, & his viribus urgeantur: cùm vires ſub initio ſint ut arcus CB & GB, erunt velocitates primæ & arcus primò deſcripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi BD & B*d*; & arcus reliqui CD, G*d* erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipſis CD, G*d* proportionales manebunt in eâdem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD, G*d* ſemper erunt ut arcus toti CB, GB; & propterea arcus illi reliqui ſimul deſcribentur. Quare corpora duo D, *d* ſimul pervenient ad loca C & G; alterum quidem in Medio non reſiſtente ad locum C, & alterum in Medio reſiſtente ad locum G. Cùm autem velocitates in C & G ſint ut arcus CB, GB; erunt arcus, quos corpora, ulteriùs pergendo, ſimul deſcribunt, in eâdem ratione. Sunto illi CE & G*e*. Vis, quâ corpus D in Medio non reſiſtente retardatur in E, eſt ut CE; & vis, quâ corpus *d* in Medio reſiſtente retardatur in *e*, eſt ut ſumma vis C*e* & reſiſtentiæ CG, id eſt ut G*e*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus CE, G*e* proportionales arcus CB, GB; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur, & arcus iiſdem deſcripti, ſemper ſunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum CB & GB; & propterea ſi ſumantur arcus toti AB, *a*B in eâdem ratione, corpora D, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus to-

terea $a : \alpha = gb : \gamma\beta$. Pondera ut longitudines. Q. E. D.

([c]) —*medio non reſiſtente.*] Hoc eſt, in ſpatio materiâ quâdam conſperſo, modò ulla talis cogitari poſſit, quæ, cùm gravitate prædita eſſet, vi tamen inertiæ deſtitueretur. Corpora, in tali materiâ, ſive pendula oſcillarent, ſive quovis modo per eam iter facerent, nullam quidem ex ejus offenſibus mutationem motûs ſubirent, licet minore vi deorſum traherentur, quàm quæ in inani conſtituta eſſent.

([d]) —*detur*,] i. e. conſtans ſit.

DE MOTU CORPORUM



tis, BA, Ba, proportionales ſunt arcuum partes quælibet BD, Bd vel BE, Be quæ ſimul deſcribuntur. Q. E. D.

Corol. Igitur motus velociſſimus in Medio reſiſtente non incidit in punctum infimum C, ſed reperitur in puncto illo G, quo arcus totus deſcriptus aB biſecatur. Et corpus, ſubinde pergendo ad a, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo à B ad G.

PROP. XXVI. THEOR. XXI.

Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo, à centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti; reſiſtentiæ, velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus à gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cúmque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti. Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cùm ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXVII. PROB. XXII.

Si corporibus funependulis reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in Medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales quàm proximè.

Nam pendulis æqualibus in Medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcûs B, in duplicatâ ratione velocitatum; id eſt, ut AA ad BB, quàm proximè. Si reſiſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſuprà tempus in Medio non reſiſtente; & reſiſtentia BB efficit exceſſum temporis in arcu B ſupra tempus in Medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes AB & BB quàm proximè, id eſt, ut arcus A & B. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in Medio reſiſtente, in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente. Nam differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in Medio non reſiſtente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oſcillationes breviores ſunt magis Iſochronæ; & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in Medio non reſiſtente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora; propterea quòd reſiſtentia in deſcenſu corporis, quâ tempus producitur, major ſit, pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quàm reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente, quâ tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardeſcentibus paulo minùs reſiſtitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis, quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia Medium,

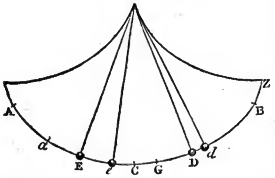
De Motu Corporum

eo quem à corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur, in poſteriore minùs; ac proinde magis vel minùs cum corporibus motis conſpirat. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minùs quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque cauſâ tempus producitur.

PROP. XXVIII. THEOR. XXIII.

Si corpori funependulo in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus arcûs deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad Penduli longitudinem duplicatam.

Deſignet BC arcum deſcenſu deſcriptum, C*a* arcum aſcenſu deſcriptum, & A*a* differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in Propoſitione XXV. conſtructa & demonſtrata ſunt, erit vis, quâ corpus oſcillans urgetur in loco quovis D, ad vim reſiſtentiæ ut arcus CD ad arcum CG, qui ſemiſſis eſt differentiæ illius A*a*. Ideoque vis, quâ corpus oſcillans urgetur in Cycloidis principio, ſeu puncto altiſſimo, id eſt, vis gravitatis, erit ad reſiſtentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum



infimum C ad arcum CG; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, ſeu dupla Penduli longitudo (c), ad arcum A*a*. Q. E. D.

PROP. XXIX. PROB. VI.

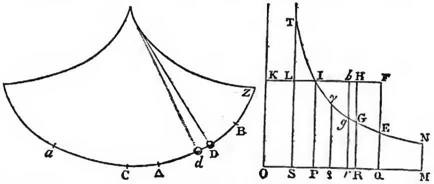
Poſito quòd corpori in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.

Sit B*a* arcus oſcillatione integrâ deſcriptus, ſitque C infimum Cycloidis punctum, & CZ ſemiſſis arcûs Cycloidis totius, longitu-

(c) Vide Coteſium de motu Pendulorum in Cycloide. Prob. & Lemm. III.

dini

dini Penduli æqualis; & quæratur reſiſtentia corporis in loco quovis D. Secetur recta infinita OQ in punctis O, S, P, Q; eâ lege, ut (ſi erigantur perpendicula OK, ST, PI, QE, centroque O & Aſymptotis OK, OQ deſcribatur Hyperbola TIGE ſecans perpendicula ST, PI, QE in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela Aſymptoto OQ occurrens Aſymptoto OK in K, & perpendiculis ST & QE in L & F) fuerit area hyperbolica PIEQ ad aream hyperbolicam PITS ut arcus BC, deſcenſu corporis deſcriptus, ad arcum



C*a* aſcenſu deſcriptum; & area IEF ad aream ILT ut OQ ad OS. Dein perpendiculo MN abſcindatur area hyperbolica PINM, quæ ſit ad aream hyperbolicam PIEQ ut arcus CZ ad arcum BC deſcenſu deſcriptum. Et ſi perpendiculo RG abſcindatur area hyperbolica PIGR, quæ ſit ad aream PIEQ ut arcus quilibet CD ad arcum BC deſcenſu toto deſcriptum; erit reſiſtentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH ad aream PINM.

Nam cùm vires à gravitate oriundæ, quibus corpus in locis Z, B, D, *a* urgetur, ſint ut arcus CZ, CB, CD, C*a*, & arcus illi ſint ut areæ PINM, PIEQ, PIGR, PITS; exponantur tum arcus tum vires per has areas reſpectivè. Sit inſuper D*d* ſpatium quàm minimum, à corpore deſcendente deſcriptum, & exponatur idem per aream quàm minimam RG*gr*, parallelis RG, *rg* comprehenſam; & producatur *rg* ad *h*, ut ſint GH*hg*, & RG*gr* contemporanea arearum IGH, PIGR decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH incrementum, GH*hg* − $\frac{Rr}{OQ}$ IEF, ſeu R*r* × HG − $\frac{Rr}{OQ}$ IEF, erit ad areæ PIGR decrementum, RG*gr*, ſeu R*r* × RG, ut HG − $\frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut OR × HG −

$\frac{OR}{OQ}$ IEF ad OR × GR, ſeu OP × PI; hoc eſt (ob æqualia OR × HG, OR × HR − OR × GR, ORHK − OPIK, PIHR & PIGR + IGH) ut PIGR + IGH − $\frac{OR}{OQ}$ IEF ad OPIK. Igitur ſi area $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH dicatur Y, atque areæ PIGR decrementum RGgr detur, erit incrementum areæ Y ut PIGR − Y.

Quòd ſi V deſignet vim à gravitate oriundam, arcui deſcribendo CD proportionalem, quâ corpus urgetur in D, & R pro reſiſtentiâ ponatur; erit $V - R$ vis tota, quâ corpus urgetur in D. Eſt itaque incrementum velocitatis ut $V - R$ & particula illa temporis, in quâ factum eſt, conjunctim: ſed & velocitas ipſa eſt ut incrementum contemporaneum ſpatii deſcripti directè & particula eadem temporis inverſè. Unde, cùm reſiſtentia per hypotheſin ſit ut quadratum velocitatis, incrementum reſiſtentiæ (per Lem. II.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id eſt, ut momentum ſpatii & $V - R$ conjunctim; atque ideo, ſi momentum ſpatii detur, ut $V - R$; id eſt, ſi pro vi V ſcribatur ejus exponens PIGR, & reſiſtentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut PIGR − Z.

Igitur areâ PIGR per datorum momentorum ſubductionem uniformiter decreſcente, creſcunt area Y in ratione PIGR − Y, & area Z in ratione PIGR − Z. Et propterea ſi areæ Y & Z ſimul incipiant, & ſub initio æquales ſint, hæ, per additionem æqualium momentorum, pergent eſſe æquales, & æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt et ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta, & ſemper erunt æquales: id adeo quia ſi reſiſtentia Z augeatur, velocitas, unà cum arcu illo Ca qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur;

(f) Mira certè argumenti ſubtilitas, neque tamen evidentia minor; niſi quòd illud fortè obſcuriùs dictum ſit, cur areæ Y, Z, ſi initio ſive creſcendi ſive decreſcendi æquales fuerint, ſemper æquales maneant. Hujus autem ratio hâc nititur Propoſitione.

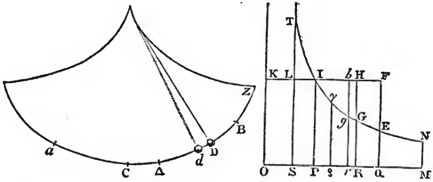
THEOREMA.

Si magnitudines initio æquales ſimili modo fluant, atque eâ etiam lege, ut fluentium magnitudines, fluendo ſimul factæ, fluxionibus ſuis auctæ ſemper inter ſe æquales ſint; fluentes ipſæ ſemper erunt inter ſe æquales.

Magnitudines æquales AB, CD ſimiliter fluant, i.e. vel creſcendo utraque vel utraque decreſcendo, et earum ſub initio fluxûs, ſint AE, CF (ſenſu Def. 5. Geom. Flux.) fluxiones. Sint Ab, Cd; Aβ, Cδ fluentium magnitudines fluendo ſimul factæ; quarum etiam fluxiones (ſenſu Def. 5. Geom. noſtræ

diminuetur; & puncto in quo motus omnis, unà cum reſiſtentiâ, ceſſat, propiùs accedente ad punctum c, reſiſtentia citiùs evaneſcet quàm area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur.

Jam verò area Z incipit definitque ubi reſiſtentia nulla eſt; hoc eſt, in principio motûs, ubi arcus CD arcui CB æquatur, & recta RG incidit in rectam QE; & in fine motûs, ubi arcus CD arcui Ca æquatur & RG incidit in rectam ST. Et area Y, ſeu $\frac{OR}{OQ}$ IEF−IGH, incipit definitque ubi nulla eſt; ideoque ubi $\frac{OR}{OQ}$ IEF & IGH æqualia ſunt; hoc eſt (per conſtructionem) ubi recta RG



incidit ſucceſſivè in rectas QE & ST. Proindeque areæ illæ ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, & propterea ſemper ſunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}$ IEF−IGH æqualis eſt areæ Z, per quam reſiſtentia exponitur, & propterea eſt ad aream PINM, per quam gravitas exponitur, ut reſiſtentia ad gravitatem (f). Q. E. D.

Corol.

Fig. 1.

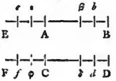
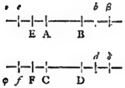


Fig. 2.



noſtræ Flux.) ſint Ae, cf; Aε, cφ; magnitudines utique in eodem genere in quo ſunt fluentes. Ea denique ſit fluendi lex, ut ſint εB, FD, nec non eb, fd; εβ, φδ inter ſe æquales. Dico fluentes eſſe ſemper inter ſe æquales, ſi eæ conſiderentur magnitudines, quæ fluendo ſimul exſiſtunt. Hoc eſt dico Ab = cd, et Aβ = cδ. Magnitudinibus enim AB, CD eas manere fingatur fluendi velocitates, quas initio fluxûs quæque habuit, uſquedum novas illas longitudines Ab, cd ſint adeptæ: inde verò velocitates fluendi in alias ſubitò mutari, quæ ſint ad priores ut rectæ Ae, cf ad illas Aε, cφ. Atque rurſum magnitudinibus fluentibus hæ novæ fluendi velocitates maneant, uſquedum fluentes Ab, cd in illas Aβ, cδ mutatæ fuerint. Inde verò velocitates in

Corol. 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ IEF ad aream PINM.

Corol. 2. Et autem maxima, ubi area PIHR eſt ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum PIGR − ꝛ) evadit nullum (g).

Corol. 3. Hinc etiam innoteſcit velocitas in locis ſingulis: quippe quæ eſt in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ, & ipſo motûs initio æquatur velocitati corporis in eâdem Cycloide ſine omni reſiſtentiâ oſcillantis.

Cæterùm ob difficilem calculum, quo reſiſtentia & velocitas per hanc Propoſitionem inveniendæ ſunt, viſum eſt Propoſitionem ſequentem ſubjungere.

PROP. XXX. THEOR. XXIV.

Si recta AB *æqualis ſit Cycloidis arcui, quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ ſint ad longitudinem Penduli ut reſiſtentia corporis, in arcûs punctis correſpondentibus, ad vim gravitatis: dico, quòd differentia inter arcum, deſcenſu toto deſcriptum, & arcum, aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum, ducta in arcuum eorundem ſemi-ſummam*

Fig. 1.

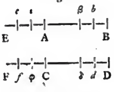
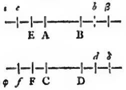


Fig. 2.



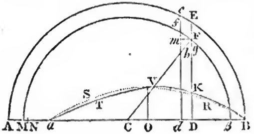
in alias rurſum ſubitò mutentur, quæ ſint ad primas ut Aι, Cφ ad illas AE, CF. Ita erit Bb ad Dd ut AE ad AF: et bβ ad dδ ut Aε ad Aſ.

Jam verò cùm EB, ED inter ſe æquales ſint, id enim poſuimus; cùm ſint etiam AB, CD inter ſe æquales, nam et illud poſuimus; erunt nimirum AE, CF inter ſe æquales. Ergo Bb, Dd inter ſe æquales erunt. Quare et Ab, Cd, quæ fluendo ſimul factæ ſunt, erunt inter ſe æquales, necnon illæ Eb, Fd. Rurſum cùm Eb, Fd ſint inter ſe æquales, cùm ſint etiam εb, ſd inter ſe æquales, id enim poſuimus, et Eε, Fſ inter ſe æquales erunt. Quare cùm illæ AE, CF ſint etiam inter ſe æquales, id enim oſtenſum eſt, æquales erunt Aε, Cſ. Unde illæ bβ, dδ erunt etiam inter ſe æquales. Et propter æquales jam oſtenſas Ab, Cd, aliæ illæ Aβ, Cδ, fluendo utique ſimul factæ, erunt etiam inter ſe æquales; necnon illæ εβ, ſδ. Unde rurſum cùm ſint etiam ιβ, φδ inter ſe æquales, id enim poſuimus, et ει, ſφ inter ſe æquales erunt; et propter æquales illas Aε, Cſ, erunt Aι, Cφ inter ſe æquales, illarum utique Aβ, Cδ fluxiones. Neque huic rationi officiet illarum Bb, bβ, Cd, dδ magnitudines, magnæ parvæve fuerint. Quare et numero earum Bb, bβ; Dd, dδ infinitè aucto, magnitudinibus ſingularum infinitè imminutis, fluentium, quæ fluendo ſimul factæ fuerint, æqualitas mutua manebit. Q. E. D.

Hinc autem facilis eſt probatio ejus quod à Newtono affirmatum eſt. Conſtantem enim areæ PIGR fluxionem (*vid. fig. p.* 359) ponere licet dato rectangulo OPIK æqualem. (Geom. Flux. Def. 5.) Unde cùm

ſummam æqualis erit areæ BKa *à perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Exponatur enim tum Cycloidis arcus, oſcillatione integrâ deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem *a*B, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem AB. Biſecetur AB in C, & punctum C repræſentabit infimum Cycloidis punctum; & erit CD ut vis à gravitate oriunda, quâ corpus in D ſecundum tangentem Cycloidis urgetur; eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli, quam habet



vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem CD, & vis gravitatis per longitudinem Penduli; & ſi in DE capiatur DK, in eâ ratione ad longitudinem Penduli, quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit DK exponens reſiſtentiæ. Centro C & intervallo CA, vel CB, conſtruatur ſemicirculus BE*e*A. Deſcribat autem corpus, tempore quàm minimo, ſpatium D*d*; & erectis perpendiculis DE, *de* circumferentiæ occurrentibus in E & *e*, erunt hæc ut velocitates, quas corpus in vacuo, deſcendendo

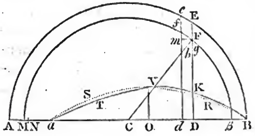
cùm ſit $\dot{Y} : \overline{\dot{PIGR}} = PIGR - Y : OPIK$, id enim à Newtono oſtenſum eſt, erit $\dot{Y} = PIGR - Y$. Sive $\dot{Y} + Y = PIGR$. At verò et fluxio areæ Z ponenda eſt ſpatio PIGR − Z æqualis (ſic demonſtrante Newtono.) Quare $\dot{Z} + Z = PIGR = \dot{Y} + Y$. Unde ſi areæ Y, Z ſemel fuerint æquales, ſemper æquales erunt (per noſtram Propoſitionem). Q. E. D.

(f) Nimirum $\dot{R} = PIGR - Z = PIGR - Y = PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF = PIHR - \frac{OR}{OQ} IEF$. (*Vid. fig. p. 359.*)

Poſito igitur $\dot{R} = 0$, ut ſit R maxima, erit $PIHR = \frac{OR}{OQ} IEF$. Sive $PIHR : IEF = OR : OQ$. Q. E. D.

Si igitur capiatur $O\rho$ talis ut ſit $O\rho$ ad $P\rho$ ſicut datum rectangulum OF ad datum ſpatium IEF; eductâque ad perpendiculum rectâ $\rho\gamma$, quæ hyperbolæ in γ occurrat, ſi capiatur arcus CΔ qui ad arcum CB rationem habeat quam ſpatium hyperbolicum $PI\rho\gamma$ ad ſpatium PIFQ, vis renixûs Maxima erit in loco Δ. Non enim. In alio igitur loco; puta in loco D; ductâque RG, quæ, cum aſymptotâ OK parallela, abſcindat aream PIGR, cujus ea ſit ad aream PIEQ ratio quæ arcûs CD ad arcum CB, erit PIHR : IEF = OR : OQ (pro eo quod modò oſtenſum eſt). Sed OR : OQ = OKHR : OKFQ. (Elem. VI. 1.) Quare PIHR : IEF = OKHR : OKFQ. Permutando PIHR : OKHR, ſive PR : OR = IEF : OF. Invertendo OR : PR = OF : IEF = $O\rho : P\rho$. Dividendo OP : PR = OP : $P\rho$. Æquales igitur erunt PR, $P\rho$. Quare punctum R eum illo ipſo ρ congruet, et ordinata RG cum ipſâ $\rho\gamma$. At verò cùm locus D alius ſit à loco Δ, arcus CD, CΔ inæquales erunt; et inæqualium ad arcum CB haud una erit ratio. Neque igitur arearum $IP\rho\gamma$, IPRG ad aream IPEQ una erit ratio. Areæ igitur $IP\rho\gamma$, IPRG, quæ ab eâdem ordinata IP initium ſumunt, inæquales erunt. Minimè igitur congruent ordinatæ illæ $\rho\gamma$, RG. Quod eſt abſurdum; quoniam congruere oſtenſæ ſunt. Non igitur in alio loco præter Δ vis renixûs maxima erit. Quare in ipſo loco Δ. Q. E. D.

à puncto B, acquireret in locis D & d. Patet hoc (per Prop. LII. Lib. I.) Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa DE, de; ſitque DF velocitas, quam acquirit in D, cadendo de B in Medio reſiſtente. Et ſi centro C, & intervallo CF, deſcribatur Circulus FfM occurrens rectis de & AB in f & M, erit M locus, ad quem deinceps, ſine ulteriore reſiſtentiâ, aſcenderet; & df velocitas, quam acquireret in d (h). Unde etiam ſi Fg deſignet velocitatis momentum, quod corpus D, deſcribendo ſpatium quàm minimum Dd, ex reſiſtentiâ Medii amittit; & ſumatur CN æqualis Cg: erit N locus ad quem corpus deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet; & MN erit decrementum aſcenſûs ex velocitatis illius amiſſione oriundum.



Ad df demittatur perpendiculum Fm; & velocitatis DF decrementum Fg, à reſiſtentiâ DK genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum fm, à vi CD genitum, ut vis generans DK ad vim generantem CD. Sed & ob ſimilia triangula Fmf, Fhg, FDC, eſt fm ad Fm, ſeu Dd, ut CD ad DF; & ex æquo Fg ad Dd ut DK ad DF. Item Fh ad Fg ut DF ad CF; & ex æquo perturbatè, Fh, ſeu MN, ad Dd ut DK ad CF, ſeu CM; ideoque ſumma omnium MN × CM æqualis erit ſummæ omnium Dd × DK. Ad punctum mobile M erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu deſcriptum, ſive huic æquale rectangulum Aa × $\frac{1}{2}a$B, æquabitur ſummæ omnium MN × CM (i), ideoque ſummæ omnium Dd × DK, id eſt, areæ BKVTa. Q. E. D.

Corol.

(h) Perficiatur enim ſemicirculus MFβ, ut rectæ MC iterum in β occurrat. Jam velocitas DF ea eſt, quam corpus, in ſpatiis vacuis oſcillando, in loco D adeptum eſſet, ſi è loco β, urgente vi quæ eſſet ut Cβ, cecidiſſet. (Lib. I. LII.) Cùm igitur corporis, in ſpatio impedito oſcillantis, eadem ſit in loco D velocitas ac ſi in vacuo, è loco β, urgente ibi vi Cβ, oſcillare incepiſſet; ſi extingui ponatur vis renixûs in loco D, idem erit corporis deinceps motus, ſcilicet per materiam vi ſuâ renitendi ſpoliatam, ac ſi motus ab initio è loco β vi Cβ inchoatus eſſet. At verò motu in vacuo ita inchoato corpus, in loco D, velocitatem df adipiſceretur, et locum uſque M aſcenderet, ubi velocitas ejus omnis extingueretur. (Lib. I. LII.)

(i) Trapezium motu illo deſcriptum iri, ex eo patet, quòd ordinata mobilis, ad perpendiculum cum rectâ CA, quæ poſitione data eſt, educta, rectæ CM inter ipſam et datum punctum C interceptæ

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum C*a*, CB differentiâ A*a* colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quàm proximè.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia DK, figura BKT*a* rectangulum erit ſub B*a* & DK; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2}$B*a* & A*a* erit æquale rectangulo ſub B*a* & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2}$A*a*. Quare cùm DK ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo Penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}$A*a* ad longitudinem penduli; omninò ut in Prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, figura BKT*a* Ellipſis erit quàm proximè. Nam ſi corpus, in Medio non reſiſtente, oſcillatione integrâ deſcriberet longitudinem BA, velocitas, in loco quovis D, foret ut Circuli, diametro AB deſcripti, ordinatim applicata DE. Proinde cùm B*a* in Medio reſiſtente, & BA in Medio non reſiſtente, æqualibus circiter temporibus deſcribantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius B*a* punctis, ſint quàm proximè ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis BA, ut eſt B*a* ad BA; erit velocitas in puncto D, in Medio reſiſtente, ut Circuli, vel Ellipſeos, ſuper diametro B*a* deſcripti, ordinatim applicata; ideoque figura BKVT*a* Ellipſis erit quàm proximè. Cùm reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit OV exponens reſiſtentiæ in puncto medio O; & Ellipſis BRVS*a*, centro O, ſemiaxibus OB, OV deſcripta, figuram BKVT*a*, eique æquale rectangulum A*a* × BO, æquabit quamproximè. Eſt igitur A*a* × BO ad OV × BO ut area Ellipſeos hujus ad OV × BO: id eſt, A*a* ad OV ut area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: et propterea $\frac{7}{11}$A*a* ad longitudinem Penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem gravitatem.

Quòd ſi reſiſtentia DK ſit in duplicatâ ratione velocitatis, figura BKVT*a* ferè Parabola erit, verticem habens V & axem OV[k];

ceptæ ſemper ſit æqualis. Atque idcirco mobilis illa faſtigio ſuo tanget ſemper rectam poſitione datam. (Simſon. Loc. Plan. Lib. I. Prop. XXIII. Caſ. 1.) Trapezium autem illud rectangulo A*a* × $\frac{1}{2}$*a*B æquale eſſe ſic oſtenditur. Trapezii illius latera parallela per puncta A, *a* cùm ſint rectis CA, C*a* ſingulatim æqualia, trapezium æquale erit rectangulo $\frac{1}{2}$CA + $\frac{1}{2}$C*a* × A*a*; hoc eſt propter CA, CB inter ſe æquales, rectangulo $\frac{1}{2}$CB + $\frac{1}{2}$C*a* × A*a*, ſive $\frac{1}{2}$*a*B × A*a*.

(k) Cùm enim DK ſit ut DF^2, erit DK × A = DF^2 = BD × DM, deſignante A datam quandam juſtæ longitudinis. Sed rectangulum BD × DM rectangulo BD × D*a* propemodùm eſt æquale. Quare, DK × A, BD × D*a* propemodum inter ſe æqualia. Si verò æqualia eſſent, punctum K eſſet ad Parabolam cujus parameter A; axis verò rectam B*a*, quam ad perpendiculum inſiſteret, medium divideret. Neque longè ab illius Parabolæ ductu punctum K abſceſſerit, propter non magnam illorum DK × A, BD × D*a* inæqualitatem.

ideoque

ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ Ba & OV quam proximè. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}$ Ba & Aa æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ Ba & OV, ideoque OV æqualis $\frac{3}{4}$ Aa: & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ Aa ad longitudinem Penduli.

Atque has concluſiones in rebus practicis abundè ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cùm Ellipſis vel Parabola BRVSa congruat cum figurâ BKVTa in puncto medio V, hæc, ſi ad partem alterutram BRV vel VSa excedit figuram illam, deficiet ab eâdem ad partem alteram, & ſic eidem æquabitur quàm proximè.

PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Si corporis oſcillantis reſiſtentia, in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus, augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per reſiſtentiam Medii, ideoque eſt ut retardatio tota eique proportionalis reſiſtentia retardans. In ſuperiore Propoſitione rectangulum ſub rectâ $\frac{1}{2}a$B, & arcuum illorum CB, Ca differentiâ, Aa, æqualis erat areæ BKTa. Et area illa, ſi maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK; hoc eſt, in ratione reſiſtentiæ, ideoque eſt ut longitudo aB & reſiſtentia conjunctim. Proindeque rectangulum ſub Aa & $\frac{1}{2}a$B eſt ut aB & reſiſtentia conjunctim, & propterea Aa ut reſiſtentia. Q. E. D.

Corol. 1. Unde ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus deſcriptus: & contrà.

Corol. 2. Si reſiſtentia ſit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcûs totius: & contrà.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi reſiſtentia ſit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eâdem ratione arcûs totius: & contrà.

Corol. 4. Et ſi reſiſtentia ſit partim in ratione ſimplici velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcûs totius & partim in ejus ratione duplicatâ: & contrà.

Eadem

Eadem erit lex & ratio reſiſtente pro velocitate, quæ eſt differentiæ illius pro longitudine arcûs.

Corol. 5. Ideoque ſi Pendulo inæquales arcus ſucceſſivè deſcribente inveniri poteſt ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcûs deſcripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his Propoſitionibus, per oſcillationes Pendulorum in Mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam Mediorum. Aeris verò reſiſtentiam inveſtigavi per Experimenta ſequentia.

Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi; ita ut inter uncum & centrum oſcillationis Globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & unciâ unâ à centro ſuſpenſionis diſtans; & è regione puncti illius collocavi Regulam, in digitos diſtinctam, quorum ope notarum longitudines arcuum à Pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes, quibus Globus octavam motûs ſui partem amitteret. Si Pendulum deducebatur à perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totâque oſcillatione primâ, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſitâ, arcum digitorum ferè quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motûs ſui partem; ſic ut, ultimo ſuo aſcenſu, deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motûs partem oſcillationibus 121; ita ut, aſcenſu ultimo, deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motûs partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, reſpectivè. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo deſcriptos erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpectivè. Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque, & in oſcillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60,

60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti reſpectivè. Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicatâ

(') Neque tamen univerſe illud videtur obtinere, ut quo majores ſint oſcillationes, eò propiùs vires renixûs duplicatam attingant velocitatum rationem. Nam cùm arcuum differentiæ fuerint quales à Newtono ſunt deſcriptæ, ſi omnes ordine à primâ dividantur, numeri à diviſione oriundi, earum omnium inter ſe & ad primam rationes exhibebunt. Atqui hi ſunt numeri à diviſione oriundi

1 2,71 9,507 36,96 141,84 543

Motu igitur corporis penduli ad Cycloidem redacto, quâ ratione Newtonus mox dicturus eſt, vires renixûs, quales in mediis arcuum Cycloideos punctis fuiſſent, ſi per tales arcus corpus pendulum latum eſſet, eas inter ſe rationes habuiſſent, quas hi numeri præ ſe ferunt; arcus autem ipſi Cycloideos eamdem inter ſe rationem habuiſſent, quam circulares quos corpus pendulum centro oſcillandi ſuo reverà ſcribebat; quorum communis ratio minoris cujuſque ad proximum, unitatis ad binarium erat. Velocitatum igitur, quibuſcum in ſummitatibus arcuum illorum Cycloideos punctis corpus pendulum latum eſſet, et harum eadem inter ipſas communis ratio, unitatis ad binarium, fuiſſet. Velocitatum igitur illarum duplicata ratio unitatis ad quaternarium fuiſſet. Hæc cùm ita ſint, quænam fuiſſet vis renixûs in medio arcûs cujuſque Cycloidalis puncto, ſi ad eam, quæ in puncto medio arcûs proximè majoris regnâſſet, rationem habuiſſet velocitatum duplicatam; & quânam ſui parte vis renixûs, in medio arcûs cujuſque minoris puncto, major fuiſſet quàm pro duplicatâ velocitatum ratione, ex ſequenti numerorum deſcriptione quivis ut opinor intelligat

4 : 1 = 543 : 135,75	141,84	$\frac{6,1}{141,8} = \frac{1}{23}$
4 : 1 = 141,84 : 35,46	36,96	$\frac{1,5}{36,9} = \frac{1}{25}$
4 : 1 = 36,96 : 9,24	9,51	$\frac{,27}{9,51} = \frac{1}{35}$
4 : 1 = 9,51 : 2,37	2,71	$\frac{,34}{2,71} = \frac{1}{8}$
4 : 1 = 2,71 : 0,68	1	$\frac{,3}{1} = \frac{3}{10}$

Hic in maximis arcubus, minùs quidem quàm in mediis, ſervatam videre eſt inter vires renixûs duplicatam velocitatum rationem. A quâ quantum et in aliis Newtoni experimentis vires illæ abſceſſerint, haud inutile erit ſimili numerorum deſcriptione oculis ſubjeciſſe.

EXPERIMENTA IN GLOBO LIGNEO

Qui in aere oſcillabat donec pars quarta Motûs extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{748}$	$\frac{1}{272}$	$\frac{4}{325}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{24}{125}$	$\frac{12}{17}$.
Differentiarum rationes	1	2,75	9,21	35,9	143,6	528.

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 528 : 132	143,6	$\frac{11,6}{143,6} = \frac{1}{12}$
4 : 1 = 143,6 : 35,9	35,9	0
4 : 1 = 35,9 : 8,97	9,21	$\frac{,24}{9,21} = \frac{1}{38}$
4 : 1 = 9,21 : 2,30	2,75	$\frac{,45}{2,75} = \frac{1}{6}$
4 : 1 = 2,75 : 0,69	1,	$\frac{,3}{1} = \frac{3}{10}$

EXPE-

duplicatâ ratione arcuum deſcriptorum quàm proximè; in minoribus verò paulo majores quàm in eâ ratione; & propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI. libri hujus) reſiſtentia Globi, ubi celeriùs movetur, eſt in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardiùs, paulo major quàm in eâ ratione ([l]). Liber Secundus.

Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quâvis, ſintque A, B, C quantitates datæ; & fingamus quòd differentia arcuum ſint $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Cùm velocitates maximæ ſint, in Cycloide,

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO

Qui in AERE oſcillabat donec pars OCTAVA motûs extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{1808}$	$\frac{1}{912}$	$\frac{1}{386}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{4}{181}$	$\frac{4}{53}$	$\frac{4}{15}$
Differentiarum rationes	1,	1,98	4,86	12,91	39,96	136,4	482,1 :

Velocitatum communis ratio 1 : 2.

4 : 1 = 482,1 : 120,5	136,4	$\frac{15,9}{136,4} = \frac{10}{86}$
4 : 1 = 136,4 : 34,1	39,99	$\frac{5,9}{39,9} = \frac{1}{7}$
4 : 3 = 39,96 : 9,99	12,91	$\frac{3}{12,9} = \frac{1}{4,3}$
4 : 1 = 12,91 : 3,23	4,68	$\frac{1,45}{4,68} = \frac{1}{3,2}$
4 : 1 = 4,68 : 1,17	1,98	$\frac{,81}{1,98} = \frac{1}{2,4}$
4 : 1 = 1,98 : 0,49	1,	$\frac{,5}{1} = \frac{1}{2}$

EXPERIMENTA IN EODEM GLOBO PLUMBEO

Qui in AERE oſcillabat donec pars QUARTA motûs extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{2040}$	$\frac{1}{1036}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{8}{121}$	$\frac{8}{35}$.
Differentiarum rationes	1	1,97	4,86	12,83	40	134,9	466,3

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 466,3 : 116,6	134,9	$\frac{18,3}{134,9} = \frac{1}{7}$
4 : 1 = 134,9 : 33,5	40	$\frac{6,5}{40} = \frac{1}{6}$
4 : 1 = 40 : 10,	12,83	$\frac{2,8}{12,8} = \frac{1}{4,6}$
4 : 1 = 12,83 : 3,21	4,86	$\frac{1,65}{4,86} = \frac{1}{3}$
4 : 1 = 4,86 : 1,21	1,97	$\frac{,76}{1,97} = \frac{1}{2,6}$
4 : 1 = 1,97 : 0,49	1	$\frac{,5}{1} = \frac{1}{2}$

EXPE-

cloide, ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcriptorum, in Circulo verò, ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores ſint in Cycloide quàm in Circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo ſint majora quàm in Cycloide in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias (quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore quamproximè in utrâque Curvâ: deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, unà cum reſiſtentiâ, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ ſimplici auctam; & diminui, unà cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ, quæ fuerunt in Circulo obſervatæ; velocitates verò maximæ ponendæ

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO MAJORE.

Qui in AERE oſcillabat donec pars QUARTA motûs extincta erat.

Arcuum differentiæ	$\frac{2}{535}$	$\frac{4}{287}$	$\frac{32}{171}$
Differentiarum rationes	1	3,73	50
Velocitatum rationes	1	2	8

16 : 1 = 50 : 3,125	3,73	$\frac{,6}{3,7} = \frac{1}{6}$
4 : 1 = 3,73 : 0,93	1,	$\frac{,07}{1} = \frac{1}{14}$

Mitto experimenta hujus Globi in Aquâ oſcillantis, propter errores ex vaſis anguſtiâ oriundos.

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO MINORE

Qui in AQUA oſcillabat donec pars QUARTA motus extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{5}{4976}$	$\frac{1}{424}$	$\frac{1}{136}$	$\frac{5}{212}$	$\frac{12}{145}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{32}{27}$
Differentiarum rationes	1	2,35	7,32	23,5	82,36	306,2	1179,5

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 1179,5 : 294,9	306,2	$\frac{11,3}{306,2} = \frac{1}{27}$
4 : 1 = 306,2 : 76,55	82,36	$\frac{5,8}{82,4} = \frac{1}{15}$
4 : 1 = 82,36 : 20,59	23,5	$\frac{2,9}{23,5} = \frac{1}{8}$
4 : 1 = 23,5 : 5,87	7,32	$\frac{1,45}{7,32} = \frac{1}{5}$
4 : 1 = 7,32 : 1,83	2,35	$\frac{,52}{2,35} = \frac{1}{4,5}$
4 : 1 = 2,35 : 0,59	1	$\frac{,4}{1} = \frac{2}{3}$

ſunt

ſunt arcubus, vel dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem analyticam, fit $A = 0{,}0000916$; $B = 0{,}0010847$; & $C = 0{,}0029558$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0{,}0000916V + 0{,}0010847V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0029558V^2$: & propterea, cùm (per Corollarium Propoſitionis XXX. applicatum ad hunc caſum) reſiſtentia Globi, in medio arcûs oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}$ (m) $+ \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem Penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur

(m) NIMIRUM vis renixûs, quam literâ R ſignificare liceat, trifariam intelligatur diſtribui, ſive ex tribus viribus conflari, quas ſingulatim literis r, *r*, ϱ ſignificabimus; ut ſit $R = r + r + \varrho$. Harum trium partium, ex quibus vis tota R conflata eſt, prima r talis ſit, quæ ſimplici ſemper velocitatis corporis penduli rationi reſpondeat; ultima ϱ rationem velocitatis duplicatam ſervet; media *r* rationem illam quæ ſimplicis & duplicatæ velocitatis media eſt, quam Newtonus ſesquiplicatam vocare ſolet. Vel ut clariùs dicamus, ſi ſint v, v^2 duæ rectæ eâ lege mutabiles, ut illa v ſimplicem velocitatis rationem, illa v^2 duplicatam ſemper gerat; ſit alia $v^{\frac{3}{2}}$ eâ lege mutabilis, ut duarum v, v^2 proportione ſemper media ſit. Et tales ponantur vires r, *r*, ϱ, ut illa r rectæ v, illa *r* rectæ $v^{\frac{3}{2}}$, illa ϱ rectæ v^2 ſemper rationem ſervet. Similiter arcuum, qui à corpore pendulo deſcendendo & aſcendendo ſcripti fuerint, horum differentia à vi renixûs oriunda, quam literâ D ſignificabimus, in partes tres d, *d*, δ diſtribui cogitetur, à tribus viribus r, *r*, ϱ ſingulatim oriundas. Ut ſit $D = d + d + \delta$. Ponatur autem $d = AV$, $d = BV^{\frac{3}{2}}$, $\delta = CV^2$. Unde efficietur id quod Newtonus poni juſſit, $D = AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Et pro D & V numeris, quos experimenta è memoratis ſecundum, quartum, & ſextum monſtrant, ordine ſubſtitutis, venient literarum A, B, C æſtimationes illæ, quas Newtonus protulit.



V $V^{\frac{3}{2}}$ V^2

Jam verò cùm in puncto medio arcûs, quem corpus quodpiam pendulum ſcribat, vis renixûs ſit ad corporis pondus ut recta OV (in fig. Prop. XXX.) ad longitudinem fili quo corpus ſuſpenſum eſt; cùm præterea, ſi talis ponatur vis renixûs quæ ſimplici velocitatum rationi uſque reſpondeat, ea erit OV quæ ad arcuum, qui deſcendendo & aſcendendo confecti fuerint, differentiam rationem habeat quam 7 ad 11 (per Cor. Prop. XXX.). Hæc cùm ita ſint, ſi figura Propoſitionis XXX. ad vim r accommodata fuerit, erit $OV = \frac{7}{11}d$. Ac proinde ea fuerit vis r, in puncto arcûs ſcripti medio, quæ ad corporis penduli pondus rationem habuerit, quam $\frac{7}{11}d$, ſive $\frac{7}{11}AV$ ad L (ſignificante literâ L longitudinem fili, quo corpus ſuſpenſum erat).

At verò ſi talis ſit vis renixûs, quæ duplicatam velocitatis rationem ſervet, OV ea erit quæ ad arcuum, qui deſcendendo & aſcendendo confecti fuerint, differentiam rationem habeat quam 3 ad 4. Quare ſi figura Prop. XXX. ad vim ϱ accommodata fuerit, erit $OV = \frac{3}{4}\delta$. Ac proinde ea fuerit vis ϱ, in medio arcûs confecti puncto, quæ ad corporis penduli pondus rationem habeat quam $\frac{3}{4}\delta$ ſive $\frac{3}{4}CV^2$ ad L.

Rurſum cùm proportio rectæ OV ad Aa, ſive quantitas $\frac{OV}{Aa}$, à lege vis renixûs omnino pendeat; et cùm lex illa, quæ ſimplicem inter vires illas velocitatum conſtituat rationem, illam $\frac{OV}{Aa}$ huic $\frac{7}{11}$ æqualem efficiet; altera verò lex, quæ duplicatam velocitatum rationem viribus renixûs inducat, illam

De Motu Corporum

bantur numeri inventi, fiet reſiſtentia Globi ad ejus pondus, ut $0,0000583\,v + 0,0007593\,v^{\frac{3}{2}} + 0,0022169\,v^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum ſuſpenſionis & Regulam; id eſt, ad 121 digitos. Unde cùm v in caſu ſecundo deſignet 1, in quarto 4, in ſexto 16: erit reſiſtentia ad pondus Globi in caſu ſecundo ut 0,0030345 ad 121, in quarto ut 0,041748 (o) ad 121, in ſexto ut 0,61705 ad 121.

Arcus, quem punctum in filo notatum in caſu ſexto deſcripſit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, ſeu $119\frac{5}{29}$ digitorum (o). Et propterea, cùm radius eſſet 121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum Globi eſſet 126 digitorum; arcus, quem centrum globi deſcripſit, erat $124\frac{3}{31}$ (p) digitorum. Quoniam corporis oſcillantis velocitas maxima, ob reſiſtentiam Aëris, non incidit in punctum infimum arcûs deſcripti, ſed in medio ferè loco arcûs totius verſatur: hæc eadem erit circiter, ac ſi Globus, deſcenſu ſuo toto in Medio non reſiſtente, deſcriberet arcûs illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$ (q), idque in Cycloide, ad quam motum Penduli ſuprà reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati, quam Globus, perpendiculariter cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem arcûs illius ſinui verſo æqualem, acquirere poſſet. Eſt autem ſinus ille verſus in Cycloide ad arcum iſtum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad Penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278 (r). Quare velocitas ea ipſa eſt, quam corpus cadendo, & caſu ſuo ſpatium 15,278 (r) digitorum

illam $\frac{OV}{Aa}$ huic $\frac{3}{4}$ æqualem reddat: certè lex priorum geometricè quaſi intermedia, quæ viribus renixûs rationem ſimplicis & duplicatæ velocitatum mediam induxerit, hæc illam $\frac{OV}{Aa}$ talem præſtiterit, quæ earum, quas priores renixûs leges dabant, geometricâ ratione quaſi media ſit. (Id quod Emerſonus ad locum rectè monuit.) Sed quantitatum $\frac{7}{11}$, $\frac{3}{4}$, quas leges priores dabant, eſt $\frac{7}{10}$ geometrica ratione quaſi media. Quare ſi figura Propoſitionis XXX. ad vim r accommodetur, erit $\frac{OV}{Aa}$ ſive $\frac{OV}{d} = \frac{7}{10}$, ſive $OV = \frac{7}{10}d$. Ac proinde ea fuerit vis r, in puncto medio arcûs oſcillando confecti, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{10}d$, ſive $\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}$, ad L.



V V^½ V²

Cùm igitur in medio puncto arcûs, oſcillando confecti, ea fuerit vis r, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{11}AV$ ad L: ea autem vis r quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}$ ad L: ea denique vis ρ quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{3}{4}CV^2$ ad L: ideirco ea fuerit vis R, è tribus r, r, ρ conflata, in puncto illo oſcillationis medio, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad L,

gitorum deſcribendo acquirere poſſet. Tali igitur cum velocitate Globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad ejus pondus ut 0,61705 ad 121, vel (ſi reſiſtentiæ pars illa ſola ſpectetur quæ eſt in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem hydroſtatico inveni, quòd pondus Globi hujus lignei eſſet ad pondus Globi aquei magnitudinis ejuſdem ut 55 ad 97: & propterea cùm 121 ſit ad 213,4 in eâdem ratione, erit reſiſtentia Globi aquei, præfatâ cum velocitate progredientis, ad ipſius pondus ut 0,56752 ad 213,4, id eſt, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ (s). Unde cùm pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuatâ deſcribat longitudinem digitorum 30,556 (t), velocitatem illam omnem in Globo cadente generare poſſet; manifeſtum eſt, quòd vis reſiſtentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$ (s), hoc eſt, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ (s). Et propterea, quo tempore Globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem ſemidiametri ſuæ, ſeu digitorum $3\frac{7}{16}$, deſcribere poſſet, eodem amitteret motûs ſui partem $\frac{1}{3342}$ (u).

Numerabam etiam oſcillationes, quibus Pendulum quartam motûs ſui partem amiſit. In ſequente Tabulâ numeri ſupremi denotant longitudinem arcûs deſcenſu primo deſcripti, in digitis & partibus digiti expreſſam: numeri medii ſignificant longitudinem arcûs aſcenſu ultimo deſcripti; & loco infimo ſtant numeri oſcillationum. Experimentum deſcripſi tanquam magis accura-

L, longitudinem fili quo corpus ſuſpenſum erat. (El. v. 24.) Q. E. D.

(n) Lege 0,041778, ſicut rectè emendavit etiam Emerſonus.

(o) Erat ut opinor arcus digitorum 120, ne minimâ quidem parte major vel minor; ſi, quod Newtonus voluiſſe videtur, media ejus longitudo maximam inter minimamque ſumenda ſit. Cùm enim arcus, quos corpus pendulum motu ſuo, ob aëris renixum ſenſim langueſcente, ſcribebat, ſeriem quandam arithmeticam conſtituerint, datâ longitudine ($\frac{24}{29}$ dig.) uſque minuentes, media omnium longitudo maximæ minimæque ſimul ſumptarum ſemiſſis fuerit. At verò arcus deſcenſûs primi in experimento è memoratis ſexto erat digitorum 64. Arcus igitur aſcenſûs primi partibus $\frac{24}{29}$ unius digiti contractior. Unde arcus totus primus, idemque maximus, $128-\frac{24}{29}$. Rurſum arcus aſcenſûs ultimi erat digitorum 56. Arcus igitur deſcenſûs ultimi partibus $\frac{24}{29}$ unius digiti longior. Arcus igitur totus ultimus, idemque minimus, $112+\frac{24}{29}$. Primi igitur ultimique ſumma $128-\frac{24}{29}+112+\frac{24}{29}=240$. Atque hujus ſemiſſis $=120$.

(p) 124,958.

(q) 62,479.

(r) 15,490.

(s) Lege $376\frac{1}{500}$.

(t) 30,9814.

(u) $\frac{1}{3330}$.

tum,

De Motu Corporum

tum, quàm cùm motûs pars tantùm octava amitteretur. Calculum tentet qui volet (x).

Deſcenſus primus	2	4	8	16	32	64	
Aſcenſus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48	
Numerus Oſcillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$	

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ ſuſpendi filo eodem; ſic ut inter centrum Globi & punctum ſuſpenſionis intervallum eſſet pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oſcillationes quibus data motûs pars amitteretur. Tabularum ſubſequentium prior exhibet numerum oſcillationum, quibus pars octava motûs totius ceſſavit; ſecunda numerum oſcillationum, quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oſcillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabulâ priore, ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 6 reſpectivè, & generaliter per quantitatem v ut ſuprà: emerget in obſervatione tertiâ

(x) Nobis autem tentantibus exitus operis hujuſmodi fuit; computatione utique ſuper experimento ſecundo cum quarto & ſexto inſtitutâ

A = 0,0005098. B = 0,0005881. C = 0,0025785. Unde

	In Exp. 2.	In Exp. 4.	In Exp. 6.
r	0,0003244	0,0012976	0,0051904
r	0.0004117	0,0032936	0,0263488
ϱ	0,0019340	0,0309440	0,4951040
R	0,0020701	0,0355352	0,5266432

Igitur in experimento ſexto pars illa vis renixûs, quæ duplicatam velocitatis rationem ſervabat, erat ad pondus corporis penduli ut 0,495104 ad 121.

Longitudo autem arcus, quem fili punctum illud ſcripſit cujus è regione Regula collocata eſt, digitorum erat 112. (Vide Not. °.)

Duplus ſinus verſus dimidii arcûs cycloidalis, quem globus centro oſcillandi ſcripſiſſet = 26,988.

Motus globo aqueo amittendus, qui diametrum lignei Newtoniani æqualis eſſet, quo tempore cum velocitate æquabili, quam ſpatium digitorum 13,494 rectâ cadendo vi proprii ponderis adeptus eſſet, ſpatium caſûs illius duplum, 26,988, confeciſſet; motus, inquam, hoc tempore globo aqueo amittendus pars eſſet $\frac{1}{311}$ totius.

Motus tali globo aqueo amittendus, quo tempore eâdem cum velocitate ſemidiametrum ſuam confeciſſet, pars eſſet $\frac{1}{7311}$ totius.

Illud

tertiâ $\frac{1}{193} = A + B + C$; in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$; in ſeptimâ $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ verò æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$; $B = 0{,}000297$; $C = 0{,}000879$. Et inde prodit reſiſtentia Globi, cum velocitate V moti, in eâ ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009V + 0{,}000208V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659V^2$ ad Penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis; hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ, in experimento primo, ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217V^2$ ad 121: & inde fit reſiſtentia Globi lignei ad reſiſtentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4}$ in $0{,}000659$, id eſt, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproximè. Ergo reſiſtentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diametrorum. At nondum conſideravimus reſiſtentiam fili, quæ certè permagna erat, ac de Pendulorum inventâ reſiſtentiâ ſubduci debet. Hanc accuratè definire non potui, ſed majorem tamen inveni quàm partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris Penduli; & inde didici; quòd reſiſtentiæ Globorum, demptâ fili reſiſtentiâ, ſunt quàm proximè in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longè abeſt à diametrorum ratione duplicatâ, $11\frac{13}{16}$ ad 1 (y).

Illud autem hâc in re minimè prætereundum judico, quod nequeo non mirari à Newtono prætermiſſam: computationem, ſi in experimento primo, cum tertio & quinto, ſive horum, ſive eorum quæ antè memorata ſunt, ſimilem ad modum inſtituta fuerit, coefficientem B negativum promere. Nec aliter eveniet, in experimentis illis quæ in Globo plumbeo minore in Aere oſcillante facta ſunt, ſi in primo, cum tertio & quinto, vel in ſecundo, cum quarto et ſexto utriuſque eorum claſſis, computatio perfecta fuerit.

(y) Quod ſi in experimento tertio, cum quinto et ſeptimo, ſecundæ claſſis eorum quæ in hoc globo facta ſunt, ſimilis computatio inſtituatur, veniet $A = 0{,}0013066$. $B = 0{,}0003508$. $C = 0{,}0007235$. Unde vis reſiſtens, in puncto arcûs cujuſque medio, ad pondus hujus globi rationem habuerit quam $0{,}0008316V + 0{,}0002457V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0005427V^2$ ad 121. Et pars ea hujus vis, quæ rationem velocitatis duplicatam ſervaverit, ſive pars ρ, ea fuerit ad pondus globi ut $0{,}0005427V^2$ ad 121. Sed in Globo ligneo, ex experimento 2°, 4°, et 6° eorum in quibus pars quarta motus extinguebatur, erat inventa vis ρ ad pondus globi lignei rationem, quæ eſt $0{,}001934V^2$ ad 121 (Vide No. x). Æquatis igitur globorum velocitatibus, efficietur vis ρ in globo ligneo ad vim ρ in globo plumbeo ut $0{,}001934 \times 57\frac{7}{22}$ ad $0{,}0005427 \times 26\frac{1}{4}$; hoc eſt ut 7,7914 ad 1. Vel ablatâ utrinque parte illa reſiſtentiæ, quæ filo tribuenda erat, ut $7{,}7914 - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, hoc eſt ut 7,46 ad $\frac{2}{3}$; vel ut 22,38 ad 2; vel ut 11,19 ad 1. Sed ratio 11,19 ad 1 à ratione duplicatâ diametrorum $11\frac{13}{16}$, ſive 11,8125 ad 1, haud longè abeſt.

De Motu Corporum

Cùm reſiſtentia fili in Globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo, cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo Penduli, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, erat digitorum $122\frac{1}{2}$; inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo Penduli deſcenſu à nodo deſcriptus 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo, poſt oſcillationes quinque (z), ab eodem nodo deſcriptus 28 dig. Summa arcuum, ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus, 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima, ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri, $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri à nodo deſcriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri à centro Globi deſcriptum; & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo Penduli, manente longitudine arcûs deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur, & velocitas Penduli diminueretur in ratione illâ ſubduplicatâ; maneret verò arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0,4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ (aa) ad $67\frac{1}{8}$, differentia iſta 0,4475 augeretur in duplicatâ illâ ratione, ideoque evaderet 1,5295 (bb). Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quòd reſiſtentia Penduli eſſet in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo ſi Pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ (aa) digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1,5295 digitorum (bb). Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318,136 (cc). Rurſus, ubi Pendulum ſuperius ex globo ligneo conſtructum, centro oſcillationis, quod à puncto ſuſpen-

(z) Legendum omnino *Decem*. Id quod ad locum Emerſonus rectè monuit.

(aa) 124,958. Vide Not. p.

(bb) 1,5508+.

(cc) 1,5508+ × 208 = 322,575.

(dd) Vide aa.

(ee) Talem enim arcum ſcribebat Globus ligneus minor, in experimento ſexto eorum quæ omnium prima memorata ſunt.

* Nimirum in datâ fili longitudine.

(ff) Ut numeri 322,575 & 49,396 (vide Not. cc.)

(gg) Ut 0,56752 ad 0,61705. Vide ſuprà.

(hh) Ut 45,431 ad 49,396.

(ii) Ut 322,575 & 45,431 quam proximè.

ſionis

ſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ (dd) digitorum; differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptorum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ (ee); quæ ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396. Duxi autem differentias haſce in pondera Globorum, ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directè & pondera inverſè*. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318,136 & 49,396 (ff). Pars autem reſiſtentiæ Globi minoris, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675 (gg), id eſt, ut 45,453 ad 49,396 (hh); & pars reſiſtentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; ideoque partes illæ ſunt ut 318,136 & 45,453 quamproximè (ii), id eſt, ut 7 & 1 (kk). Sunt autem Globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt, ut Globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproximè. Differentia rationum haud major eſt, quàm quæ ex fili reſiſtentiâ oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum Globorum.

Cæterùm Globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfectè ſphæricus, & propterea in calculo hîc allato minutias quaſdam, brevitatis gratiâ, neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minimè ſollicitus. Optârim itaque, cùm demonſtratio Vacui ex his dependeat, ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi ſumantur in proportione geometricâ, puta quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

(kk) — ut 7, 1 *ad* 1] Nec alia veniet ratio, ſi hoc idem experimentum, in Globo ligneo majore, conferatur cum textu ſecundæ claſſis eorum, quæ in ligneo minore facta ſunt; quæ cum facillimè ad hunc modum conferatur. Arcus, quem globus minor, centro ſuo oſcillandi, in textu illo experimento, deſcribebat, digitorum erat [illegible] 122; hoc eſt 116,628. Inveniatur igitur numerus (280,998) ad quem numerus ille antè inventus 122,575 rationem habeat duplicatam ejus quam 124,958 ad 116,628. Tum inveniatur numerus (42,132) ad quem numerus 49,396 rationem habeat quam [illegible] ad [illegible]. Vires renixûs fuerint ut numeri 280,998; 42,132. Sed in experimento illo, de quo agitur, in globo minore, textu utique ſecundæ claſſis eorum quæ in illo factæ ſunt, vis tota R ad partem ρ erat ut 0,5266432 ad 0,495104 (vid. Not. [illegible]) Et 0,5266432 : 0.495104 = 42,132 : [illegible]. Et in Globo majore pars ρ toti R tantùm non æqualis erat. Vires igitur renixûs in globos ligneos, quâ parte utraque duplicatæ velocitatis rationi reſponderit, fuerint inter ſe ut numeri 280,998; 36,609. Sed 280,998 : 36,609 = 7,1 : 1.

JAM

DE MOTU CORPORUM

JAM verò conferendo reſiſtentias diverſorum Fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ; fecique ut immerſa Pendula in Medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in Tabulâ ſequente deſcripſimus; exiſtente videlicet longitudine Penduli à puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus deſcenſu primo à puncto in filo notato deſcriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia, motui amiſſo proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum in aquâ			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oſcillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oſcillationibus 535 in Aere, & $1\frac{1}{5}$ in Aquâ amiſſi ſunt. Erant quidem oſcillationes in Aere paulo celeriores quàm in Aquâ. At ſi oſcillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur, ut motus Pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oſcillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus motus idem ac priùs amitteretur; ob reſiſtentiam auctam, & ſimul quadratum temporis diminutum, in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus, motus æquales in Aere oſcillationibus 535 & in Aquâ oſcillationibus $1\frac{1}{5}$ amiſſi ſunt; ideoque reſiſtentia Penduli in Aquâ eſt ad ejus reſiſtentiam in Aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc eſt proportio reſiſtentiarum totarum in caſu columnæ quartæ.

Deſignet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum, in deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, à Globo in Aere cum velocitate maximâ V moto; & cùm velocitas maxima in caſu columnæ quartæ ſit ad velocitatem maximam in caſu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in caſu columnæ quartæ ad differentiam in caſu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ſeu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: ſcribamus

(ll) Sed ad partem illam vis renixûs in aere definiendam, quæ duplicatam velocitatis rationem ſervaverit,

bamus in his caſibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A+C=85\frac{1}{2}$; & $8A+64C=4280$; ſeu $A+8C=535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C=449\frac{1}{2}$; & $C=64\frac{3}{14}$; & $A=21\frac{2}{7}$: atque ideo reſiſtentia, cùm ſit ut $\frac{7}{11}AV+\frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V+48\frac{9}{56}V^2$. Quare in caſu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, reſiſtentia tota eſt ad partem ſuam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11}+48\frac{9}{56}$, ſeu $61\frac{12}{17}$, ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco reſiſtentia Penduli in Aquâ eſt ad reſiſtentiæ partem illam in Aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis eſt, quæque ſola in motibus velocioribus conſideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim; id eſt, ut 571 ad 1 (ll). Si Penduli in Aquâ oſcillantis filum totum fuiſſet immerſum, reſiſtentia ejus fuiſſet adhuc major; adeo ut Penduli in Aquâ oſcillantis reſiſtentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt, quæque ſola in corporibus velocioribus conſideranda venit, ſit ad reſiſtentiam ejuſdem Penduli totius, eâdem cum velocitate in Aere oſcillantis, ut 850 ad 1 circiter; hoc eſt, ut denſitas Aquæ ad denſitatem Aeris quàmproximè.

In hoc calculo ſumi quoque deberet pars illa reſiſtentiæ Penduli in Aquâ, quæ eſſet ut quadratum velocitatis, ſed (quod mirum fortè videatur) reſiſtentia in aquâ augebatur in ratione velocitatis pluſquam duplicatâ. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi; quòd arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis, præ anguſtiâ ſuâ nimis impediebat. Nam ſi Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; reſiſtentia augebatur in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Id tentabam conſtruendo Pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in Aquâ, ſuperior & major proximè ſupra aquam filo affixus eſſet; &, in Aere oſcillando, adjuvaret motum Penduli, eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in Tabulâ ſequente deſcribitur.

ſervaverit, cur non hic ut antè Newtonus poſuit $AV+BV^{\frac{3}{2}}+CV^2=D$? Nempè ſi poſuiſſet, ex tribus illis quæ in Aere facta ſunt experimentis, coefficiens A negativus prodiiſſet.

De Motu Corporum

Arcus deſcenſu primo deſcriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amiſſo proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo reſiſtentias Mediorum inter ſe, effeci etiam ut Pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter Globi penduli quaſi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè ſupra mercurium affixus erat Globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum Penduli diutiùs continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aquâ communi; ut, pendulo in Fluido utroque ſucceſſivè oſcillante, invenirem proportionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt, ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in eâ ratione ad reſiſtentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quòd in his ultimis vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine Globi immerſi. Ampliato Globo, deberet etiam Vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus, & in liquoribus tum Metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam, tam calidis quàm frigidis, repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum, celeriter motorum, denſitati Fluidorum, in quibus moventur, proportionalem eſſe quàm proximè. Non dico accuratè. Nam Fluida tenaciora, pari denſitate, proculdubio magis reſiſtunt quàm liquidiora; ut Oleum frigidum quàm calidum, calidum quàm Aqua pluvialis, Aqua quàm Spiritus Vini. Verùm in liquoribus, qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in Aere, in Aquâ ſeu dulci ſeu ſalſâ, in Spiritibus Vini,

(mm) EX EDITIONE PRIMA.

Hactenus experimentis uſi ſumus oſcillantium Pendulorum, eò quòd eorum motus faciliùs & accuratiùs obſervari, & menſurari poſſint. Motus autem Pendulorum in gyrum actorum, &, in orbem redeundo, circulos deſcribentium, propterea quòd ſint uniformes, & eo nomine ad inveſtigandam reſiſtentiam datæ velocitati competentem longè aptiores videantur, in conſilium etiam

Vini, Terebinthi & Salium, in Oleo à fæcibus per deſtillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & ſiqui ſint alii, qui tam fluidi ſunt, ut, in vaſis agitati, motum impreſſum diutiùs conſervent, effuſique liberrimè in guttas decurrendo reſolvantur; nullus dubito quin regula allata ſatis accuratè obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus, & velociùs motis, inſtituantur (m:m).

Denique cùm nonnullorum opinio ſit, Medium quoddam æthereum & longè ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrimè permeet; à tali autem Medio, per corporum poros fluente, reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externâ ſuperficie, an verò partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo, pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum Pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concavâ, ut annulus, arcu ſuo ſuperiore acie annixus, liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita conſtitutum deducebam à perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare; ne annulus, oſcillante pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram Pendulum; dein, Pendulo demiſſo, notabam alia tria loca, ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpiùs, ut loca illa quàm potui accuratiſſimè invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed priùs ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur, ac dimidio partis reliquæ, quæ inter uncum & pyxidem pen-

am adhibui. Faciendo enim ut Pendulum circulariter latum duodecies revolveretur, notavi magnitudines circulorum duorum, quos primâ & ultimâ revolutione deſcripſit. Et inde collegi velocitates corporis ſub initio & fine. Tum dicendo quòd corpus, velocitate mediocri deſcribendo circulos duodecim mediocres, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi reſiſtentiam, quâ differentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti poſſet; & reſiſtentia inventa, quanquam hujus generis experimenta minùs accuratè tentare licuit, probè tamen cum præcedentibus congruebat.

De Motu Corporum

dulam tendebatur. Nam filum tenſum dimidio ponderis ſui Pendulum, à perpendiculo digreſſum, ſemper urget. Huic ponderi addebam pondus Aeris, quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem Penduli, contrahebam filum, ut Penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac priùs. Dein Pendulo ad locum primò notatum retracto ac demiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret; totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertiò notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo, quòd reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena, ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſitâ pyxidis vacuæ, motuum ſuum oſcillatorium tanto diutiùs conſervare deberet, atque ideo completis ſemper oſcillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externâ, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur, erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota A + B erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam A + 78 B ut 77 ad 78; & diviſim A + B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A + B ad B ut 77 × 77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ, in partibus internis, quinquies millies minor quàm ejuſdem reſiſtentia in externâ ſuperficie, & ampliùs. Sic verò diſputamus ex hypotheſi quòd major illa reſiſtentia pyxidis plenæ non ab aliâ aliquâ cauſâ latente oriatur, ſed ab actione ſolâ Fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt, omittere compulſus ſum.

ſum. Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cùm unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citiùs retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quòd uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, &, ejus oſcillationibus obſequendo, in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſuprà deſcripſimus.

SECTIO VII.

De Motu Fluidorum & Reſiſtentiâ Projectilium.

PROP. XXXII. THEOR. XXVI.

Si Corporum Syſtemata duo ſimilia ex æquali particularum numero conſtent, & particulæ correſpondentes ſimiles ſint & proportionales, ſingulæ in uno ſyſtemate ſingulis in altero, & ſimiliter ſitæ inter ſe, ac datam habeant rationem denſitatis ad invicem, & inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant (eæ inter ſe quæ in uno ſunt ſyſtemate & eæ inter ſe quæ ſunt in altero) & ſi non tangant ſe mutuò quæ in eodem ſunt ſyſtemate, niſi in momentis reflexionum; neque attrahant, vel fugent ſe mutuò, niſi viribus acceleratricibus, quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſè & quadrata velocitatum directè: dico, quòd Syſtematum particulæ illæ pergent inter ſe, temporibus proportionalibus, ſimiliter moveri.

Corpora ſimilia & ſimiliter ſita temporibus proportionalibus inter ſe ſimiliter moveri dico, quorum ſitus ad invicem, in fine temporum illorum, ſemper ſunt ſimiles: puta ſi particulæ unius ſyſtematis cum alterius particulis correſpondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus ſimiles & proportionales figurarum ſimilium partes à particulis correſpondentibus deſcribuntur. Igitur ſi duo ſint ejuſmodi Syſtemata, particulæ correſpondentes, ob ſimilitudinem incœptorum motuum, pergent ſimiliter moveri, uſque donec ſibi mutuò occurrant. Nam ſi nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motûs Leg. I. Si viribus aliquibus ſe mutuò agitant, & vires illæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſè

&

De Motu Corporum

& quadrata velocitatum directè; quoniam particularum ſitus ſunt ſimiles & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correſpondentes agitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per legum Corollarium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inverſè, & quadrata velocitatum directè: & propterea efficient, ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt (per Corol. 1 & 8. Prop. IV. Lib. 1.) ſi modò centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter ſyſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris, quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos; & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuò inciderint, & ſic deinceps in infinitum. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad Syſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum ſyſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ Syſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuò in utroque ſyſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas, ſimili cum motu, utcunque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis ſyſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque ideo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PROP.

PROP. XXXIII. THEOR. XXVII.

Eſdem poſitis, dico, quòd Syſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum ſuarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione denſitatis partium ſyſtematum.

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis, quibus particulæ ſyſtematum ſe mutuò agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut vires totæ motrices à quibus oriuntur; id eſt, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus; hoc eſt (per hypotheſin) ut quadrata velocitatum directè, & diſtantiæ particularum correſpondentium inverſè, & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus directè: ideoque, cùm diſtantiæ particularum ſyſtematis unius ſint ad diſtantias correſpondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in ſyſtemate priore ad diametrum particulæ vel partis correſpondentis in altero, & quantitates materiæ ſint ut denſitates partium & cubi diametrorum; reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium ſyſtematum. Q. E. D. Poſterioris generis reſiſtentiæ ſunt ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè, & ſpatia inter earum reflexiones inverſè. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur ſi Syſtemata illa ſint Fluida duo Elaſtica, ad modum Aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia, & partibus Fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur; vires autem accele-

ratrices, quibus particulæ Fluidorum ſe mutuò agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inverſè, & quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in Fluidis, & ſpatia ſimilia, ac diametris ſuis proportionalia, deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido Projectile velox reſiſtentiam patitur, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuò agitant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, reſiſtentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur Media tria A, B, C, ex partibus ſimilibus, & æqualibus, & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpoſitis, conſtantia. Partes Mediorum A & B fugiant ſe mutuò viribus quæ ſint ad invicem ut T & V; illæ Medii C ejuſmodi viribus omninò deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia D, E, F, G in his Mediis moveantur; priora duo D & E in prioribus duobus A & B, & altera duo F & G in tertio C: ſitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E, & velocitas corporis F ad velocitatem corporis G in ſubduplicatâ ratione virium T ad vires V: reſiſtentia corporis D erit ad reſiſtentiam corporis E, & reſiſtentia corporis F ad reſiſtentiam corporis G, in velocitatum ratione duplicatâ; & propterea reſiſtentia corporis D erit ad reſiſtentiam corporis F ut reſiſtentia corporis E ad reſiſtentiam corporis G. Sunto corpora D & F æquivelocia, ut & corpora E & G; & augendo velocitates corporum D & F in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum Medii B in eâdem ratione duplicatâ, accedet Medium B ad formam & conditionem Medii C pro libitu; & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium E & G in his Mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quàm data quævis. Proinde cùm reſiſtentiæ corporum D & F ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum E & G, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D & F, ubi velociſſimè moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quàm proximè: & propterea cùm reſiſtentia corporis F ſit in duplicatâ ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis D in eâdem ratione quàm proximè.

Corol.

Corol. 3. Corporis in Fluido quovis Elaſtico velociſſimè moti eadem ferè eſt reſiſtentia, ac ſi partes Fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuò non fugerent: ſi modo Fluidi vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna ſit, ut vires non habeant ſatis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cùm reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes diſtantes ſe mutuò non fugiunt, ſint ut quadrata diametrorum; ſunt etiam æquivelocium & celerrimè motorum corporum reſiſtentiæ, in Fluido Elaſtico, ut quadrata diametrorum quàm proximè.

Corol. 5. Et cùm corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuò non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motûs quantitatem imprimant, & viciſſim (per motûs Legem Tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſtum eſt etiam, quòd in ejuſdem denſitatis Fluidis Elaſticis, ubi velociſſimè moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quàm proximè; ſive Fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex Medii ſubtilitate reſiſtentia Projectilium, celerrimè motorum, non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita ſe habent in Fluidis, quorum vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quòd ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis cauſâ, quâ motus particularum inter ſe redduntur minùs liberi: reſiſtentia, ob minorem Medii Fluiditatem, erit major quàm in ſuperioribus Corollariis.

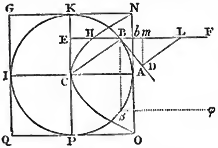
PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.

Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in Medio Raro, ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias liberè diſpoſitis conſtante, ſecundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia Globi duplo minor quàm reſiſtentia Cylindri.

Nam quoniam actio Medii in corpus eadem eſt (per Legum Corol.

De Motu Corporum

rol. 5.) ſive corpus in Medio quieſcente moveatur, ſive Medii particulæ, eâdem cum velocitate, impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus, quo impetu urgebitur à Medio movente. Deſignet igitur ABKI corpus Sphæricum, centro C, ſemidiametro CA deſcriptum; & incidant particulæ Medii, datâ cum velocitate, in corpus illud Sphæricum, ſecundum rectas ipſi AC parallelas: ſitque FB ejuſmodi recta. In eâ capiatur LB ſemidiametro CB æqualis, & ducatur BD quæ ſphæram tangat in B. In KC & BD demittantur perpendiculares BE, LD; & vis, quâ particula Medii, ſecundum rectam FB obliquè incidendo, Globum ferit in B, erit ad vim, quâ particula eadem Cylindrum ONGQ, axe ACI circa Globum deſcriptum, perpendiculariter feriret in *b*, ut LD ad LB, vel BE ad BC. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum Globum, ſecundum incidentiæ ſuæ



plagam FB vel AC, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum Globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ BC quâ Globum directè urget, ut BE ad BC ([a]). Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ in Globum ſecundum rectam FB obliquè incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in Cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare ſi in *b*E, quæ perpendicularis eſt ad Cylindri baſem circularem, NAO, & æqualis radio AC, ſumatur

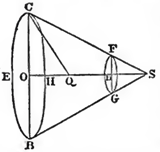
([a]) Nam à puncto D in rectam BL rectâ D*m* ad perpendiculum demiſſâ, vis DL in duas L*m*, *m*D reſolvitur, quarum illa L*m*, cum axe AC parallela, motui corporis ſecundum axem adverſatur. Pars altera MD, cum rectâ KP parallela, motum aliquem in corpore ſecundum rectam illam excitaret, niſi effectus ejus vi æquali et contrariâ tolleretur, à corpuſculo illo oriundâ, quod ſuperficiei ſphæricæ in puncto β impinget, ubi recta à B in axem AC ad perpendiculum demiſſa cum ſuperficie ſphæricâ iterum concurrit. Vis igitur totius LB, pars BD tollitur per ſuperficiei figuram. Reliquæ LD pars D*m* tollitur per vim contrariam corpuſculi puncto β impingentis. Relinquitur ſola vis L*m*, quæ, in impetu corporis reſtinguendo, effectum ſuum edere poſſit. Hæc autem L*m* ad totam LB rationem habet ejus quam recta LD ad rectam LB duplicatam. Ac proinde, in Sphærâ, duplicatam ejus quam BE habet ad CB. Et in omni Solido rotundo (Rotundum dico quod tali figurâ ſit præditum, ut plana omnia, quæ ſuper rectâ quâdam poſitione datâ, quam axem voco, ad perpendiculum erigantur, ſuperficiem ſolidi ſecando, circulos effecerint), in omni inquam iſtius modi Solido, quod per materiam aliquam fluidam raram, undique uniformem, ſecundum axis ſui directionem progrediatur, par erit ratio vis renixûs, quam ſuperficiei pars quæque percipiet.

Nempe

ſumatur *b*H æqualis $\frac{\text{BE quad.}}{\text{CB}}$: erit *b*H ad *b*E ut effectus particulæ in Globum ad effectum particulæ in Cylindrum. Et propterea Solidum, quod à rectis omnibus *b*H occupatur, erit ad Solidum, quod à rectis omnibus *b*E occupatur, ut effectus particularum omnium in Globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed Solidum prius eſt Parabolois, vertice C, axe CA, & latere recto CA deſcriptum ([b]); & Solidum poſterius eſt Cylindrus Paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt, quòd Parabolois ſit ſemiſſis Cylindri circumſcripti. Ergo vis tota Medii in Globum eſt duplo minor quàm ejuſdem vis tota in Cylindrum. Et propterea ſi particulæ Medii quieſcerent, & Cylindrus ac Globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia Globi duplo minor quàm reſiſtentia Cylindri. Q. E. D. LIBER SECUNDUS.

Scholium.

Eâdem methodo Figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt; eæque inveniri, quæ ad motus ſuos, in Mediis reſiſtentibus, continuandos aptiores ſunt.



Ut ſi baſe circulari CEBH, quæ centro O, radio OC deſcribitur, & altitudine OD, conſtruendum ſit fruſtum Coni ([c]) CBGF, quod omnium, eâdem baſi & altitudine conſtructorum, & ſecundum plagam axis ſui verſus D progredientium fruſtorum, minimè reſiſtatur: biſeca altitudinem OD in Q, & produc OQ ad S, ut ſit QS æqualis QC; & erit S vertex coni cujus fruſtum quæritur ([d]).

Unde

Nempe ut vis corpuſculi cujuſque, quod in punctum quodpiam B impingat, ad motum corporis reſtinguendum, ad vim quâ idem corpuſculum polleret, ſi eâdem cum velocitate ſuperficiem ad perpendiculum feriret, eam rationem habeat quæ duplicata ſit ejus quam ſinus anguli LBD, obliquitatis utique ictûs in loco B, ad radium habet.

([b]) NAM cùm rectangulum CB × *b*H, ſive CA × *b*H, quadrato ex BE æquale ſit, hoc eſt, rectangulo KE × EP, ſive N*b* × *b*O, idcirco punctum H erit ad Parabolam, vertice C, axe CA, parametro quæ datæ CA ſit æqualis, in plano rectanguli CN ſcribendam. Ac proinde, plano illo poſitione non dato, ad ſuperficiem Paraboloideos, converſione talis Parabolæ circa axem CA, poſitione datum, generandam.

([c]) Recti ſcilicet.

([d]) VIS renixûs quam ſuperficies Coni recti SCB, cujus vertex S, baſis circulus CEBH, percipiet, ad eam quam Cylindrus Rectus perciperet, qui eundem circulum baſim haberet, ſi eâdem cum velocitate quâ conus, per ſimilem materiam fluidam, ſecundum axem OS Coni et Cylindri commu-

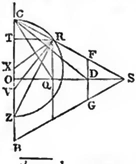
nem

De Motu Corporum

Unde obiter, cùm angulus CSB ſemper ſit acutus, conſequens eſt, quòd ſi Solidum ADBE convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis, ADBE, circa axem AB factâ generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus, FG, GH, HI, in punctis F, B & I; eâ lege, ut GH ſit perpendicularis ad axem in puncto contactûs B, & FG, HI cum eâdem GH contineant angulos, FGB, BHI, graduum 135; Solidum, quod convolutione figuræ ADFGHIE circa axem eundem AB generatur, minùs reſiſtitur quàm Solidum prius; ſi modò utrumque ſecundum plagam axis ſui AB progrediatur, & utriuſque terminus B præcedat. Quam quidem Propoſitionem in conſtruendis Navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.

Quòd ſi figura DNFG ejuſmodi ſit Curva, ut, ſi ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto

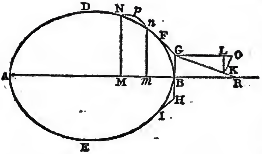
nem ferretur, eam rationem habet, quam quadratum ex CO ad quadratum ex CS. Id enim ex iis quæ ſuprà oſtendimus (Not. [a]) quivis opinor intelliget. Similiter vis renixûs, quam ſuperficies Coni SFG percipiet, ad vim quam perciperet Cylindrus, cujus baſis circulus FG, rationem habet quam quadratum ex FD ad quadratum ex FS, ſive eam quam quadratum ex CO ad quadratum ex CS. Hinc ſi vis renixûs, quam Cylindrus, baſi circulo CEBH, ſuſtineret, exponatur per CO^2, erit FD^2 vis renixûs quam Cylindrus baſe FG perciperet, ſi eadem cum velocitate, quâ alter cylindrus, ferretur: erit autem $CO^2 \times \frac{CO^2}{CS^2}$ vis quam ſuperficies Coni SCB, et $FD^2 \times \frac{CO^2}{CS^2}$ vis quam ſuperficies Coni minoris SFG percipiet. Unde vis illa quam ſuperficies conica, circulis FG, CB intercepta, percipiet, ea erit $\overline{CO^2 - FD^2} \times \frac{CO^2}{CS^2}$. Sed vis renixûs quam fruſtum conicum GFCB percipiet, ea componetur ex vi illâ, quàm ſuperficies conica circulis FG, CB interjecta perceperit, et ex illâ quam circulus minor FG. Hæc ita ſe habent, ſi fruſtum conicum FCBG, ſecundum directionem axis ſui progrediatur, antecedente utique circulo anguſtiore FG. Erit igitur vis renixus quam fruſtum Coni percipiet, ut $\overline{CO^2 - FD^2} \times \frac{CO^2}{CS^2} + FD^2$. Secetur Conus SCB plano per axem; quod in baſe et ſuperficie Conicâ triangulum SBC efficiat, & in plano circuli minoris rectam FG. Per Q agatur QR cum baſium diametris, CB, FG, parallela; quæ coni lateri SC in R occurrat. Et agatur RT cum axe SO parallela, quæ rectæ BC in T occurrat. Propter æquales OQ, QD, è tribus rectis CO, RQ, FD, media RQ eâdem differentiâ minimam FD exſuperabit, quâ ipſa à maximâ CO exſuperata eſt. Erit igitur $2RQ = CO + FD$. Et $CO - FD = 2CT$. Quare $4RQ \times CT = \overline{CO + FD} \times \overline{CO - FD} = CO^2 - FD^2$. Hinc vis renixûs, quam fruſtum conicum percipiet, exponetur per $4RQ \times CT \times \frac{CO^2}{CS^2} + \overline{CO - 2CT}|^2$. Hoc eſt, quoniam $CO^2 : CS^2 = CT^2 : CR^2$, per $\frac{4RQ \times CT^3}{CR^2} + \overline{CO - 2CT}|^2$. Vel ſi CT deſignetur litera x; OQ, vel TR, literâ a; OC literâ b; vis renixûs in fruſtum conicum erit



$$\text{ut } \frac{\overline{4b - 4x}.x^3}{a^2 + x^2} + \overline{b - 2x}|^2 = \frac{4bx^3 - 4x^4 + b^2a^2 - 4ba^2x + 4a^2x^2 + b^2x^2 - 4bx^3 + 4x^4}{a^2 + x^2} =$$

$$= \frac{b^2a^2 + {+4a^2 \atop +b^2} x^2 - 4ba^2x}{a^2 + x^2}. \text{ Et hujus fluxio } = \frac{{+8a^2 \atop +2b^2} x\dot{x} - 4ba^2\dot{x}}{a^2 + x^2} - \frac{2b^2a^2x\dot{x} + {+8a^2 \atop +2b^2} x^3\dot{x} - 8ba^2x^3\dot{x}}{\overline{a^2 + x^2}|^2} = \dot{x} \times$$

$8a^4x +$



to dato G ducatur recta GR, quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum ſecet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad 4BR × GB*q*; Solidum, quod figuræ hujus revolutione circa axem AB factâ deſcribitur, in Medio Raro prædicto ab A verſus B movendo, minùs reſiſtetur, quàm aliud quodvis, eâdem longitudine & latitudine deſcriptum, Solidum circulare (c).

P R O P.

$\frac{8a^4x+4ba^2x^2-4ba^4}{\overline{a^2+x^2}|^2}$.

Ut vis renixûs in fruſtum minima fiat, hæc fluxio nihilo æquanda eſt. Et ex hâc fluxione nihilo æquatâ veniet, $4ba^2x^2+8a^4x-4ba^4=0$. Unde etiam $x^2+\frac{2a^2}{b}x=a^2$. Ex hâc denique æquatione facilè efficitur rectarum QS, QC inter ſe æqualitas. Junctâ enim CD, conſtituatur angulus TRV angulo DCO æqualis. Et propter angulos ad T, O rectos, triangula VTR, DOC erunt inter ſe ſimilia; et VT erit ad TR vel a, ut DO vel $2a$ ad OC, vel b. Quare VT $=\frac{2a^2}{b}$. Et x^2+ VT$\cdot x=a^2$; hoc eſt CT^2 + VT × TC, ſive VC × CT = TR^2. Si igitur capiatur TZ æqualis illi VC, rectangulum ZT × TC quadrato ex TR æquale erit; junctâque ZR, angulus ZRC erit rectus. Punctum igitur R erit ad ſemicirculum, diametro CZ conſtitutum. Et ſi CZ in puncto X media dividatur, juncta XR utrique XC, XZ æqualis erit. Triangulum igitur XRZ iſoſceles erit, et anguli XRZ, XZR erunt inter ſe æquales. Sed propter æquales CV, TZ, erunt CT, VZ inter ſe æquales. Unde propter æquales etiam XC, XZ, erunt XT, XV inter ſe æquales. Quare VX ſemiſſis erit rectæ VT. Sed et DQ ſemiſſis rectæ DO. Quare VX eſt ad VT ut DQ ad DO. Sed propter triangula COD, RTV inter ſe ſimilia, anguloſque eorum ad D et V, O et T ſingulatim inter ſe æquales; erit VT ad VR ut DO ad DC. Ex æquo igitur VX erit ad VR ut DQ ad DC. Triangula igitur XVR, QDC inter ſe ſimilia, et anguli XRV, DCQ inter ſe æquales erunt. Rurſum propter angulos ZRC, RTZ rectos, angulus RZT angulo CRT, ac propterea angulo CSD, æqualis erit. Sed et angulus RVT angulo CDO. Hoc eſt RZV + VRZ = CSD + DCS. Quare et VRZ, DCS inter ſe æquales. Totus igitur XRZ, ex illis XRV, VRZ compoſitus, toti QCS, ex illis DCQ, DCS compoſito, æqualis erit. Sed XRZ oſtenſus eſt æqualis illi XZR, cui etiam CSD, ſive QSC. Anguli igitur QCS, QSC inter ſe æquales. Quare et rectæ QC, QS inter ſe æquales. Q. E. D.

Cor. II. Hinc fruſtum Coni recti tenuiſſimum, cui ſecundum axis ſui directionem progrediendum eſt, minimum impedimenti à renixu materiæ circumfuſæ percipiet, ſi angulus ad verticem Coni, à quo fruſtum fuerit reciſum, rectus fuerit. Hoc eſt ſi latera Coni angulos ſemirectos cum baſium diametris faciant.

Nam ſi fruſtum Coni recti, FCBG, tale ſit, cui, ſecundum axem progredienti, renixus materiæ circumfuſæ minimum impedimenti afferat, erunt QS, QC inter ſe æquales, et anguli QSC, QCS inter ſe æquales. Et evaneſcente fruſti altitudine OD, rectarum QS, QC, angulorumque QSC, QCS inter ſe æqualitas uſque manebit. At verò altitudine illâ OD in nullam tandem redactâ, angulus QCO in nihilum abierit, et angulus QCS in totum OCS ultimò creverit. Fient igitur anguli OCS, OSC ultimò inter ſe æquales. Quapropter, cùm rectus ſit angulus ad O, illorum OSC, OCS uterque ſemirectus erit. Q. E. D.

(c) Nimirum ſi tale ſit Solidum, converſione Curvæ NFG circum axem AB genitum, quod, ſecundum axem illum progrediendo, minus impedimenti ex renixu materiæ circumfuſæ percipiat, quàm aliud quodcunque Solidum rotundum, quod cùm eundem habeat axem, eandem axis longitudinem, eoſdemque circulos extremos, pari cum velocitate ſecundum axis directionem feratur:

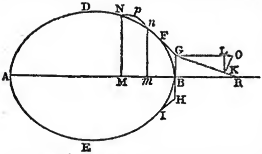
ſi

PROP. XXXV. PROB. VII.

Si Medium Rarum ex particulis quàm minimis quieſcentibus, æqualibus, & ad æquales ab invicem diſtantias liberè diſpoſitis conſtet: invenire reſiſtentiam Globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Caſ. 1. Cylindrus, eâdem diametro & altitudine deſcriptus, progredi intelligatur, eâdem velocitate, ſecundum longitudinem axis ſui, in eodem Medio. Et ponamus, quòd particulæ Medii, in quas Globus vel Cylindrus incidit, vi reflexionis quàm maximâ reſiliant. Et cùm reſiſtentia Globi (per Propoſitionem noviſſimam)

ſi talè inquam, ſit Solidum converſione Curvæ NFG circa axem ABG genitum, ſuperficies ejus convexa vim renixûs omni parte minùs percipiet, quàm aliùs cujuſvis Solidi convexa ſuperficies, quâ parte circulis eiſdem hinc inde intercepta eſt. Nempe hoc dico. Sint MN, *mn* duæ quælibet Curvæ NFG ordinatæ. Per puncta N, *n*, ducatur Curvæ quævis N*pn*, à Curvâ NFG diverſa. Superficies convexa, quam, converſione ſui circa axem AB, arcus N*n* generaverit, vim renixûs minùs ſentiet, quàm alia illa ſuperficies convexa, quam arcus N*pn* unà converſus generaverit. Nam ſi aliter ſe res habeat, omninò Solidum, converſione figuræ N*pn*FG genitum, vim renixûs minùs, vel non magis, percipiet, quàm illud, quod unum ex omnibus quàm minimè eam percipere poſuimus. Quod eſt abſurdum. Superficies igitur, quam Curvæ NFG arcus N*n* generaverit, vim renixûs una ex omnibus, quæ circulis



quorum radii ſunt MN, *mn* intercipiantur, quàm minimè percipiet: idque in omni circulorum illorum diſtantiâ, magna illa parvave fuerit. Accedat igitur Ordinata *mn* illam MN, ut diſtantia M*m*, ſenſim evaneſcens in nihilum ultimò abeat. Corpuſcula omnia, quæ ſuperficiei ab arcu evaneſcente N*n* genitæ ultimò impingunt, vi æquali eam feriunt, cùm omnium ſimiles ultimò ſint obliquitates. Quare vis, quam ſuperficies illa evaneſcens ultimò percipiet, erit ut corpuſculorum numerus et ſingulorum vis conjunctim. Agatur per G recta GO cum axe AB parallela. Et capiatur GO datæ cujuſvis longitudinis. A puncto O in rectam GR deducatur ad perpendiculum recta OK; et à puncto K in rectam GO ad perpendiculum deducatur KL. Cùm angulus OGK ſit obliquitas, quâ corpuſcula materiæ fluidæ Solidi ſuperficiei in loco N impingunt, erit vis uniuſcujuſque, ibi loci impingentis, ad vim quâ pollerent ſingula ad perpendiculum incurſantia, ut recta LO ad datam GO (Not. [a].) Numerus autem eorum, quæ ſuperficiei, evaneſcente arcu N*n* genitæ, impingunt, eſt ultimò ut circuitus circuli cujus radius MN; hoc eſt, ut recta ipſa MN. Vis igitur, quam ſuperficies illa evaneſcens ultimò percipiet, erit ut rectangulum $MN \times LO$. Cùm igitur ſuperficies illa una ex omnibus, quæ circulis quorum radii MN, *mn* intercipiantur, vim renixûs quàm minimè ſemper percipiat; ad naturam Curvæ NFG definiendam, illud diſquirendum eſt, quænam ejus figura eſſe oporteat, ut in omni datâ magnitudine rectæ MN, rectangulum $MN \times LO$ minimum ſit. At verò minimum fiet rectangulum illud, exſiſtente LO minimâ. Eſt autem LO ad OG ut OK^2 ad OG^2. Et propter angulos ad K et R rectos, anguloſque OGK, GRB inter ſe æquales, triangula OGK, GRB erunt inter ſe ſimilia, et OK^2 erit ad OO^2 ut OB^2 ad GR^2. Quare LO erit ad OG ut GR^2 ad GR^2. Solidum igitur $LO \times GR^2$ dato Solido $OG \times OB^2$ æquale. Ac proinde minimâ exſiſtente LO erit GR maxima. Sed maximâ exſiſtente GR propter datam GB, erit BR quoque maxima. Quare minimâ exſiſtente LO, erit BR maxima. Et ſi litera *a* rectam quandam magnitudine ſtabilem deſignet, minimo exſiſtente rectangulo $MN \times LO$, rectangulum $a \times BR$ maximum erit. Ac proinde rectangulorum illorum differentia maxima vel minima, prout exceſſus pe-

mam) ſit duplo minor quàm reſiſtentia Cylindri, & Globus ſit ad Cylindrum ut duo ad tria; & Cylindrus, incidendo perpendiculariter in particulas ipſaſque quàm maximè reflectendo, duplam ſui ipſius velocitatem ipſis communicet: Cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis ſui uniformiter progrediendo deſcribit, communicabit motum particulis, qui ſit ad totum Cylindri motum ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri; & Globus, quo tempore totam longitudinem diametri ſuæ uniformiter progrediendo deſcribit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, communicabit motum particulis, qui ſit ad totum Globi motum ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Et propterea Globus reſiſtentiam patitur,

nes hoc vel illud fuerit. Hoc eſt ſpatium $a \times BA - MN \times LO$ maximum, vel $MN \times LO - a \times BR$ minimum. Illud igitur nos diſquirere oportet, quænam Curvæ NFO figura efficiat, ut rectangulorum illorum differentia maxima vel minima ſit. Hunc in finem ponatur $a \times \dot{\overline{BR}} - MN \times \dot{\overline{LO}} = 0$. Erit igitur MN ad a ut $\dot{\overline{BR}}$ ad $\dot{\overline{LO}}$. Sed propter Solidum $LO \times GR^2$ magnitudine datum, Solida $\dot{\overline{LO}} \times GR^2$, $\dot{\overline{2GR}}.GR.LO$ inter ſe æqualia erunt. Unde $\dot{\overline{LO}}$ erit ad $\dot{\overline{OR}}$ ut $2LO$ ad GR. Rurſum propter quadratum ex GR duobus è GB, BR æquale, quorum illud è OB datum eſt; erunt rectangula $GR \times \dot{\overline{GR}}$, $BR \times \dot{\overline{BR}}$ inter ſe æqualia. Quare $\dot{\overline{GR}}$ erit ad $\dot{\overline{BR}}$ ut BR ad GR. Cùm igitur ſit $\dot{\overline{LO}} : \dot{\overline{GR}} = 2LO : GR = 2LO \times BR : BR \times GR$; et $\dot{\overline{GR}} : \dot{\overline{BR}} = BR : GR = BR \times GR : GR^2$; ex æquo erit $\dot{\overline{LO}}$ ad $\dot{\overline{BR}}$ ut $2LO \times BR$ ad GR^2. At vero a erat ad MN ut $\dot{\overline{LO}}$ ad $\dot{\overline{BR}}$. Quare a erit ad MN ut $2LO \times BR$ ad GR^2. Ut verò hoc ſemper obtineat in omni magnitudine rectæ MN, manente magnitudine rectæ a; illa a haud pro arbitrio, ſed certæ ſumenda erit longitudinis. Quæ qualis eſſe debeat, exploremus. Puta MN in locum B transferri, ut ſit $MN = BG$. Talis igitur ſumenda eſt a, quæ ſit ad BG ut $2LO \times BA$ ad GR^2. At vero ordinata BG ad Curvam NFO neceſſe eſt angulo ſemirecto inclinata ſit. Aliter enim Solidum, converſione ejus Curvæ circa axem AB genitum, & ad circulum, cujus radius BG, terminatum, minimè illud erit, quod, ſecundum axis AB directionem progrediendo, minimum impedimenti à renixu materiæ circumfuſæ percipiet. (Vide Not. [d], Cor.) Sed tale illud Solidum poſuimus. Ordinata igitur BO angulo ſemirecto ad Curvam inclinata eſt. Angulus igitur BGR, congruente MN cum BG, fit ſemirectus. Rectæ igitur GB, BR fient inter ſe æquales, et quadratum ex GR duplum erit quadratum ex GB. Talis igitur ſumenda erit a, quæ ſit ad BO ut $2LO \times GB$ ad $2GB^2$, hoc eſt ut LO ad GB. Igitur ſumenda erit illa a æqualis rectæ LO, qualis utique illa fit, quando angulus BGR eſt ſemirectus. Tunc verò, propter triangula GOK, RGB ſemper inter ſe ſimilia, angulus KOG ſemirectus, et LO ſemiſſis erit rectæ GO. Quare a ſumenda erit datæ GO ſemiſſis. Et ſi talis ſumatur a, erit ſemper a ad MN ut $2LO \times BR$ ad GR^2. Hoc eſt $\frac{1}{2}GO$ erit ad MN ut $2LO \times BR$ ad GR^2. Invertendo MN ad $\frac{1}{2}GO$ ut GR^2 ad $2LO \times BR$. Quare $MN \times OR$ erit ad $\frac{1}{2}GO \times GR$ ut GR^2 ad $2LO \times BR$. Permutando MN erit ad GR ut $\frac{1}{2}GO \times GR$ ad $2LO \times BR$, ſive ut $GR \times GO$ ad $4BR \times LO$. Habebit igitur MN ad OR rationem eam, quæ componitur è rationibus rectæ GR ad 4BR rectæque GO ad LO. Sed ratio rectæ GO ad LO eadem eſt, quæ quadrati ex GR ad quadratum ex GB. Id enim ſuprà nos oſtendimus. Ratio igitur rectæ MN ad rectam GR componitur è rationibus rectæ OR ad 4BR, quadratique ex GR ad quadratum ex GB. Sed ex eiſdem compoſita eſt ratio Cubi ex OR ad Solidum $4BR \times GB^2$. Quare $MN : GR = OR^3 : 4BR \times GB^2$, ſicut Newtonus pronunciavit. Q. E. D.

Reconditiſſimi Problematis, quod viros ingenio præſtantiſſimos, Fatium, Craigium, Hoſpitalium, Bernouillium, alioſque exercuit, ſi quid aut lucis aut elegantiæ præ aliis noſtra fortè enodatio habeat, illud omne ſummo viro Maclaurino referendum eſt. Qui, ſi non eandem, ſimillimam certè in eximio ſuo Opere De Fluxionibus hujus Problematis reſolutionem attulit. *(Vide Treatiſe of Fluxions by Colin Maclaurin*, § 606 & 607.)

quæ

quæ ſit ad vim, quâ totus ejus motus vel auferri poſſit, vel generari, quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ uniformiter progrediendo deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

Caſ. 2. Ponamus quòd particulæ Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus, incidendo perpendiculariter in particulas, ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque reſiſtentiam patitur duplo minorem quàm in priore caſu; & reſiſtentia Globi erit etiam duplo minor quàm priùs.

Caſ. 3. Ponamus quòd particulæ Medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, ſed mediocri aliquâ reſiliant à Globo; & reſiſtentia Globi erit in eâdem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc ſi Globus & particulæ ſint infinitè dura, & vi omni elaſticâ, & propterea etiam vi omni reflexionis, deſtituta: reſiſtentia Globi erit ad vim, quâ totus ejus motus vel auferri poſſit, vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

Corol. 2. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas Medii.

Corol. 5. Reſiſtentia Globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicatâ ratione diametri & ratione denſitatis Medii (f).

Corol. 6. Et motus Globi, cum ejus reſiſtentiâ, ſic exponi poteſt. Sit AB tempus, quo Globus, per reſiſtentiam ſuam uniformiter

(e) Vis renixus dicatur a. Diameter globi d. Velocitas globi c. Tempus, quo velocitate c ſpatium $\frac{4}{3}d$ confecerit, dicatur T. Vis, quâ, tempore T, motus globi, celeritate c lati, vel generari vel extingui poſſit, dicatur V. Denſitas materiæ fluidæ dicatur D, globi Δ.

Jam ex hac Propoſitione $R : V = D : \Delta$. Quare $R = \frac{V \times D}{\Delta}$. Sed V erit ut $\frac{d^3 \times \Delta \times c}{T}$. Et T erit ut $\frac{\frac{4}{3}d}{c}$. Quare V erit ut $\frac{d^3 \times \Delta \times c^2}{\frac{4}{3}d}$, hoc eſt ut $d^2 \times \Delta \times c^2$. Hinc autem R $\left(= \frac{V \times D}{\Delta}\right)$ erit ut $d^2 \times c^2 \times D$. Quod eſt Corollarium Quintum Newtoni.

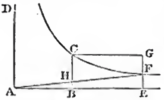
Datis autem d, et c, erit a ut D: quod eſt Quartum Newtoni Corollarium.

Et datis D et c, erit R ut d^2: quod Tertium eſt Newtoni Corollarium.

Et datis d et D erit R ut c^2: quod eſt Secundum Newtoni Corollarium.

(f) Modò illud intelligatur, quod ſatis apertum eſt, rectam CB ad BH rationem habere duplicatam

miter continuatam, totum ſuum motum amittere poteſt. Ad AB erigantur perpendicula AD, BC. Sitque BC motus ille totus, & per punctum C, Aſymptotis AD, AB, deſcribatur Hyperbola CF. Producatur AB ad punctum quodvis E. Erigatur perpendiculum EF, hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum CBEG, & agatur AF ipſi BC occurrens in H. Et ſi Globus, tempore quovis BE, motu ſuo primo BC uniformiter continuato, in Medio non reſiſtente, deſcribat ſpatium CBEG per aream parallelogrammi expoſitum; idem, in Medio reſiſtente, deſcribet ſpatium CBEF per aream hyperbolæ expoſitum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam EF, amiſſâ motûs ejus parte FG. Et reſiſtentia ejus in fine temporis ejuſdem exponetur per longitudinem BH, amiſſâ reſiſtentiæ parte CH. Patent hæc omnia per Corol. 1 & 3. Prop. V. Lib. II (g).



Corol. 7. Hinc ſi Globus, tempore T, per reſiſtentiam R uniformiter continuatam, amittat motum ſuum totum M: idem Globus, tempore t, in Medio reſiſtente, per reſiſtentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decreſcentem, amittet motûs ſui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$; & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium motu uniformi M, eodem tempore t, deſcriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$: propterea quòd area hyperbolica BCFE eſt ad rectangulum BCGE in hâc proportione (h).

Scholium.

catam ejus, quam eadem CE habet ad EF. Namque propter hyperbolam erit CB ad EF ut AE ad AB. Et propter rectas EF, BH inter ſe parallelas, erit AE ad AB ut EF, BH. Quare erit CB ad EF ut EF ad BH.

(h) NEMPE ſi AB dicatur T; CE, M; BF, t; erit EF, pars motûs reliqua, $= \frac{AB \times BC}{AE} = \frac{TM}{T \times t}$. Unde FG, pars motûs amiſſa, $= M - \frac{TM}{T \times t} = \frac{tM}{T \times t}$.

Rurſum, ſi pro Modulo logarithmorum ex hyperbolâ CF, ponatur 1, et B pro Modulo Briggiano, erit CBEF ad logarithmum numeri $\frac{T \times t}{T}$ Briggianum ut 1 ad B. Unde CBEF $=$ Log. $\frac{T \times t}{T} \times \frac{1}{B}$. Sed $\frac{1}{B} = 2{,}302585092994$, vid. Coteſ. Harmon. Menſ. Prop. II. Quare CBEF $=$

Scholium.

In hâc Propoſitione expoſui reſiſtentiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis; & oſtendi, quòd hæc reſiſtentia ſit ad vim, quâ totus Globi motus vel tolli poſſit, vel generari, quo tempore Globus duas tertias diametri ſuæ partes velocitate uniformiter continuatâ deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi, ſi modò Globus & particulæ Medii ſint ſummè elaſtica, & vi maximâ reflectendi polleant: quòdque hæc vis ſit duplo minor, ubi Globus & particulæ Medii ſunt infinitè dura, & vi reflectendi prorſus deſtituta. In Mediis autem Continuis, qualia ſunt Aqua, Oleum calidum, & Argentum Vivum, in quibus Globus non incidit immediatè in omnes Fluidi particulas reſiſtentiam generantes, ſed premit tantùm proximas particulas, & hæ premunt alias, & hæ alias; reſiſtentia eſt adhuc duplo minor. Globus utique, in hujuſmodi Mediis fluidiſſimis, reſiſtentiam patitur, quæ eſt ad vim, quâ totus ejus motus vel tolli poſſit, vel generari, quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Id quod in ſequentibus conabimur oſtendere.

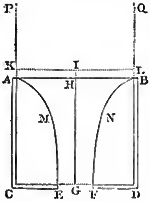
PROP. XXXVI. PROB. VIII.

Aquæ de vaſe Cylindrico, per foramen in fundo factum, effluentis definire motum (i).

Sit ACDB vas Cylindricum; AB, ejus orificium ſuperius; CD fundum horizonti parallelum; EF, foramen circulare in medio fundi; G centrum foraminis; & GH, axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge Cylindrum glaciei APQB ejuſdem eſſe latitudinis cum cavitate vaſis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuò deſcendere; & partes ejus, quàm primùm attingunt ſuperficiem AB, liqueſcere, &, in aquam converſas, gravitate ſuâ defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ ABNFEM cadendo formare, & per foramen EF tranſire, idemque adæquatè

Log. $\frac{T \times t}{T} \times 2,302585092994$. Rectangulum autem $BG = tM$. Sed propter $AB \times BC$, ſive TM, $= 1$ erit $M = \frac{1}{T}$. Quare $BG = \frac{t}{T}$. Quare $CBEF : BG =$ Log. $\frac{T \times t}{T} \times 2,302585092994 : \frac{t}{T}$.

implere.



implere. Ea verò ſit uniformis velocitas Glaciei deſcendentis, ut & Aquæ contiguæ in circulo AB, quam aqua, cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IH, acquirere poteſt; & jaceant IH & HG in directum, & per punctum I ducatur recta KL horizonti parallela, & lateribus Glaciei occurrens in K & L. Et velocitas aquæ, effluentis per foramen EF, ea erit, quam aqua, cadendo ab I & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirere poteſt. Ideoque, per Theoremata *Galilæi*, erit IG ad IH in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo AB; hoc eſt, in duplicatâ ratione circuli AB ad circulum EF; nam hi circuli ſunt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipſos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquatè tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſus hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cùm non oriatur à gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hîc non conſideratur. Supponimus quidem, quòd partes aquæ aliquantulum cohærent, &, per cohæſionem ſuam, inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos; ut unicam tantùm efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: ſed motum horizonti parallelum, à cohæſione illâ oriundum, hîc non conſideramus.

Caſ. 1. Concipe jam cavitatem totam in vaſe, in circuitu aquæ cadentis ABNFEM, glacie plenam eſſe, ut aqua per glaciem, tanquam per infundibulum, tranſeat. Et ſi aqua glaciem tantùm non tangat; vel, quod perinde eſt, ſi tangat, & per glaciem, propter ſummam ejus polituram, quàm liberrimè & ſine omni reſiſtentiâ labatur; hæc defluet per foramen EF eâdem velocitate ac priùs, & pondus totum columnæ aquæ ABNFEM impendetur in defluxum ejus generandum uti priùs, & fundum vaſis ſuſtinebit pondus glaciei columnam ambientis.

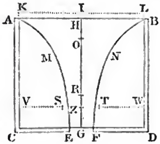
(i) Locum hunc de motu Aquarum, quæ è vaſe cylindraceo, tenui foramine pertuſo, proſiliunt, multis tractârunt Jurinus in Actis Philoſophicis, Maclaurinus in præclaro ſuo Opere de Fluxionibus, D. Bernoullius in Hydrodynamicâ, et Polenus.

Liqueſcat jam glacies in vaſe; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac priùs. Non minor erit, quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere: non major, quia glacies in aquam reſoluta non poteſt deſcendere, niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vaſis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus eſſe debet quàm priùs. Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed à lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quàm in ipſo foramine; exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quàm proximè, ſi modò diametros rectè dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam, pertenuem, in medio perforatam; exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur, & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis affixi; ſic ut vena illa egrederetur ſecundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquâ plenum eſſet, aperui foramen, ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti à foramine, quàm accuratiſſimè menſurata prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproximè. Aqua igitur, tranſeundo per foramen, convergit undique; & poſtquam effluxit ex vaſe, tenuior redditur convergendo; & per attenuationem acceleratur, donec ad diſtantiam ſemiſſis digiti à foramine pervenerit, & ad diſtantiam illam tenuior & celerior ſit, quàm in ipſo foramine, in ratione 25×25 ad 21×21, ſeu 17 ad 12, quamproximè; id eſt in ſubduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. Per experimenta verò conſtat, quòd quantitas aquæ, quæ, per foramen circulare in fundo vaſis factum, dato tempore effluit, ea ſit, quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, ſed per foramen circulare, cujus diameter eſt ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem habet

bet deorſum, in ipſo foramine, quam grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quamproximè. Sed poſtquam exivit ex vaſe, acceleratur convergendo, donec ad diſtantiam à foramine diametro foraminis propè æqualem pervenerit, & velocitatem acquiſiverit majorem in ratione ſubduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo totam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quamproximè.

In ſequentibus igitur diameter venæ deſignetur per foramen illud minus, quod vocavimus EF. Et plano foraminis EF parallelum duci intelligatur planum aliud ſuperius, VW, ad diſtantiam diametro foraminis æqualem circiter, & foramine majore ST pertuſum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius, EF, atque ideo cujus diameter ſit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter tranſibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam ſolutio Problematis poſtulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus & venâ cadente clauditur, pro fundo vaſis haberi poteſt. Sed ut ſolutio Problematis ſimplicior ſit & magis mathematica, præſtat adhibere planum ſolum inferius pro fundo vaſis, & fingere quòd Aqua, quæ per Glaciem, ceu per infundibulum, defluebat, & è vaſe per foramen EF in plano inferiore factum egrediebatur, motum ſuum perpetuò ſervet, & Glacies quietem ſuam. In ſequentibus igitur ſit ST diameter foraminis circularis, centro Z deſcripti, per quod cataracta effluit ex vaſe, ubi aqua tota in vaſe fluida eſt. Et ſit EF diameter foraminis, per quod cataracta cadendo adæquatè tranſit, ſive Aqua exeat ex vaſe per foramen illud ſuperius ST, ſive cadat per medium Glaciei in vaſe tanquam per infundibulum. Et ſit diameter foraminis ſuperioris ST ad diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, & diſtantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis ſit diametro foraminis minoris EF. Et velocitas aquæ, è vaſe per foramen ST exeuntis, ea erit in ipſo foramine deorſum, quam corpus cadendo à dimidio



De Motu Corporum dimidio altitudinis IZ acquirere poteſt: velocitas autem cataractæ utriuſque cadentis ea erit in foramine EF, quam corpus cadendo ab altitudine totâ IG acquiret.

Caſ. 2. Si foramen EF non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac priùs, ſi modò eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam, quàm per lineam perpendicularem; ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, ut *Galilæus* demonſtravit.

Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, ut intervallum inter ſuperficies AB & KL quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram Parabolicam efformet: ex latere recto hujus Parabolæ colligetur, quòd velocitas aquæ effluentis ea ſit, quàm corpus ab aquæ, in vaſe ſtagnantis, altitudine HG, vel IG, cadendo acquirere potuiſſet. Facto utique experimento inveni, quòd ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum, & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ profilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo, quod in planum illud à foramine demittebatur, captam. Nam ſine reſiſtentiâ, vena incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ Parabolicæ latere recto digitorum 80.

Caſ. 4. Quinetiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Aſcendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ, in vaſe ſtagnantis, altitudinem GH, vel GI; niſi quatenus aſcenſus ejus ab Aeris reſiſtentiâ aliquantulum impediatur; ac proinde eâ effluit cum velocitate, quam, ab altitudine illâ cadendo, acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per Prop. XIX. Lib. 2.) &, preſſioni cedendo, æquali impetu in omnes partes fertur; ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem, & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem, quâ aqua effluit, eam eſſe, quam

in

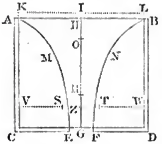
in hâc Propoſitione aſſignavimus, non ſolùm ratione colligitur, ſed etiam per experimenta notiſſima jam deſcripta manifeſtum eſt. LIBER SECUNDUS.

Caſ. 5. Eadem eſt aquæ effluentis velocitas, ſive figura foraminis ſit circularis, ſive quadrata, vel triangularis, aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figurâ foraminis, ſed oritur ab ejus altitudine infra planum KL.

Caſ. 6. Si vaſis ABDC pars inferior in aquam ſtagnantem immergatur, & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit GR: velocitas, quâcum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen EF in aquam ſtagnantem, ea erit, quam aqua cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IR, acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe, quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minimè accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc ſi aquæ altitudo, CA, producatur ad K, ut ſit AK ad CK in duplicatâ ratione areæ foraminis, in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli AB: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati, quam aqua cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC, acquirere poteſt.

Corol. 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi Cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo 2GI vel 2CK. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine GI cadendo velocitatem ſuam, quâ exilit, acquirere poteſt.



Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe ABDC eſt ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum AB & EF ad duplum circulum EF. Sit enim IO media proportionalis inter IH & IG; & aqua per foramen EF egrediens, quo tempore gutta, cadendo ab I, deſcribere poſſet altitudinem IG, æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus EF & altitudo eſt 2IG; id eſt, Cylindro cujus baſis eſt circulus AB, & altitudo eſt 2IO:

 nam

nam circulus EF eſt ad circulum AB in ſubduplicatâ ratione altitudinis IH ad altitudinem IG, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta, cadendo ab I, deſcribere poteſt altitudinem IH, aqua egrediens æqualis erit Cylindro, cujus baſis eſt circulus AB, & altitudo eſt 2IH: & quo tempore gutta, cadendo ab I per H ad G, deſcribit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, id eſt, aqua tota in Solido ABNFEM, æqualis erit differentiæ Cylindrorum; id eſt, Cylindro cujus baſis eſt AB, & altitudo 2HO. Et propterea aqua tota in vaſe ABDC eſt ad aquam totam cadentem in Solido ABNFEM ut HG ad 2HO, id eſt, ut HO+OG ad 2HO, ſeu IH+IO ad 2IH. Sed pondus aquæ totius, in Solido ABNFEM, in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut IH+IO ad 2IH; atque ideo ut ſumma circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe ABDC eſt ad ponderis partem alteram, quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum AB & EF ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars, quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum AB & EF ad duplum circulum minorem EF, ſive ut area fundi ad duplum foramen.

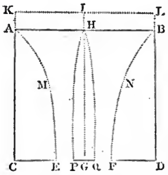
Corol. 6. Ponderis autem pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF; ſive ut circulus AB ad exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum. Nam ponderis pars, qua ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum AB & EF ad ſummam eorundem circulorum, per Cor. 4: & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circulorum AB & EF. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF, vel exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum [k].

Corol. 7. Si in medio foraminis EF locetur circellus PQ, centro

[k] Sextum hoc Corollarium à Coteſio eſt.

G de-

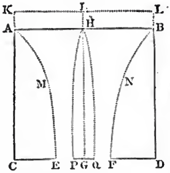
G deſcriptus, & horizonti parallelus: pondus aquæ, quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille, & altitudo eſt GH. Sit enim ABNFEM cataracta, vel columna aquæ cadentis axem habens GH ut ſuprà; & congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, tam in circuitu cataractæ quàm ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit PHQ columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens H, & altitudinem GH. Et finge cataractam hancce pondere ſuo toto cadere, & non incumbere in PHQ, nec eandem premere, ſed liberè & ſine frictione præterlabi; niſi fortè in ipſo Glaciei vertice, quo cataracta, ipſo cadendi initio, incipiat eſſe cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata, AMEC, BNFD, convexa eſt in ſuperficie internâ, AME, BNF, verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna PHQ convexa erit verſus cataractam; & propterea major Cono, cujus baſis eſt circellus ille PQ, & altitudo GH; id eſt, major tertiâ parte Cylindri eâdem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ; id eſt, pondus, quod pondere Coni, ſeu tertiæ partis Cylindri illius, majus eſt.



Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valdè parvus PQ ſuſtinet, minor eſſe videtur pondere duarum tertiarum partium Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille, & altitudo eſt HG. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium Sphæroidis, cujus baſis eſt circellus ille, & ſemiaxis ſive altitudo eſt HG. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus Cylindri illius, & comprehendet columnam aquæ congelatæ PHQ, cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maximè directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi, PQ, in angulo nonnihil acuto; propterea quòd aqua, cadendo, perpetuò acceleratur, &, propter accelerationem, ſit tenuior; & cùm angulus ille ſit recto minor, hæc columna, ad inferiores ejus partes, jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eadem verò ſurſum acuta erit, ſeu cuſpidata; ne horizontalis motus aquæ, ad verticem Sphæroidis, ſit

 infinitè

De Motu Corporum



infinitè velocior quàm ejus motus horizontem verſus. Et quo minor eſt circellus PQ, eo acutior erit vertex columnæ; &, circello in infinitum diminuto, angulus PHQ in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eſt igitur columna illa minor dimidio Sphæroidis, ſeu duabus tertiis partibus Cylindri, cujus baſis eſt circellus ille, & altitudo GH. Suſtinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cùm pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ, quam circellus valdè parvus, PQ, ſuſtinet, æquale eſt ponderi Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$GH quamproximè. Nam pondus hocce eſt medium arithmeticum inter pondera Coni & Hemiſphæroidis prædictæ. At ſi circellus ille non ſit valdè parvus, ſed augeatur, donec æquet foramen EF; hic ſuſtinebit pondus aquæ totius ſibi perpendiculariter imminentis, id eſt, pondus cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt GH.

Corol. 10. Et (quantùm ſentio) ([l]) pondus, quod circellus ſuſtinet, eſt ſemper ad pondus Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille, & altitudo eſt $\frac{1}{2}$GH, ut EFq ad EF$q-\frac{1}{2}$PQq, ſive ut circulus EF ad exceſſum circuli hujus ſupra ſemiſſem circelli PQ quamproximè.

LEMMA

([l]) *—quantum ſentio.*] Nimirum proportio ponderum, quam in hoc Corollario Newtonus conſtituit, ita obtinebit, ſi is ſit motus aquæ per rimam annularem, quam circulus PQ, in medio foramine EF collocatus, circa ſe relinquit, quo per eandem rimam è vaſe cylindraceo ea proflueret, quod baſin haberet circulum EF, altitudinem rectæ GH æqualem. Quod ſic oſtendimus.

Tantilla ponatur circuli PQ ſuperficies, ut foraminis totius EF pars ſit multeſima. Suſtinebit igitur vim, quæ ponderi Cylindri aquei, cujus baſis circulus ille PQ, altitudo dimidia recta GH, æqualis erit. Manente circulo PQ, contrahatur ſenſim foramen EF, quo datam circuli PQ magnitudinem paulatim accedat. Sit V linea recta eâ lege mutabilis, ut in omni magnitudine foraminis EF, illa V ad datam quandam P rationem habeat, quam vis, quâ premitur circulus PQ, ad pondus Cylindri aquei, cujus baſis PQ altitudo $\frac{1}{2}$GH. Dico V eſſe ſemper ad P ut EF^2 ad EF$^2-\frac{1}{2}$PQ^2, modò is ſit aquarum, per rimam EPQF profluentium, motus, quo per eandem rimam è vaſe cylindraceo, cujus baſis EF, altitudo GH, prorumperent. Aquâ enim per rimam illam è tali vaſe proſiliente, vis quâ fundus ejus vaſis premitur, erit ad pondus Cylindri aquei, qui in eodem vaſe fundum ad perpendiculum inſiſtit, ut EF^2 ad EF^2+EF$^2-$PQ^2, hoc eſt ut EF^2 ad 2EF$^2-$PQ^2 (per Cor. 6.) Jam verò cùm V ſit ad P ut vis, quâ aquæ premant circulum PQ, ad pondus Cylindri aquei PQ$\times\frac{1}{2}$GH; cùm præterea pondus hujus Cylindri ſit ad pondus Cylindri aquei, cujus baſis circulus

LEMMA IV.

Cylindri, qui ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia ex auctá vel diminutá ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem eſt cum reſiſtentiá Circuli eádem diametro deſcripti, & eádem velocitate ſecundum lineam rectam, plano ipſius perpendicularem, progredientis.

Nam latera Cylindri motui ejus minimè opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in Circulum vertitur.

PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

Cylindri, qui in Fluido compreſſo infinito, & non elaſtico, ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia, quæ oritur à magnitudine ſectionis tranſverſæ, eſt ad vim, quá totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproximè.

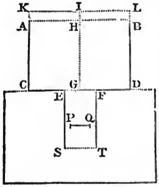
Nam ſi vas ABDC fundo ſuo, CD, ſuperficiem aquæ ſtagnantis tangat, & aqua ex hoc vaſe per canalem cylindricum EFTS, horizonti perpendicularem, in aquam ſtagnantem effluat, locetur autem circellus PQ horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur CA ad K, ut ſit AK ad CK in duplicatâ ratione, quam habet exceſſus orificii canalis EF ſupra circellum PQ ad circulum

lus idem PQ altitudo tota recta GH, ut 1 ad 2: erit V ad 2P ut vis, quá aquæ premunt circulum PQ, ad pondus Cylindri aquei qui in vaſe cylindraceo, quale poſuimus, circulum PQ ad perpendiculum inſiſtit; hoc eſt ut EF^2 ad $2EF^2 - PQ^2$. Eſt autem $2EF^2 - PQ^2$ ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ$ ut 2 ad 1, hoc eſt ut 2P ad P. Cùm igitur ſit $V : 2P = EF^2 : 2EF^2 - PQ^2$. Et $2P : P = 2EF^2 - PQ^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$; ex æquo erit $V : P = EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$. Q. E. D.

Habes, ni fallor, firmiſſimam hujus Corollarii probationem, modò vera ſint ea quæ in novem ſuperioribus et in ipsá Propoſitione XXXVI. allegata ſunt, atque illud præterea conceſſeris, motum aquarum, è vaſe cylindraceo ampliſſimo, ACDB, per rimam tenuiſſimam, EFQF, profluentium, eundem fore, quo ex anguſtiſſimo ejuſdem altitudinis, quod baſem circulum EF haberet, per eandem rimam fluerent. Illud autem Newtonus cùm per experimenta non ſatis exploratum haberet, idcirco iſtud ſuum *quantum ſentio*, ut opinor, interpoſuit. Cæterùm hujus Corollarii rationes in ſexto poſitas eſſe, è literis quibuſdam Coteſii ad Newtonum primùm intellexi. In quibus Coteſius, poſtquam ſextum illud Corollarium expoſuerit, hæc ſubjungit. "Hoc Corollarium lucem aliquam tuo in Corollario decimo *quantum ſentio* offundere poſſit."

Sed ne quid diſſimulem, cum iis ſuffragium fero, qui hanc Propoſitionem XXXVI^m^. cum decem quæ ei comitantur, Corollariis, ſuſpectam habent.

De Motu Corporum



AB: manifeſtum eſt (per Caſ. 5. Caſ. 6. & Cor. 1. Prop. XXXVI.) quòd velocitas aquæ, tranſeuntis per ſpatium annulare inter circellum & latera vaſis, ea erit, quam aqua cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC, vel IG, acquirere poteſt.

Et (per Corol. 10. Prop. XXXVI.) ſi vaſis latitudo ſit infinita, ut lineola HI evaneſcat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$IG, ut EF*q* ad EF*q* − $\frac{1}{2}$PQ*q* quàm proximè. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ, in quâcunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & aſcendat circellus in Fluido undique compreſſo, &, aſcenſu ſuo, cogat aquam ſuperiorem deſcendere per ſpatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli aſcendentis erit ad velocitatem aquæ deſcendentis ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ; & velocitas circelli aſcendentis ad ſummam velocitatum, hoc eſt, ad velocitatem relativam aquæ deſcendentis, quâ præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, ſive ut EF*q*−PQ*q* ad EF*q*. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ ſuprà oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare, dum circellus interea immotus manet; id eſt, velocitati, quam aqua, cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac priùs (per Legum Corol. V.) id eſt, reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille

(n) Hæc demonſtratio à Coteſio tota eſt. Cùm verò tota poſita eſt in Propoſitione ſuperiore, cujus doctrinam multi ſuſpectam habuere, et in Corollario ejus decimo, quod vel ipſe Newtonus non niſi dubitanter allegavit, rem Phyſicis ut opinor haud ingratam fecero, ſi Viri Clariſſimi Henrici Pembertoni Propoſitiones duas, quæ in manus fortè noſtras pervenerunt, in lucem emiſero. Quarum ope quæ Newtono in hâc Propoſitione tradita ſunt, de vi renixûs, quâ liquores compreſſi ad motus corporum reſtinguendos polleant, ea ſubtiliſſimis quidem, eiſdem verò quàm maximè perſpicuis, rationibus confirmantur; nullâ ſuſpectæ Propoſitionis XXXVI. ratione habitâ. Sanè quæ ſuper quæſtione graviſſimâ, et è difficillimis unâ, quæ in Phyſicis tractari ſolent, tanto viro tam feliciter ſunt elucubrata, apud nos premere & abſcondere piaculum eſſet.

HEN-

ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$ IG, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua, cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimò ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit, quam aqua, cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirere poteſt; reſiſtentia verò ejus æqualis evadet ponderi Cylindri, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis IG, à quâ Cylindrus cadere debet, ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; & hâc velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem Cylindri, hâc velocitate ſecundum longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum reſiſtentiâ circelli (per Lemma IV.) ideoque æqualis eſt vi, quâ motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari poteſt quamproximè.

Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eâdem ratione; ideoque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

Si denſitas Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus, ut & vis, quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque Cylindri cujuſcunque erit ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproximè. Q.E.D. [m]

Fluidum

HENRICI PEMBERTONI

DE VI RENIXUS IN LIQUORIBUS COMPRESSIS PROPOSITIONES.

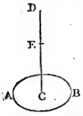
PROPOSITIO PRIMA. THEOREMA.

Aquâ, vel alio quovis Liquore, dato quovis foramine cum velocitate quâlibet æquabili prorumpente, quantitas motûs in liquore illo, qui dato quovis tempore effluxerit, ejus æqualis erit, quam vis gravitatis eodem tempore generaverit, in mole quâdam ejuſdem liquoris ſive Cylindraceâ ſive Priſmaticâ, quæ baſem

illud

Fluidum autem comprimi debet, ut ſit continuum: continuum verò eſſe debet, & non elaſticum, ut preſſio omnis, quæ ab ejus compreſſione

illud ipſum foramen habeat, quo liquor prorumpit, altitudinem verò ejus altitudinis duplam, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit æquabilis illius, quâ liquor profluit, æqualem.



Sit AB foramen illud quo Liquor profluit; CD ſpatium quod corpus, rectâ progrediendo, eâ eum velocitate quâ liquor fertur, dato tempore T confecerit. Ponatur CE altitudini æqualis, à quâ ſi grave cadat, velocitatem eam, quæ profluentis eſt liquoris, adeptum erit. Ac primùm, datum tempus T illud ipſum ſit, quo corpus, rectâ cadendo, ſpatium CE confecerit. Erit igitur longitudo CD illius CE dupla. At verò Liquor omnis, qui dato tempore, T, foramine AB profluxerit, Cylindri vel Priſmatis, qui pro baſe foramen illud AB habeat, altitudinem ipſam CD, mole ſuâ æqualis erit; hoc eſt Cylindri vel Priſmatis qui baſem habeat AB, altitudinem duplam rectæ CE. Et velocitas profluendi eadem eſt, quam vis gravitatis tempore caſûs recti per CE, hoc eſt dato tempore T, generaverit. Motus igitur Cylindri ejus vel Priſmatis, iſtâ eum velocitate profluentis, is erit, quem in eodem Cylindro vel Priſmate vis gravitatis, eodem tempore T, generaverit. Nimirum cùm tantundem fuerit materiæ motæ eademque velocitas.

Jam verò tempus datum T, aliud ſit ab illo, quo corpus grave, caſu recto, ſpatium CE confecerit. Nihilominus illud omne liquoris, quod foramine AB, dato tempore T, profluxerit, Cylindri vel Priſmatis qui baſem AB, altitudinem illam CD habeat, mole ſuâ æquale erit. Et illud omne quod tempore caſûs recti per CE profluxerit, mole itidem ſuâ, Cylindri vel Priſmatis qui baſem habeat AB, altitudinem 2CE, æquale erit. Unde illud omne liquoris, quod dato tempore T profluxerit, ad illud omne quod profluxerit tempore caſûs recti per CE, rationem habebit quam CD ad duplam CE. Sed et tempus datum T ad tempus caſûs recti per CE rationem habet quam CD ad 2CE; nimirum cùm illa CD, 2CE ſint ſpatia temporibus illis, pari velocitatis gradu, æquabiliter confecta. Velocitates autem, quas vis gravitatis temporibus diverſis generat, ſunt ſemper inter ſe ut tempora, quibus generantur. Velocitas igitur, quam vis gravitatis dato tempore T generaverit, ad velocitatem quam tempore caſûs recti per CE generaverit, hoc eſt ad liquoris profluendi velocitatem, rationem habebit quam CD ad 2CE. Cùm igitur liquoris illud omne, quod foramine AB dato tempore T profluxerit, ad illud omne quod ejuſdem liquoris Cylindrus vel Priſma in ſe contineret, cujus baſis AB, altitudo dupla illius, à quâ grave cadendo liquoris profluentis velocitatem adeptum eſſet; cùm inquam moles illa liquoris, dato tempore T profuſa, ad hanc alteram ejuſdem liquoris molem rationem habeat, quam CD ad 2CE, hoc eſt quam velocitas dato tempore T à gravitate generanda ad ipſam profluendi velocitatem; motus utique liquoris, qui dato tempore T profluxerit, illius æqualis erit, quem vis gravitatis dato tempore T in mole illâ alterâ Cylindraceâ vel Priſmaticâ generaret. Nimirum propter materiæ quantitates velocitatum rationibus contrariè reſpondentes. Q. E. D.

Cor. 1. Vis quâ liquor foramine dato AB prorumpat, æqualis erit ponderi molis cujuſdam ejuſdem liquoris, ſive cylindraceæ ſive priſmaticæ, quæ baſem AB, altitudinem verò ejus altitudinis duplam habeat, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit æquabilis illius, quâ liquor profluit, æqualem. Namque cùm æquales ſemper ſint motus, quos vis ponderis hujus Cylindri vel Priſmatis, viſque, quâ liquor per foramen propellitur, eiſdem temporibus generaverint, vires utique genetrices inter ſe æquales erunt.

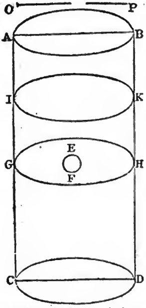
Cor. 2. Motus varii, quos liquor, ſi dato foramine variis eum velocitatibus profluxerit, temporibus æqualibus generaverit, ii rationem inter ſe velocitatum duplicatam gerent. Namque motus illi ſunt iidem, quos vis gravitatis, dato tempore profluendi, in Cylindris vel Priſmatis liquoris profluentis generaverit, qui pro baſi foramen datum communiter omnes habeant, altitudines earum ſingulatim duplas, à quibus gravia ſi cadant velocitates adepta erunt earum, quibuſcum liquor profluere intelligitur, æquales. Sed motus, quos vis gravitatis in corporibus diverſis dato tempore generat, quantitatum materiæ in eiſdem rationem gerunt; quæ corporum ipſorum ratio erit, ſi ex ſimili materiâ conſtant. Corpora autem illa, Cylindracea vel Priſmatica, ex ſimili materiâ conſtant, et altitudinum inter ſe rationem gerunt. Quare motus de quibus agitur, erunt inter ſe ſicut Cylindrorum iſtorum vel Priſmatum altitudines. Altitudines autem illæ, ſecundum Doctrinam Galilæi, duplicatam velocitatum rationem gerunt. Quare et motus de quibus agitur duplicatam inter ſe velocitatum rationem ſervant.

PROPO-

compreſſione oritur, propagetur in inſtanti, &c, in omnes moti corporis partes æqualiter agendo, reſiſtentiam non mutet. Preſ- ſio

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

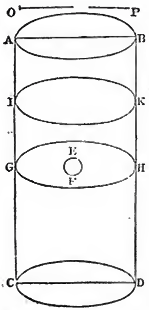
Invenire vim renixûs in Liquore quovis Compreſſo, ad motum corporis Cylindracei reſtinguendum, quod ſecundum axis ſui directionem per liquorem illum progrediatur.



Puta iſtiuſmodi Liquorem aliquem per canalem cylindraceum ACDB, cum velocitate æquabili, ſecundum directionem axis Cylindri ferri. Tum in hoc canali ponatur circulus quidam EF, tali ſitu ut cum baſibus canalis parallelus ſit. His poſitis, impetus liquoris o in hunc circulum videamus quiſnam erit.

Nempe Liquor, qui, dum nullus erat in canali circulus, omni parte æquabiliter progrediebatur, nunc incitatiùs feretur inter latera canalis et circulum, quàm ubi circulum nondum attigerit: eâ quidem ratione, quâ canalis baſis ſpatium illud inter latera canalis et circulum exſuperaverit. Quare ſi canalis plano GH per circulum ſecetur, alioque IK quod cum priore parallelum ſit, ab eâ parte unde curſus fit liquoris; velocitas liquoris in ſpatio GEHF ad velocitatem ejus in plano IK rationem habebit eam, quam circulus IK ad ſpatium GEHF. Atqui major illa liquoris velocitas, inter circulum et latera canalis, argumento eſt, partem liquoris illam, quæ circulum præterlabitur, vi aliquâ à partibus ulterioribus propelli. Unde hæ viciſſim ab illâ repellentur. Unde ſequetur, liquorem inter circulum & latera canalis velociùs, ante circulum, ut in plano IK, tardiùs ferri, quàm ſi circulus in canali nullus eſſet; licet ab eâdem vi externâ, ſive adſit circulus, ſive ille abſit, moles liquida incitetur. Quin et major liquoris in ſpatio GEHF velocitas ad minorem ejus in plano IK velocitatem eam neceſſe eſt rationem habeat, quæ efficiat, ut decrementum motûs, dato tempore genitum, in liquore qui per circulum IK profluxerit, æquale ſit incremento motûs, eodem tempore genito, in liquore illo qui per ſpatium GEFH evaſerit. Verùm hunc in finem velocitas quæ, abſente circulo, liquoris fuerit, ea velocitatum quando adſit circulus, in plano IK, & in ſpatio GEHF, inæqualium, proportione media eſſe debet. Ita enim, quoniam velocitas in ſpatio GEHF ad velocitatem in plano IK, quando adſit circulus, rationem habet quam circulus IK ad ſpatium illud GEHF; circulus utique IK ad ſpatium GEHF rationem habebit duplicatam ejus, quam velocitas liquoris in ſpatio GEHF ad primariam ejus, qualis abſente circulo ea fuerit, velocitatem; necnon duplicatam ejus quam velocitas hæc liquoris primaria, ad imminutam ejus, adveniente circulo EF, in plano IK velocitatem. Circulus igitur IK erit ad ſpatium GEHF, ut motus, dato quovis tempore in liquore illo genitus, qui, circulo EF in medio canali poſito, per ſpatium GEHF evaſerit, ad motum eodem tempore generandum in liquore, qui, abſente circulo, cum primariâ ſuâ velocitate per idem ſpatium GEHF profluxiſſet. (Prop. I. Cor. 2.) Sed ut circulus IK ad ſpatium GEHF, ita erit motus dato tempore in liquore illo omni generandus, qui cum primariâ velocitate per circulum IK profluxiſſet, ad motum, eodem tempore, in eâ liquoris ejus parte generandum, quæ, cum eâdem velocitate, per ſpatium GEHF profluxiſſet. Motus igitur, dato tempore genitus, in liquore illo, qui per ſpatium inter circulum EF, in medio canali poſitum, et latera canalis evaſerit, ei æqualis erit, qui, abſente circulo EF, in liquore, cum primariâ ſuâ velocitate per circulum IK profluente, eodem tempore generatus eſſet. (El. v. 9.) Rurſum cùm circulus IK ad ſpatium GEHF rationem habeat duplicatam ejus, quam velocitas liquoris primaria ad imminutam ejus in plano IK velocitatem (id enim antè oſtenſum fuit) eam utique habebit circulus ille IK ad ſpatium GEHF quam motus, dato tempore in liquore generandus, qui cum primariâ velocitate, abſente circulo EF, per circulum IK profluxiſſet, ad motum eodem tempore genitum in liquore illo, qui, circulo EF in medio canali poſito, per eundem circulum IK tardiùs profluxerit. (Prop. I. Cor. 2.) Sed ut circulus IK ad ſpatium GEHF, ita erit motus dato tempore in liquore illo omni generandus, qui, circulo EF abſente, per circulum IK cum primariâ velocitate profluxiſſet, ad motum eodem tempore in eâ liquoris ejus parte generandum,

ſio utique, quæ à motu corporis oritur, impenditur in motum partium



dum, quæ cum eâdem velocitate per ſpatium GEHF profluxiſſet. Motus igitur, dato tempore genitus, in liquore, qui, circulo EF in medio canali poſito, per circulum totum IK cum imminutâ velocitate profluxerit, æqualis erit ei, qui, circulo EF abſente, eodem tempore in liquore genitus eſſet cum primariâ ſuâ velocitate per ſpatium GEHF profluente. (El. v. 9.) Ex hiſce verò ſequitur, quantum motûs liquori in circulo IK deceſſerit, circulo utique EF in medio canali poſito, tantundem ei in ſpatio GEHF, inter circulum EF et latera canalis, reſtitui. Etenim quando motus in toto circulo IK in eum minuerit, qui, ſi abeſſet circulus EF, in ſpatio minore GEHF eſſet, tum motus in minore illo ſpatio GEHF in eum increverit, qui antè in toto circulo IK fuerat.

Jam ſit baſis canalis, ſive circulus IK, ad ſpatium GEHF ut M^2 ad N^2. Sit etiam O ad P ut velocitas liquoris primaria ad minorem eam liquoris per circulum IK profluentis, quando adſit circulus EF in medio canali. Erit igitur P ad O ut N ad M, et P ad $O-P$ ut N ad $M-N$, ſive ut $N\times\overline{M+N}$ ad M^2-N^2. Solidum igitur $P\times\overline{M^2-N^2}$ Solido $N\times\overline{M+N}\times\overline{O-P}$ æquale erit; et $\overline{M^2-N^2}\times P$ erit ad $M^2\times\overline{O-P}$ ut $N\times\overline{M+N}\times\overline{O-P}$ ad $M^2\times\overline{O-P}$; hoc eſt ut $N\times\overline{M+N}$ ad M^2, ſive ut $M\times N+N^2$ ad M^2. Hinc omnis illa liquoris moles, cui circulus EF, in medio canali poſitus, tranſitum per IK dato quovis tempore negaverit; hæc ad molem illam, quæ, ut obſiſtat circulus EF, parte tamen quâvis plani IK circulo EF æquali, eodem tempore profluxerit: moles, inquam, liquoris, cui circulus EF, in medio canali poſitus, per IK tranſitum negaverit, ad hanc alteram molem rationem habebit quam M^2 ad $M\times N+N^2$; ſive eam, quam baſis canalis ad illud habet quo circulum EF ipſa baſis exſuperat, unà cum illo quod hujus exſuperantiæ et ipſius baſis proportione medium eſt. Namque prior moles ad alteram rationem habebit, quæ componitur è ratione velocitatis, in plano IK extinctæ, ad velocitatem in illo plano ſuperſtitem (hoc eſt è ratione $O-P$ ad P), cum ratione baſis canalis ad circulum EF; hoc eſt cum ratione ipſius M^2 ad M^2-N^2. Verùm ex eiſdem rationibus compoſita eſt ratio ſolidi $M^2\times\overline{O-P}$ ad $\overline{M^2-N^2}\times P$; ſive quadrati ex M ad ſpatium $MN+N^2$.

Hæc erit Circuli immobilis efficientia ad ſiſtendum Liquoris curſum. Deinceps diſquiramus, quænam Liquoris futura ſit ad impediendum Circuli motum, ſi ille ſecundum axem canalis propellatur.

Quoniam ea erat Circuli EF immobilis efficientia, quâ ſe ad liquoris curſum objiciendo, molem ejus, quæ dato tempore per canalis circulum quemvis IK proflueret, minorem redderet; ſi circulus ille EF vim omnem molis ejus liquidæ ſuſtinuiſſet, cujus corpuſcula ad perpendiculum ei illidebantur, omnem utique eorum corpuſculorum motum extinxiſſet, ſimul atque ea in eum impingerentur. Unde liquoris moles, cui circulus iſte tranſitum per IK dato quovis tempore negâſſet, ea fuiſſet, quæ parte quâvis circuli IK ipſi EF æquali, eo tempore, proflueret. Unde circulus ipſe EF vim ſuſtinuiſſet ejus æqualem, quâ liquor aliquis, ejus ſimilis quem in canali ponimus, tali foramine prorumpat; ſive eam, quæ ponderi columnæ cujuſdam ejus liquoris cylindraceæ æqualis eſſet, quæ baſem haberet circulum EF, altitudinem verò duplam illius, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit æquabilis illius æqualem, quâcum liquor in Canali per IK profluebat. (Prop. I. Cor. 1.) Verùm minor erat liquoris moles, cui circulus EF tranſitum negabat; ſiquidem M^2 minus fuerit quàm $MN+N^2$, modò circulus EF præ latitudine canalis perexiguus ſit. Liquor igitur, qui in circulum EF illidebatur, eâ duntaxat velocitatis ſuæ parte eum urgebat, cujus extinctione minor illa moles liquida, cui circulus EF tranſitum negabat, retinenda et curſu ſiſtenda erat. Et cùm vis liquoris alicujus profluentis velocitatum profluendi rationem duplicatam ſervet (Prop. I. Cor. 2.) vis, quam circulus ille EF immotus ſuſtinebat, ad pondus columnæ liquoris, cujus diximus, cylindraceæ rationem habuerit ejus duplicatam, quam baſis Canalis ad illud quo baſis circulum EF exſuperet, unà cum illo quod ejus exſuperantiæ et ipſius baſis proportione medium ſit.

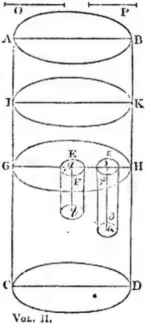
Claudatur jam canalis; & in liquore undique compreſſo et ſtagnante, puta circulum EF, ſecundum

partium Fluidi generandum, & reſiſtentiam creat. Preſſio autem quæ

dum directionem axis canalis cylindracei ACDB, verſus IK incitari. Circulus, movendo, Liquori aliter immoto motum dabit; qui talis erit, ut velocitas liquoris, circulo cedentis, quâcum inter circulum & latera canalis feretur, ad circuli ipſius velocitatem rationem habeat, quam area circuli ad ſpatium GEHF. Quapropter hæ velocitates ſimul ſumptæ, ſive velocitas illa omnis, quâcum liquor et circulus ſe mutuò præterlabuntur, ad ſolam circuli velocitatem, ſive ad eam quâcum partes liquoris ulteriores ad circulum admoventur, rationem habebit quam tota baſis Canalis ad ſpatium GEHF. Hinc motus liquoris, Circuli ratione, idem prorſus erit, qui antè erat; quando, Circulo immoto, Liquor propio motu in eum impetum faciebat. Igitur Circulus eam percipiet vim renixûs, quæ æqualis erit ponderi columnæ cujuſdam Liquoris cylindraceæ, quæ baſem habeat circulum EF, altitudinem verò, quæ ad duplam illius, à quâ ſi grave cadat velocitatem circuli adeptum erit, rationem habeat duplicatam ejus, quæ eſt circuli GH ad ſpatium GEHF unà cum illo, quod circuli GH et ſpatii GEHF proportione medium eſt. Atqui ratio illa duplicata, ſi amplitudo canalis infinitè augeatur, ultimò unitatis ad quaternarium erit. Et vis, quam Circulus percipiet, æqualis fiet ponderi cylindraceæ cujuſdam Liquoris columnæ, quæ baſem Circulum ipſum habeat, altitudinem verò ejus altitudinis dimidiam, à quâ ſi grave cadat velocitatem circuli adeptum erit.

Univerſè vis renixûs in Circulum ea erit, quæ ad pondus cylindraceæ cujuſdam liquoris columnæ, cujus baſis circulus ipſe, altitudo dimidia ejus à quâ ſi grave cadat velocitatem circuli adeptum erit, rationem habeat ejus rationis duplicatam, quam dupla baſis canalis habet ad illud quo baſis illa circulum exſuperet, unà cum illo quod exſuperantiæ illius & ipſius baſis proportione medium ſit."

Hæc ferè Pembertonus; niſi quòd nonnulla, quæ nimis breviter eum dixiſſe exiſtimavimus, nos, Latinè convertentes quæ ille Anglicè ſcripſerat, explicatiùs dicere conati ſumus: Ex his autem illud facilè comprobari poſſit, quod Newtonus in Propoſitione ſuâ XXXVII. conſtituere voluit, de vi renixûs quâ pollerent Liquores Compreſſi, quorum moles infinitæ eſſent, ad motum corporis cujuſvis Cylindracei reſtinguendum, quod ſecundum axis ſui directionem in tali liquore progrederetur. Ea nempe illa vis renixûs erit, quæ ad vim aliam, quæ totum corporis Cylindracei motum vel generare vel extinguere poſſet, tempore ejus æquali, quo velocitate ſuâ æquabili quadruplam longitudinem ſuam Cylindrus ille conficeret, rationem habebit quam Liquoris denſitas ad denſitatem materiæ in Cylindro.

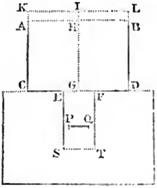


Intelligatur è quâvis materiâ Cylindrus baſe circulo $\iota\varphi$, axe $\gamma\alpha$, qui in liquore aliquo infinito, maximè compreſſo, ſecundum directionem axis ſui $\gamma\alpha$ progrediatur. Sit υ ad Δ ut denſitas liquoris ad denſitatem materiæ, quâ Cylindrus $\iota\varphi\gamma\alpha$ factus eſt. Significet litera V datam quandam vim, quæ motum omnem Cylindri illius vel generare vel tollere poſſet, tempore ejus æquali, quo velocitate ſuâ æquabili longitudinem $4\gamma\alpha$ Cylindrus ille conficeret. Deſignet litera R vim renixûs in liquore, ad motum corporis $\iota\varphi\gamma\alpha$ reſtinguendum. Dico talem eſſe R, quæ ſit ad V ut υ ad Δ. Capiatur enim $\gamma\beta$ dimidia ejus altitudinis, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit ejus, quâcum cylindrus $\iota\varphi\gamma\alpha$ progreditur, æqualem. Baſe circulo EF, ipſius $\iota\varphi$ æquali, altitudine gb ipſius $\gamma\beta$ æquali, intelligatur Cylindrus è materiâ quâdam, cui denſitas eadem quæ Liquoris ſit. Hic Cylindrus, pari cum altero illo, $\iota\varphi\gamma\alpha$, velocitate, ſecundum axis ſui directionem in liquore progrediatur. Motus cylindri totius $\iota\varphi\gamma\alpha$ ad motum in eâ ejus parte, cujus longitudo $\gamma\beta$, rationem habet quam $\gamma\alpha$ ad $\gamma\beta$. Eandem verò tempus, quo cylindrus ille longitudinem $4\gamma\alpha$, ad tempus, quo longitudinem $4\gamma\beta$ conficeret, habet. Vis igitur V, quæ motum cylindri totius vel generare vel extinguere poſſit, tempore ejus æquali, quo cylindrus ille longitudinem $4\gamma\alpha$ conficeret; eadem, quo tempore cylindrus longitudinem $4\gamma\beta$ conficeret, motum ejus partis, cujus longitudo eſt $\gamma\beta$, vel generare vel extinguere poſſet. Jam verò vis R, cùm ex iis quæ nos cum Pembertono oſtendimus, ponderi Cylindri EFgb æqualis ſit, cùmque pondus cylindri EFgb motum ejus cylindri totum vel generare

De Motu Corporum

quæ oritur à compreſſione Fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motum in partibus Fluidi Continui, nullam omninò inducit motûs mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certè actio Fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hâc Propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quàm in poſticas, ſi modò propagatio ejus infinitè velocior ſit, quàm motus corporis preſſi. Infinitè autem velocior erit, & propagabitur in inſtanti, ſi modò Fluidum ſit Continuum, & non Elaſticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione denſitatis Mediorum (n).



Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed Cylindrus in Medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: reſiſtentia ejus erit ad vim, quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad EF$q - \frac{1}{2}$PQq ſemel, & ratione EFq ad EF$q -$ PQq bis (o), & ratione denſitatis Medii ad denſitatem Cylindri.

Corol. 3. Iiſdem poſitis, & quòd longitudo L ſit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione EF$q - \frac{1}{2}$PQq ad EFq ſemel, & ratione EF$q -$ PQq ad EFq bis: reſiſtentia

nerare vel tollere poſſet, tempore ejus æquali, quo cylindrus velocitate ſuâ æquabili quadruplum ſuæ longitudinis conficeret; ſiquidem velocitas cylindri æquabilis ea eſt, quam corpus grave, rectâ cadendo per ſpatium $2gb$, adeptum erit; hæc cùm ita ſint, vis R talis erit, quæ motum omnem cylindri EFgb, tempore ejus æquali quo longitudinem $4gb$ ille conficeret, generare vel tollere poſſet. Jam verò cùm æquales ſint Cylindrorum, EFgb, $\epsilon\phi\gamma\beta$, progrediendi velocitates, cùm longitudines etiam gb, $\gamma\beta$ inter ſe æquales ſint, idcirco æqualia erunt tempora, quibus Cylindri illi longitudines æquales, $4gb$, $4\gamma\beta$, conficiant. Vires autem R, r erunt inter ſe, ut motus quos, temporibus illis æqualibus, generare vel extinguere poſſent; hoc eſt ut motus Cylindrorum æqualium, EFgb, $\epsilon\phi\gamma\beta$, pari cum velocitate progredientium; ſive ut denſitates mate-

ſiſtentia Cylindri erit ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum longitudinem L deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri. LIBER SECUNDUS.

Scholium.

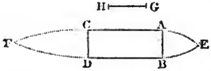
In hâc Propoſitione Reſiſtentiam inveſtigavimus, quæ oritur à ſolâ magnitudine tranſverſæ ſectionis Cylindri, neglectâ reſiſtentiæ parte, quæ ab obliquitate motuum oriri poſſit. Nam quemadmodum in caſu primo Propoſitionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vaſe undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: ſic in hâc Propoſitione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino preſſæ, cedunt preſſioni & undique divergunt, retardat eorum tranſitum per loca in circuitu termini illius antecedentis verſus poſteriores partes Cylindri; efficitque ut Fluidum ad majorem diſtantiam commoveatur, & reſiſtentiam auget, idque in eâ ferè ratione, quâ effluxum aquæ è vaſe diminuit, id eſt, in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propoſitionis illius caſu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter, & maximâ copiâ tranſirent per foramen EF, ponendo, quòd omnis aqua in vaſe, quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hâc Propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ, motu maximè directo & breviſſimo cedentes, facillimum præbeant tranſitum Cylindro, & ſola maneat reſiſtentia, quæ oritur à magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum Cylindri; concipiendum eſt, quòd partes Fluidi, quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur. [Sit ABCD rectangu-

riæ in Cylindris illis. Sed denſitas materiæ in Cylindro $EFgb$ denſitati Liquoris poſita eſt æqualis; ſive ei, quæ ad denſitatem materiæ in Cylindro ef,S rationem habeat quam D ad Δ. Vis igitur R talis erit quæ ad vim V rationem habebit quam D ad Δ. Q. E. D.

(ˢ) Hujus demonſtratio eadem ferè quæ Corollarii 5. Prop. XXXV.

(°) Pro hâc ratione compoſitâ, in hoc & proximo etiam Corollario, ſubſtituenda eſt duplicata ejus quam habet $2.EF^2$ ad $\overline{EF^2 - PQ^2} + EF\sqrt{EF^2 - PQ^2}$, ut ex iis quæ cum Pembertono oſtendimus manifeſtum eſt. Cæterùm ratio Pembertoni duplicata à compoſitâ illâ, quam Newtonus poſuit, haud multum abibit, niſi magnus fuerit circulus PQ ratione baſis canalis.

 lum,



lum, & ſint AE & BE arcus duo Parabolici, axe AB deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpatium HG, deſcribendum à Cylindro cadente, dum velocitatem ſuam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}$AB. Sint etiam CF & DF arcus alii duo Parabolici, axe CD & latere recto, quod ſit prioris lateris recti quadruplum, deſcripti] (P); & convolutione figuræ circum axem EF generetur Solidum, cujus media pars ABDC ſit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ, ABE & CDF, contineant partes Fluidi inter ſe quieſcentes, & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque, tanquam caput & cauda, adhæreant. Et Solidi EACFDB, ſecundum longitudinem axis ſui FE in partes verſus E progredientis, reſiſtentia, ea erit quamproximè, quam in hâc Propoſitione deſcripſimus; id eſt, quæ rationem illam habet ad vim, quâ totus Cylindri motus, interea dum longitudo 4AC motu illo uniformiter continuato deſcribatur, vel tolli poſſit vel generari, quam denſitas Fluidi habet ad denſitatem Cylindri quamproximè. Et hâc vi reſiſtentia minor eſſe non poteſt quàm in ratione 2 ad 3, per Corol. 7. Prop. XXXVI.

LEMMA V.

Si Cylindrus, Sphæra & Sphærois, quorum latitudines ſunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur ſucceſſivè, ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam ſpatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem, per quæ aqua tranſit, ſunt æqualia: & aqua per æqualia ſpatia æqualiter tranſit.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quòd aqua omnis ſupra Cylindrum Sphæram vel Sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ tranſitum non requiritur, ut in Corol. 7. Prop. XXXVI. explicui.

LEMMA

(P) A Coteſio ſunt quæ uncis incluſimus. Eorum rationes in Corollariis Propoſitionis XXXVI. ſeptimo

LEMMA VI.

Iiſdem poſitis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per Lemma v. & Motûs Legem tertiam. Aqua utique & corpora in ſe mutuò æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quieſcat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum reſiſtentiæ inter ſe.

Conſtat ex Lemmate ſuperiore, nam motus relativi iidem inter ſe manent.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his Lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & Medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam; & quòd partes Fluidi, quæ, motibus ſuis obliquis & ſuperfluis, fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in Scholio Propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentiâ omnium minimâ, quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora Fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut Fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figurâ ſint obtuſâ; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt, quàm ſi capite & caudâ ſint acutis. Et corpora in Fluidis Elaſticis mota, ſi antè & pòſt obtuſa ſint, Fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem, & paulo magis re-

ſeptimo et octavo poni nemo non intelligit: inſido ſanè ſolo, ut mea fert opinio.

laxant

De Motu Corporum

laxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt, quàm ſi capite & caudâ ſint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propoſitionibus non agimus de Fluidis Elaſticis, ſed de non Elaſticis; non de inſidentibus Fluido, ſed de altè immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in Fluidis non Elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum, tam in Fluidis Elaſticis, qualis eſt Aer, quàm in ſuperficiebus Fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt Maria & Paludes.

PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.

Globi, in Fluido compreſſo, infinito, & non elaſtico uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim, quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Fluidi ad denſitatem Globi quamproximè.

Nam Globus eſt ad Cylindrum circumſcriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere poſſit motum omnem Cylindri interea dum Cylindrus deſcribat longitudinem quatuor diametrorum, Globi motum omnem tollet, interea dum Globus deſcribat duas tertias partes hujus longitudinis, id eſt, octo tertias partes diametri propriæ. Reſiſtentia autem Cylindri eſt ad hanc vim quamproximè ut denſitas Fluidi ad denſitatem Cylindri vel Globi per Prop. XXXVII. & reſiſtentia Globi æqualis eſt reſiſtentiæ Cylindri per Lem. V, VI, VII. Q. E. D.

Corol. 1. Globorum, in Mediis compreſſis infinitis, reſiſtentiæ ſunt in ratione, quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, & duplicatâ ratione diametri, & ratione denſitatis Mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum Globus, vi ponderis ſui comparativi, in Fluido reſiſtente poteſt deſcendere, ea eſt, quam acquirere

(*) DESIGNANTE literâ d diametrum Globi, deſignet litera s ſpatium quod conficeret, quo tempore motus ejus, ex renixu liquoris circumfuſi, parte dimidiâ minuerit. Jam in figurâ Cor. 6. Prop. XXXV. quando EF ſemiſſis eſt rectæ BC, erit et AB ſemiſſis rectæ AE. Unde deſignante t tempus illud, per EB expoſitum, quo Globi motus parte dimidiâ minor factus fuerit, literâ verò T tempus expoſitum per AE, quo vis renixûs, qualis initio motûs erat, omnem globi motum extingueret, erit nimirum $T+t$, ſive AE, $=2T$ ſive 2.AB; et $T=t$. Quare (per Cor. 7. Prop. XXXV.) ſpatium s ad ſpatium illud quod Globus, cum motu illo quem initio habuit, tempore t æquabiliter confeciſſet, rationem habebit quam numerus, qui factus fuerit è logarithmo binarii Briggiano in numerum 2,30258 + multiplicato, ad unitatem habet. Sed ſpatium illud quod Globus, cum motu quem initio habuit tempore t æquabiliter confeciſſet, huic $\frac{4}{3}d$ æquale. Nam propter æquales AE,

acquire poteſt Globus idem, eodem pondere, ſine reſiſtentiâ cadendo, & caſu ſuo deſcribendo ſpatium, quod ſit ad quatuor tertias partes diametri ſuæ ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi. Nam Globus tempore caſûs ſui, cum velocitate cadendo acquiſitâ, deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias diametri ſuæ, ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare poſſit, quo tempore Globus octo tertias diametri ſuæ eâdem velocitate deſcribit, ut denſitas Fluidi ad denſitatem Globi: ideoque per hanc Propoſitionem, vis ponderis æqualis erit vi reſiſtentiæ, & propterea Globum accelerare non poteſt.

Corol. 3. Datâ & denſitate Globi, & velocitate ejus ſub initio motûs, ut & denſitate Fluidi compreſſi quieſcentis, in quâ Globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas Globi, & ejus reſiſtentia, & ſpatium ab eo deſcriptum, per Corol. 7. Prop. XXXV.

Corol. 4. Globus in Fluido compreſſo quieſcente ejuſdem ſecum denſitatis movendo, dimidiam motûs ſui partem priùs amittet, quàm longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit, per idem Corol. 7 (q).

PROP. XXXIX. THEOR. XXXI.

Globi per Fluidum, in canali cylindrico clauſum & compreſſum, uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum Globi (r), *& ratione denſitatis Fluidi ad denſitatem Globi quamproximè.*

AE, BE (fig. Cor. 6. Prop. XXXV.) erunt rectangula $AB \times BC$, BG inter ſe æqualia. Sed BG eſt ad $AB \times BC$ ut ſpatium, quod globus cum motu ſuo primario, BC, tempore t, vel BE, confeciſſet, ad ſpatium quod confeciſſet tempore T vel AB, quo vis aliqua, æqualis ejus quæ initio fuit liquoris circumfuſi vis renixûs, motum omnem BC extinguèret. Quare hæc ſpatia inter ſe æqualia erunt. Horum verò poſterius, propter æqualem materiæ in Globo et Liquoris circumfuſi denſitatem, ſpatio $\frac{8}{3}d$ æquale erit (per Prop. XXXVIII.) Quare et prius eidem $\frac{8}{3}d$ æquale. Quapropter $s : \frac{8}{3}d = \log.\overline{2} \times 2{,}30258 : 1$. Hinc $s = d \times 1{,}848$. Ergo ſpatium s minus quàm $2d$.

(r) Pro ratione ex duabus hiſce compoſitâ, ratio duplicata, quæ in Corollariis Prop. XXXVII. ſecundo tertioque ſubſtituebatur, eadem hic ſubſtituenda eſt.

Patet

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII. procedit verò demonſtratio quemadmodum in Propoſitione præcedente.

Scholium.

In Propoſitionibus duabus noviſſimis (perinde ut in Lem. v.) ſuppono quòd aqua omnis congelatur quæ Globum præcedit, & cujus fluiditas auget reſiſtentiam Globi. Si aqua illa omnis liqueſcat, augebitur reſiſtentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his Propoſitionibus parvum erit, & negligi poteſt; propterea quòd convexa ſuperficies Globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROP. XL. PROB. IX.

Globi, in Medio fluidiſſimo compreſſo progredientis, invenire reſiſtentiam per Phænomena.

Sit A pondus Globi in Vacuo; B, pondus ejus in Medio reſiſtente; D, diameter Globi; F ſpatium, quod ſit ad $\frac{4}{3}$D ut denſitas Globi ad denſitatem Medii, id eſt, ut A ad A − B; G, tempus, quo Globus, pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo, deſcribit ſpatium F; & H, velocitas quam globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima

(') Designet litera V velocitatem quam Globus, per liquorem compreſſum cadendo, tempore T adeptus fuerit.

In figurâ Propoſitionis nonæ hujus Libri ſit AP ad AC ut V ad H. Per punctum T, hyperbolæ AVZ, ducatur recta Πτ cum rectâ AC parallela; quæ cum hyperbolâ AVZ iterum in τ conveniat, cum aſymptotâ DC in Π. Tribus rectis Πτ, AC, ΠΤ continua erit proportionis convenientia. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XXXVII.) Quare Πτ erit ad ΠΤ ut Πτ² ad AC². Convertendo Πτ ad τT ut Πτ² ad Πτ² − AC². Sed τT eſt ad τX ut 2 ad 1. Quare Πτ erit ad τX ut 2Πτ² ad Πτ² − AC². Et dividendo ΠX ad Xτ vel XT ut Πτ² + AC² ad Πτ² − AC². Sed propter rectas ΠX, CA parallelas, erit ΠX ad XT ut AC ad AP, id eſt ut H ad V. Quare H erit ad V ut Πτ² + AC² ad Πτ² − AC². Jam ſit N quantitas quæ ſit ad unitatem ut Πτ² ad AC². Erit igitur N + 1 ad N − 1 ut Πτ² + AC² ad Πτ² − AC². Quare H : V = N + 1 : N − 1. Et $V = \frac{N-1}{N+1}H$.

Deſignet litera β Modulum ſyſtematis logarithmorum Briggiani. Sector hyperbolicus ADT eſt ad triangulum ADC ut logarithmus quivis rationis, quam AC habet ad Πτ, ad Modulum ſyſtematis ſui. (Cotes. Harmon. Menſ. Part I. Prop. IV.) Sed ſector ADT ad triangulum ADC rationem habet quam P ad G. (Prop. IX. hujus Libri Cor. 5.) Erit igitur P ad G ut Logarithmus quivis rationis, quam AC habet ad Πτ, ad Modulum ſyſtematis ſui. Quare 2P erit ad G ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam AC² habet ad Πτ², ſive ejus quam 1 habet ad N, ad Modulum ſyſtematis ſui. Unde 2P : G = Log. Brigg. N : β. Et $\frac{2P}{G} \times \beta$ = Log. Brigg. N. Sed β = 0,4342944819. (Coteſ. Harmon. Menſ. Pars I. Prop. II. Cor.) Quare N eſt quantitas illa cujus Logarithmus eſt $\frac{2P}{G} \times 0{,}4342944819$.

Et

maxima quâcum globus, pondere ſuo B, in Medio reſiſtente poteſt deſcendere, per Corol. 2. Prop. XXXVIII. & Reſiſtentia, quam Globus eâ cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: Reſiſtentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per Corol. 1. Prop. XXXVIII. LIBER SECUNDUS.

Hæc eſt Reſiſtentia, quæ oritur ab inertiâ materiæ Fluidi. Ea verò quæ oritur ab Elaſticitate, Tenacitate, & Frictione partium ejus, ſic inveſtigabitur.

Demittatur Globus, ut pondere ſuo B in Fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus, N, qui congruit logarithmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, ſitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem deſcripta erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611F + 4,605170186LF$. Si Fluidum ſatis profundum ſit, negligi poteſt terminus $4,605170186LF$; & erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611F$ altitudo deſcripta quamproximè. Patent hæc per Libri Secundi Propoſitionem Nonam & ejus Corollaria; ex hypotheſi quòd Globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam, niſi quæ oritur ab inertiâ materiæ (s).

Si

Et velocitas tempore P partu à Newtono recte definita eſt. Videamus de ſpatio quod caſu conficitur: quod dicatur A. Spatium verò quod corpus aliquod cum velocitate H, eodem tempore P, æquabiliter conficeret, dicatur S. In figurâ Propoſitionis nonæ ponitur AB pars quarta rectæ AC. Unde rectangulum AB × AC trianguli ADC dimidium erit. Area autem hyperbolica ABNK eſt ad rectangulum AB × AC ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam CK habet ad AC, ad Modulum ſyſtematis ſui. (Cotes. Harmon. Menſ. Part I. Prop. IV.) Quare area ABNK erit ad $\frac{1}{2}$ ADC, ſive 2ABNK ad ADC, ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam CK habet ad AC, ad Modulum ſyſtematis ſui. Ponuntur autem tres illæ AC, AP, AK proportione convenientes. Quare $AC : AK = AC^2 : AP^2$. Et convertendo $AC : CK = AC^2 : AC^2 - AP^2$. Sed $AC^2 : AC^2 - AP^2 = H^2 : H^2 - V^2 =$

$$H^2 : H^2 - \frac{\overline{N-1}^2}{\overline{N+1}^2} H^2 = 1 : 1 - \frac{\overline{N-1}^2}{\overline{N+1}^2} = 1 : \frac{\overline{N+1}^2 - \overline{N-1}^2}{\overline{N+1}^2} = 1 : \frac{4N}{\overline{N+1}^2} = \overline{N+1}^2 : 4N.$$

Igitur $CK : AC = 4N : \overline{N+1}^2$. Et 2ABNK erit ad ADC ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam 4N habet ad $\overline{N+1}^2$, ad Modulum ſyſtematis ſui; ſive ut Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}^2}{4N}$ ad β. Sed ex iis quæ ſuprà oſtenſa ſunt, ADC eſt ad ſectorem 2ADT $= (G : 2P =) \beta$: Log. Brigg. N.

Cùm igitur ſit 2ABNK : ADC = Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}^2}{4N} : \beta$; et ADC : 2ADT $= \beta$: Log. Brigg. N.

Ex æquo erit ABNK : ADT = Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}^2}{4N}$: Log. Brigg. N. Sed (per Cor. 1. Prop. IX.)

Si verò aliam inſuper reſiſtentiam patiatur, deſcenſus erit tardior, & ex retardatione innoteſcet quantitas hujus reſiſtentiæ.

Ut corporis, in Fluido cadentis, velocitas & deſcenſus faciliùs innoteſcant, compoſui Tabulam ſequentem, cujus columna pri-

Tempora P	Velocitates cadentis in Fluido.	Spatia cadendo deſcripta in Fluido.	Spatia motu maximo deſcripta.	Spatia cadendo deſcripta in Vacuo.
0,001 G	99999$\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	99999999$\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

ma denotat Tempora deſcenſûs; ſecunda exhibet Velocitates cadendo acquiſitas, exiſtente velocitate maximâ 10000000; tertia exhibet

$ABNK : ADT = A : S$. Quare $A : S = \text{Log. Brigg. } \frac{\overline{N+1}^2}{4N} : \text{Log. Brigg. } N$. Et $A \times \text{Log. Brigg. } N = S \times \text{Log. Brigg. } \frac{\overline{N+1}^2}{4N}$. Jam verò cum S, & $2F$ ſint ſpatia illa, quæ corpora, cum velocitate H æquabiliter progredientia, temporibus P & G, conficerent, erit $S : 2F = P : G$, et $S = \frac{2PF}{G}$.

Unde rurſum $A \times \text{Log. Brigg. } N = \frac{2PF}{G} \times \text{Log. Brigg. } \frac{\overline{N+1}^2}{4N} = \frac{2PF}{G} \times \text{Log. Brigg. } \frac{\overline{N+1}^2 \times N}{4NN} = \frac{2PF}{G} \times \overline{2L + \text{Log. Brigg. } N - \text{Log. Brigg. } 4}$. Hoc eſt, cùm oſtenſus ſit $\text{Log. Brigg. } N = \frac{2P}{G} \times \beta$, erit $A \times \frac{2P}{G}\beta = \frac{2P}{G} \times F \times 2L + F \times \frac{2P}{G}\beta - F \times \text{Log. Brigg. } 4$. Quare $A = \frac{2PF}{G} + F \times \frac{2L}{\beta} - \frac{F \text{ Log. Brigg. } 4}{\beta}$.

hibet Spatia temporibus illis cadendo deſcripta, exiſtente 2F ſpatio, quod corpus, tempore G, cum velocitate maximâ deſcribit; & quarta exhibet Spatia, iiſdem temporibus, cum velocitate maximâ deſcripta. Numeri in quartâ columnâ ſunt $\frac{2P}{G}$; & ſubducendo numerum 1,3862944 − 4,6051702L, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ; & multiplicandi ſunt hi numeri per ſpatium F, ut habeantur ſpatia cadendo deſcripta. Quinta his inſuper adjecta eſt columna, quæ continet ſpatia deſcripta, iiſdem temporibus, à corpore, vi ponderis ſui comparativi B, in Vacuo cadente.

Scholium.

Ut Reſiſtentias Fluidorum inveſtigarem per Experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine internâ digitorum novem pedis *Londinenſis*, profunditate pedum novem cum ſemiſſe, idemque implevi Aquâ Pluviali; & Globis ex cerâ & plumbo incluſo formatis, notavi tempora deſcenſûs Globorum, exiſtente deſcenſûs altitudine 112 digitorum pedis. Pes ſolidus cubicus *Londinenſis* continet 76 libras *Romanas* Aquæ Pluvialis, & pedis hujus digitus ſolidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus, ſeu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius deſcriptus continet grana 132,645 in Medio Aeris, vel grana 132,8 in Vacuo; & globus quilibet alius eſt ut exceſſus ponderis ejus in Vacuo ſupra pondus ejus in Aquâ.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in Aere

Sed $\beta = 0{,}4342944819$.
Et Log. Brigg. 4 = 0,6020599913.
Quare $\frac{2}{\beta} = 4{,}605170186$.
Et $\frac{\text{Log. Brigg. } 4}{\beta} = 1{,}386294361$.

Unde A, ſive altitudo caſu recto tempore P confecta, ea erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611F + 4{,}605170186\,LF$; omninò qualis à Newtono definita eſt.

Quòd ſi permagna ſit altitudo A, ut AP in figurâ Prop. IX. rectæ AC propemodum æqualis fiat, permagnum erit quadratum ex HT ratione quadrati ex AC; unde numerus N permagnus, et $\frac{N+1}{N}$ [unitate] vix major erit. Ejus igitur Logarithmus L in nihilum propemodum abierit, & membrum $\frac{F \times 2L}{\beta}$ negligere licebit, ſicut Newtonus ſtatuit.

& 77 granorum in Aquâ, altitudinem totam, digitorum 112, tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, Globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

Pondus globi in Vacuo eſt $156\frac{13}{38}$ *gran.* & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in Aquâ eſt $79\frac{13}{38}$ *gran.* Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in Vacuo, ita denſitas aquæ ad denſitatem globi; & ita partes octo tertiæ diametri globi (viz. 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2F, quod perinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, cadendo in Vacuo deſcribet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, ſine reſiſtentiâ cadendo in Aquâ deſcribet digitos 95,219; & tempore G, quod ſit ad minutum unum ſecundum in ſubduplicatâ ratione ſpatii F ſeu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* deſcribet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quâcum poteſt in Aquâ deſcendere. Eſt igitur tempus G 0″,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus deſcribet ſpatium, 2F, digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet ſpatium digitorum 116,1245. Subducatur ſpatium 1,3862944F ſeu 3,0676 *dig.* & manebit ſpatium 113,0569 digitorum, quod globus cadendo in Aquâ, in vaſe ampliſſimo, tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi, & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus, cadendo in Aquâ, in hoc vaſe ligneo, tempore minutorum quatuor ſecundorum per Theoriam deſcribere debuit quamproximè. Deſcripſit verò digitos 112 per Experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in Aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in Aquâ, ſucceſſivè demittebantur; & unuſquiſque cecidit in Aquâ tempore minutorum

ſecundorum

ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Computum ineundo prodeunt Pondus globi in Vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in Aquâ $71\frac{17}{48}$ *gran.* Diameter globi 0,81296 *dig.* Octo Tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* Spatium 2F 2,3217 *dig.* Spatium, quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore 1″ ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribat, 12,808 *dig.* & Tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maximâ, quâcum poteſt in Aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore 0″,301056 deſcribet ſpatium 2,3217 *dig.* & tempore 15″ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore, in vaſe latiſſimo cadendo, deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore 15″ deſcribere debuit per Theoriam quamproximè. Deſcripſit vero digitos 112 per Experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in Aere & 1 *gran.* in Aquâ, ſucceſſivè demittebantur; & cadebant in Aquâ temporibus 46″, 47″, & 50″, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quòd tardiùs ceciderunt, utrum minori proportioni reſiſtentiæ, quæ à vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis, tribuendum ſit; an potiùs bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel manûs globum demittentis, vel etiam erroribus inſenſibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum eſſe puto. Ideoque pondus globi in Aquâ debet eſſe plurium granorum, ut Experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus deſcripta cepi, ut inveſtigarem Reſiſtentias Fluidorum, antequam Theoria, in Propoſitionibus proximè præcedentibus expoſita, mihi innoteſceret. Poſtea, ut Theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente.

te.

te. Deinde ex cerâ & plumbo incluſo globos quatuor formavi, ſingulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in Aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in Aquâ. Et hos demiſi, ut tempora cadendi in Aquâ per Pendulum, ad ſemi-minuta ſecunda oſcillans, menſurarem. Globi, ubi ponderabantur & poſtea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manſerant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in Aquâ, & cera rarefacta non ſtatim ad denſitatem priſtinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus, ex aquâ extantis, deſcenſus eorum ſub initio acceleraretur. Et ubi penitus immerſi quieſcebant, demittebantur quàm cautiſſimè, ne impulſum aliquem à manu demittente acciperent. Ceciderunt autem ſucceſſivè temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50, & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulo frigidior erat, quàm cùm globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53; ac tertio, temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento ſæpiùs capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardiùs cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt Pondus globi in Vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum: Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in Aquâ $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2F 2,8066 *dig.* Spatium, quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi, ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit, 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maximâ, quâcum poteſt in Aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore 0″,376843 deſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,4466 digitorum, & tempore 25′, ſeu oſcillationum 50, ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum

micirculum maximum globi, & ſimplici ratione ejuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe, tempore oſcillationum 50, deſcribere debuit per Theoriam quamproximè. Deſcripſit verò ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$, vel 50, per Experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor, pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in Aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in Aquâ, ſæpè demiſſi cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30; & nonnunquam 31, 32 & 33, deſcribentes altitddinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque, pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in Aere & $79\frac{1}{2}$ in Aquâ, ſæpè demiſſi cadebant tempore oſcillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor, pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in Aerè & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in Aquâ, ſæpè demiſſi cadebant tempore oſcillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproximè.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citiùs alii tardiùs caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra; latere illo, quod fortè gravius eſſet, primùm deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas globus majorem motum communicat aquæ, quàm ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motûs proprii quo deſcendere deberet: & pro majore vel minore oſcillatione, magis vel minùs retardatur. Quinetiam globus recedit ſemper à latere ſuo quod per oſcillationem deſcendit; &, recedendo, appropinquat lateribus vaſis, & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oſcillatio in globis gravioribus fortior eſt,

eſt, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oſcillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ & plumbo conſtruxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope ſuperficiem ejus; & globum ita demiſi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, eſſet infimum ab initio deſcenſûs. Sic oſcillationes factæ ſunt multo minores quàm priùs, & globi temporibus minùs inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in Aere & $6\frac{1}{2}$ in Aquâ, ſæpè demiſſi ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quàm 52, non pauciorum quàm 50, & maximâ ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in Aere & $140\frac{3}{4}$ in Aquâ, ſæpiùs demiſſi ceciderunt temporibus oſcillationum non pauciorum quàm 12, non plurium quàm 13, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oſcillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in Aere & $119\frac{1}{2}$ in Aquâ, ſæpè demiſſi cadebant temporibus oſcillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, deſcribentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oſcillationum 19, nonnunquam audivi impulſum eorum in latera vaſis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam verò cadere debuerunt tempore oſcillationum $15\frac{5}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in Aere & $3\frac{29}{32}$ in Aquâ, ſæpè demiſſi ceciderunt temporibus oſcillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maximâ ex parte 44 & 45, deſcribentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in Aere & $4\frac{3}{8}$ in Aquâ, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum

tionum 61, 62, 63, 64 & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per hæc Experimenta manifeſtum eſt, quòd, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis ſecundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per Theoriam: at ubi globi velociùs ceciderunt, ut in experimentis ſextis, nonis ac decimis, reſiſtentia paulo major extitit quàm in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi, inter cadendum, oſcillant aliquantulum; & hæc oſcillatio in globis levioribus & tardiùs cadentibus, ob motûs languorem, citò ceſſat; in gravioribus autem & majoribus, ob motûs fortitudinem diutiùs durat, & non niſi poſt plures oſcillationes ab aquâ ambiente cohiberi poteſt. Quinetiam globi, quo velociores ſunt, eo minùs premuntur à Fluido ad poſticas ſuas partes; & ſi velocitas perpetuò augeatur, ſpatium vacuum tandem à tergo relinquent, niſi compreſſio Fluidi ſimul augeatur. Debet autem compreſſio Fluidi (per Prop. XXXII. & XXXIII.) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut reſiſtentia ſit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minùs premuntur à tergo, & defectu preſſionis hujus, reſiſtentia eorum ſit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur Theoria cum Phænomenis corporum cadentium in Aquâ. Reliquum eſt ut examinemus Phænomena cadentium in Aere.

Exper. 13. A culmine Eccleſiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, menſe Junio 1710, Globi duo vitrei ſimul demittebantur; unus Argenti Vivi plenus, alter Aeris; & cadendo deſcribebant altitudinem pedum *Londinenſium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis ſuſpendebatur, ad alterum peſſulo ligneo incumbebat; & globi duo, huic Tabulæ impoſiti, ſimul demittebantur, ſubtrahendo peſſulum ope fili ferrei, ad terram uſque demiſſi, ut Tabula, polis ferreis ſolummodo innixa, ſuper iiſdem devolveretur; &, eodem temporis momento, Pendulum ad minuta ſecunda oſcillans, per filum illud ferreum tractum, demitteretur,

teretur, & oſcillare inciperet. Diametri & Pondera globorum, ac Tempora cadendi exhibentur in Tabulâ ſequente.

Globorum Mercurio plenorum			Globorum Aere plenorum.		
Pondera	Diametri	Tempora cadendi.	Pondera	Diametri	Tempora cadendi.
908 gran.	0,8 digit.	4″	510 gran.	5,1 digit.	8″½
983	0,8	4 −	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	8¼
808	0,75	4	483	5,0	8½
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterùm Tempora obſervata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam *Galilæi)* minutis quatuor ſecundis deſcribent pedes *Londinenſes* 257, & pedes 220 minutis tantùm 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto peſſulo, tardiùs devolvebatur quàm par erat, & tardâ ſuâ devolutione impediebat deſcenſum globorum ſub initio. Nam globi incumbebant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propriores erant axi ejus quàm peſſulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præſertim in globis majoribus, qui Tabulæ devolventi paulo diutiùs incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi ſex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Globorum igitur Aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque, pondere granorum 483 conſtructus, cecidit tempore 8″ 12‴, deſcribendo altitudinem pedum 220. Pondus Aquæ huic globo æqualis eſt 16600 granorum; & pondus Aeris eidem æqualis eſt $\frac{16600}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in Vacuo eſt $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus eſt ad pondus Aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita ſunt 2F ad octo tertias partes diametri globi; id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in Vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſuprà, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185,905, & eodem tempore 483 *gran.* etiam in Vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* tempore

(¹) — *ope ſphæræ ligneæ concavæ ambientis*] Sic habent Editionis tertiæ exemplaria, quotquot in chartâ minore ſunt expreſſa. Nos damus quæ in chartis majoribus leguntur. Quod ideo monendum

tempore $57'''\ 58''''$, & velocitatem maximam acquirit quâcum poſſit in Aere deſcendere. Hâc velocitate globus, tempore $8''\ 12'''$, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer $1{,}3863\,F$ ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus, tempore $8''\ 12'''$, cadendo deſcribere debuit per Theoriam. Deſcripſit verò ſpatium 220 pedum per Experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos Aere plenos applicatis, confeci Tabulam ſequentem.

Globorum pondera.	Diametri.	Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.	Spatia deſcribenda per Theoriam.		Exceſſus.	
510 gran.	5,1 digit.	$8''\ 12'''$	226 ped.	11 dig.	6 ped.	11 dig.
642	5,2	7 42	230	9	10	9
599	5,1	7 42	227	10	7	10
515	5	7 57	224	5	4	5
483	5	8 12	225	5	5	5
641	5,2	7 42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719, menſe Julio, D. Deſaguliers hujuſmodi Experimenta iterum cepit; formando veſicas porcorum in orbem ſphæricum, ope ſphæræ ligneæ concavæ (t), quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & haſce, arefactas & exemptas, demittendo ab altiore loco in templi ejuſdem turri rotundâ fornicatâ, nempe ab altitudine pedum 272; &, eodem temporis momento, demittendo etiam globum plumbeum, cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ſtantes in ſupremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ſtantes in terrâ notabant differentiam temporum inter caſum globi plumbei & caſum veſicæ. Tempora autem menſurabantur Pendulis ad dimidia minuta ſecunda oſcillantibus. Et eorum, qui in terrâ ſtabant, unus habebat horologium cum elatere ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam, affabrè conſtructam, cum Pendulo etiam ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante. Et ſimilem machinam habebat unus eorum, qui ſtabant in ſummi-

monendum duximus, nequis, cui ad manum fortè ſit exemplar duntaxat è minoribus, aut fidem noſtram aut diligentiam in otioſâ iſtâ voce *ambientis* deſideret.

 tate

tate templi. Et hæc inſtrumenta ita formabantur, ut motus eorum, pro lubitu, vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum, quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecundâ vice $14''\frac{1}{2}$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$, & $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota, quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}$, $22'$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}'$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterùm veſicæ non ſemper rectâ cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta, nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectiùs veſica ſecunda & quarta primâ vice; & prima ac tertia ſecundâ vice. Veſica quinta rugoſa erat, & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis, ſilo tenuiſſimo bis circundato, menſuratis. Et Theoriam contuli cum Experimentis in Tabulâ ſequente; aſſumendo denſitatem Aëris eſſe ad denſitatem Aquæ Pluvialis ut 1 ad 860, & computando ſpatia, quæ globi per Theoriam deſcribere debuerunt cadendo.

Veſicarum pondera.	Diametri.	Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.	Spatia iiſdem temporibus deſcribenda per Theoriam.	Differentia inter Theor. & Exper.
128 gran.	5,28 dig	$19''$	271 ped. 11 dig.	− 0 ped. 1 dig.
156	5,19	17	272 $0\frac{1}{2}$	+ 0 $0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272 7	+ 0 7
97	5,26	22	277 4	+ 5 4
$99\frac{5}{6}$	5	$21\frac{1}{8}$	282 0	+ 10 0

Globorum, igitur tam in Aëre quàm in Aquâ motorum, Reſiſtentia propè omnis per Theoriam noſtram rectè exhibetur, ac denſitati Fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis eſt.

In

In Scholio, quod Sectioni Sextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus, per Experimenta Pendulorum, quòd Globorum æqualium & æquivelocium, in Aëre, Aquâ, & Argento Vivo motorum, reſiſtentiæ ſunt ut Fluidorum denſitates. Idem hîc oſtendimus magis accuratè per Experimenta corporum cadentium in Aëre & Aquâ. Nam Pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in Fluido motui Penduli redeuntis ſemper contrarium; & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili, quo Pendulum ſuſpendebatur, totam Penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt, quàm reſiſtentia quæ per Experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta Pendulorum in Scholio illo expoſita, Globus ejuſdem denſitatis cum Aquâ, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in Aëre, amittere deberet motûs ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per Theoriam, in hâc ſeptimâ ſectione expoſitam & Experimentis cadentium comfirmatam, Globus idem, deſcribendo longitudinem eandem, amittere deberet motûs ſui partem tantùm $\frac{1}{4586}$; poſito, quòd denſitas Aquæ ſit ad denſitatem Aëris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta Pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quàm per experimenta Globorum cadentium; idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cùm Pendulorum, in Aëre, Aquâ & Argento Vivo oſcillantium reſiſtentiæ à cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his Mediis, tam per experimenta Pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, ſatis rectè exhibebitur. Et inde concludi poteſt, quòd corporum, in Fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum, Reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates Fluidorum.

His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motûs ſui partem Globus quilibet, in Fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi; & V velocitas ejus ſub initio motûs; & T tempus, quo globus velocitate V in Vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$D ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi: & globus in Fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$; & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in Vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum

$\frac{t}{T}$,

$\frac{t}{T}$, per Corol. 7. Prop. XXXV. In motibus tardis Reſiſtentia poteſt eſſe paulo minor, propterea quòd figura Globi paulo aptior ſit ad motum, quàm figura Cylindri eâdem diametro deſcripti. In motibus velocibus Reſiſtentia poteſt eſſe paulo major, propterea quòd Elaſticitas & Compreſſio Fluidi non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hîc non expendo.

Et quamvis Aër, Aqua, Argentum Vivum & ſimilia Fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent Media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minùs reſiſterent. Nam reſiſtentia, de quâ agitur in Propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertiâ materiæ; & inertia materiæ corporibus eſſentialis eſt, & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium Fluidi, reſiſtentia, quæ oritur à Tenacitate & Frictione partium, diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non minuitur; &, manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui Reſiſtentia, de quâ hîc agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc Reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis, per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia cœleſtia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in partes omnes liberrimè, & ſine omni motûs diminutione ſenſibili, perpetuò moventur, Fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi fortè vapores longè tenuiſſimos, & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in Fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis Fluidi, ad Projectilis partes anticas, ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas; & non minor eſſe poteſt in Mediis infinitè fluidis quàm in Aere, Aquâ & Argento Vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſuâ, non tantum motum ciet in Fluido, ſed etiam agit in Projectile ad motum ejus retardandum: & propterea Reſiſtentia, in omni Fluido, eſt ut motus in Fluido à Projectili excitatus; nec minor eſſe poteſt in Æthere ſubtiliſſimo pro denſitate ætheris, quàm in Aëre, Aquâ & Argento Vivo pro denſitatibus horum Fluidorum.

SECTIO

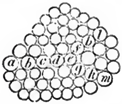
SECTIO VIII.

De Motu per Fluida propagato.

PROP. XLI. THEOR. XXXII.

Preſſio non propagatur per Fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

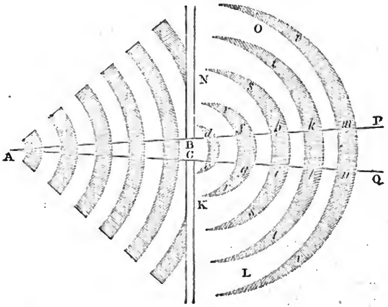
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in lineâ rectâ, poteſt quidem preſſio directè propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas obliquè poſitas, *f* & *g*, obliquè; & particulæ illæ, *f* & *g*, non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur à particulis ulterioribus, *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem, niſi fulciantur ab ulterioribus, *l* & *m*, eaſque premant; & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quàm primùm propagatur ad particulas, quæ non in directum jacent, divaricare incipiet, & obliquè propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit obliquè propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. Q. E. D.



Corol. Si preſſionis, à dato puncto per Fluidum propagatæ, pars aliqua obſtaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in ſpatia ponè obſtaculum. Id quod ſic etiam demonſtrari poteſt. A puncto A (*vid. fig. p.* 432) propagetur preſſio quaquaverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo NBCK perforato in BC, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem APQ, quæ per foramen circulare BC tranſit. Planis tranſverſis, *de*, *fg*, *hi*, diſtinguatur conus APQ in fruſta; & interea dum conus ABC, preſſionem propagando, urget fruſtum conicum ulterius *degf* in ſuperficie *de*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *fgih* in ſuperficie *fg*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motûs Legem tertiam) quòd fruſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *degf* inter

De Motu Corporum

inter conum A*de* & fruſtum *fbig* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eâdem comprimatur undique. Eodem igitur impetu, quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cùm rigidum non ſit, ſed omnimodo fluidum) ex-



curret ac dilatabitur, niſi Fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi premet tam Fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quàm fruſtum *fgbi* eodem impetu; & propterea preſſio non minùs propagabitur à lateribus *df*, *eg* in ſpatia NO, KL hinc inde, quàm propagatur à ſuperficie *fg* verſus PQ. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR. XX.

Motus omnis per Fluidum propagatus divergit à recto tramite in ſpatia immota.

Caſ. 1. Propagetur motus à puncto A per foramen BC, pergatque, ſi fieri poteſt, in ſpatio conico BCQP, ſecundum lineas rectas divergentes à puncto A. Et ponamus primò, quòd motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis Aquæ. Sintque *de*, *fg*, *bi*, *kl*,

kl, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt, quàm in Fluidi partibus immotis LK, NO, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde verſus KL & NO: & quoniam in undarum vallibus depreſſior eſt, quàm in Fluidi partibus immotis KL, NO; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum Juga, poſteriore Valles, hinc inde dilatantur, & propagantur verſus KL & NO. Et quoniam motus undarum ab A verſus PQ fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque celerior non eſt quàm pro celeritate deſcenſûs; & deſcenſus aquæ hinc inde verſus KL & NO eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde verſus KL & NO eâdem velocitate, quâ undæ ipſæ ab A verſus PQ rectâ progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde verſus KL & NO ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. Q. E. D. Hæc ita ſe habere quilibet in Aquâ ſtagnante experiri poteſt.

Caſ. 2. Ponamus jam, quòd *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* deſignent pulſus à puncto A, per Medium Elaſticum, ſucceſſivè propagatos. Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones Medii, ſic ut pulſûs cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum A deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignet autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen BC propagatas. Et quoniam Medium ibi denſius eſt, quàm in ſpatiis hinc inde verſus KL & NO, dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa KL, NO utrinque ſita, quàm verſus pulſuum rariora intervalla; eoque pacto rariùs ſemper evadens è regione intervallorum, ac denſius è regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur à perpetuâ relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eâdem ferè celeritate ſeſe in Medii partes quieſcentes KL, NO hinc inde relaxare debent; pulſus illi eâdem ferè celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota KL, NO, quâ propagantur directè à centro A; ideoque ſpatium totum KLON occupabunt. Q. E. D. Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes

cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi à parietibus oppoſitis, quàm à feneſtrâ directè propagati, quantùm ex ſenſu judicare licet.

Caſ. 3. Ponamus denique, quòd motus cujuſcunque generis propagetur ab A per foramen BC: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quatenus partes Medii centro A propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſunt, ideoque recedunt quaquaverſum in regiones ubi minùs premuntur: recedent eædem verſus Medii partes omnes quieſcentes, tam laterales KL & NO, quàm anteriores PQ; eoque pacto motus omnis, quàm primùm per foramen BC tranſiit, dilatari incipiet, & inde tanquam à principio & centro, in partes omnes directè propagari. Q. E. D.

PROP. XLIII. THEOR. XXXIV.

Corpus omne tremulum in Medio Elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in Medio verò non Elaſtico motum circularem excitabit.

Caſ. 1. Nam partes corporis tremuli, vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes Medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt; dein, reditu ſuo, ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & quâ ratione partes corporis hujus agitabant haſce Medii partes, hæ, ſimilibus tremoribus agitatæ, agitabunt partes ſibi proximas; eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condenſantur, & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ, quoties eunt, condenſabuntur, & quoties redeunt, ſeſe expandent ([a]). Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando, non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ab invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt, dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo

([a]) Cave ſic intelligas, quaſi partes Liquoris, dum progrediantur, magis uſque ſe condenſent, dum redeant, rareſcant; id enim neutiquam verum eſt. Sed illud modò vult Newtonus, partes Liquoris

do condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum, quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi à corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus, tremoribus ſuis ſingulis, ſingulos pulſus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per Medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per Propoſitionem præcedentem; & à corpore illo tremulo, tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodùm ſphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in Undis; quæ, ſi digito tremulo excitentur, non ſolùm pergent hinc inde ſecundum plagam motûs digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam Gravitas undarum ſupplet locum vis Elaſticæ.

Caſ. 2. Quòd ſi Medium non ſit Elaſticum: quoniam ejus partes, à corporis tremuli partibus vibratis preſſæ, condenſari nequeunt, propagabitur motus, in inſtanti, ad partes ubi Medium facillimè cedit; hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas à tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in Medio quocunque projecti. Medium, cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; ſed, in circulum eundo, pergit ad ſpatia, quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur, & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut Medium, recedendo à partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. Q. E. D.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium Flammæ ad preſſionem, per Medium ambiens, ſecundum lineas

Liquoris euntes magis denſas, redeuntes rariores eſſe, quàm ſi tota moles liquida, ab omni vi externâ immunis, ſtagnaret, et uniformem ubique denſitatem ſervaret. *Pemberton.*

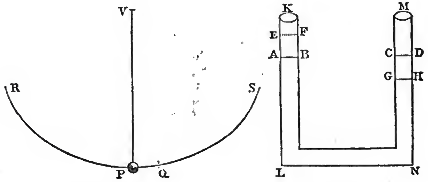
De Motu Corporum

rectas propagandam conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſolâ partium flammæ, ſed à totius dilatatione derivari.

PROP. XLIV. THEOR. XXXV.

Si aqua in Canalis cruribus erectis, KL, MN, *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem Pendulum, cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in Canali: dico, quòd Aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus, quibus Pendulum oſcillatur.*

Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hîc non conſidero. Deſignent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure utro-



que; & ubi aqua in crure KL aſcendit ad altitudinem EF, deſcenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus pendulum; VP filum; V punctum ſuſpenſionis; RPQS Cyclois, quam Pendulum deſcribat; P ejus punctum infimum; PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, eſt exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero: ideoque, ubi aqua in crure KL aſcendit ad EF, & in crure altero deſcendit ad GH, vis illa eſt pondus duplicatum aquæ EABF; & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut AE, ſeu PQ, ad VP, ſeu PR. Vis etiam, quâ pondus P, in loco quovis Q, acceleratur & retardatur in Cycloide (per Corol. Prop.

Prop. LI.) (b) eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia PQ à loco infimo P, ad Cycloidis longitudinem PR. Quare Aquæ & Penduli, æqualia ſpatia AE, PQ deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; ideoque, ſi Aqua & Pendulum in principio quieſcunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. Q. E. D. LIBER SECUNDUS.

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt Iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam Pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicatâ.

PROP. XLVI. THEOR. XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.

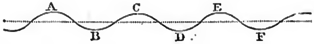
Conſequitur ex conſtructione Propoſitionis ſequentis.

PROP. XLVI. PROB. XII.

Invenire velocitatem Undarum.

Conſtituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore Pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet ABCDEF ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcenden-



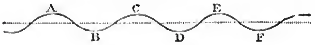
tem ac deſcendentem; ſintque A, C, E, &c. undarum culmina, &

(b) Libri Primi.

B,

De Motu Corporum

B, D, F, &c. valles intermediæ. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes A, C, E, &c. quæ nunc altiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, quâ partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt



pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in Canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per Prop. XLIV.) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima A, C, E & infima B, D, F æquentur duplæ Penduli longitudini [c]; partes altiſſimæ A, C, E, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuò aſcendent. Igitur inter tranſitum undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore Pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore Pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, ideoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. Q. E. I.

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; ideoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quamproximè.

Corol. 2. Et Undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in ſubduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent, ex hypotheſi quòd partes aquæ rectâ aſcendunt vel rectâ deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille veriùs fit per circulum, ideoque tempus, hâc Propoſitione, non niſi quamproximè definitum eſſe affirmo.

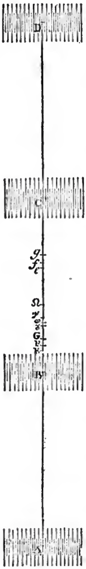
PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

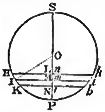
Pulſibus per Fluidum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis Penduli.

Deſignet AB, BC, CD, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; ABC, plagam motûs pulſuum ab A verſus B propagati;

E,

(c) Id eſt, ſi diſtantia loci cujuſque altiſſimi A, vel C, vel E, ab infimorum proximo B, vel D, vel



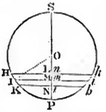


E, F, G, puncta tria phyſica Medii quieſcentis, in rectâ AC ad æquales ab invicem diſtantias ſita; E*e*, F*f*, G*g*, ſpatia æqualia perbrevia, per quæ puncta illa, motu reciproco, ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ, loca quævis intermedia eorundem punctorum; & EF, FG, lineolas phyſicas, ſeu Medii partes lineares, punctis illis interjectas, & ſucceſſivè tranſlatas in loca εφ, φγ & *ef*, *fg*. Rectæ E*e* æqualis ducatur recta PS. Biſecetur eadem in O, centroque O & intervallo OP deſcribatur circulus SIP*i*. Per hujus circumferentiam totam, cum partibus ſuis, exponatur tempus totum vibrationis unius, cum ipſius partibus proportionalibus; ſic ut completo tempore quovis PH vel PHS*h*, ſi demittatur ad PS perpendiculum HL vel *hl*, & capiatur Eε æqualis PL vel P*l*, punctum phyſicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad E, iiſdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes ſingulas peraget, cum oſcillante Pendulo. Probandum eſt, quòd ſingula Medii puncta phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu, à cauſâ quâcunque, cieri; & videamus, quid inde ſequatur.

In circumferentiâ PHS*h* capiantur æquales arcus HI, IK, vel *hi*, *ik*; eam habentes rationem ad circumferentiam totam, quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulſuum intervallum totum BC. Et demiſſis perpendiculis IM, KN, vel *im*, *kn*, quoniam puncta E, F, G motibus ſimilibus ſucceſſivè agitantur, & vibrationes ſuas integras, ex itu & reditu compoſitas, interea peragunt, dum pulſus transfertur à B ad C; ſi PH, vel PHS*h*, ſit tempus ab initio motûs puncti E, erit PI, vel PHS*i*, tempus ab initio motûs puncti F; & PK, vel PHS*k*, tempus ab initio motûs puncti G; & propterea

vel F æquetur duplæ Penduli longitudini.





terea Eε, Fφ, Gγ erunt ipſis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipſis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, æquales reſpectivè. Unde εγ, ſeu EG+Gγ−Eε, in itu punctorum æqualis erit EG−LN, in reditu autem æqualis EG+ln. Sed εγ latitudo eſt ſeu expanſio partis Medii EG in loco εγ; & propterea expanſio partis illius in itu eſt ad ejus expanſionem mediocrem, ut EG−LN ad EG; in reditu autem ut EG+ln, ſeu EG+LN, ad EG. Quare, cùm ſit LN ad HK ut IM ad radium OP, & KH ad EG ut circumferentia PHS*h*P ad BC, id eſt, ſi ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulſuum BC, ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG ut IM ad V: erit expanſio partis EG, punctive phyſici F, in loco εγ ad expanſionem mediocrem, quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, ut V−IM ad V in itu, utque V+im ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco εγ eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut HL−KN ad V, ſi modò (ob anguſtos limites vibrationum) ſupponamus HL & KN indefinitè minores eſſe quantitate V. Quare cùm quantitas

(d) Poſuit nimirum Newtonus Liquorem aliquem Elaſticum tali motu, à quâcunque demum cauſâ, agitari, quo ſingula ejus corpuſcula vias rectas breviſſimas eant redeantque, motu ad legem corporis penduli, in Cycloide oſcillantis, attemperato. Tum illud agit, ut exploret, quibuſnam viribus acceleratricibus corpuſcula ejus Liquoris urgeri debeant, ad motum qualem poſuit præſtandum. Eas verò tales eſſe oportere comperit, quæ cum diſtantiis corpuſculorum à medio itineris cujuſque ſui puncto proportione conveniant. Jam verò corpuſcula Liquoris Elaſtici quem corpus quodlibet tremulum agitaverit, ea quoque vias rectas breviſſimas eunt redeuntque; certiò utique

tas V detur, differentia virium eſt ut HL−KN, hoc eſt (ob proportionales HL−KN ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi *Ff* biſecetur in Ω, ut Ω*φ*. Et eodem argumento differentia virium elaſticarum punctorum phyſicorum *ε* & *γ*, in reditu lineolæ phyſicæ *εγ* eſt ut Ω*φ*. Sed differentia illa (id eſt, exceſſus vis elaſticæ puncti *ε* ſupra vim elaſticam puncti *γ*) eſt vis, quâ interjecta Medii lineola phyſica, *εγ*, acceleratur in itu, & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix lineolæ phyſicæ *εγ*, eſt ut ipſius diſtantia à medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) rectè exponitur per arcum PI; & Medii pars linearis *εγ* lege præſcriptâ movetur, id eſt, lege oſcillantis Penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. Q. E. D ([d]).

Corol. Hinc patet quòd numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola phyſica *εγ*, quamprimùm ad locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui à corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur, quamprimùm pulſus à corpore tremulo propagari deſinunt.

utique viribus acceleratricibus, à tremoribus corporibus tremuli, incitata. Eæ autem quænam erunt? Nempe ſi tales ſint, quæ cum diſtantiis corpuſculorum, à medio itineris cujuſque puncto, proportione conveniant, eum illæ corpuſculorum ſingulorum motum efficient, qui ad legem corporis penduli, in Cycloide oſcillantis, attemperatus erit: quoniam motus corpuſculorum ſingulorum, ad eam legem attemperatus, tales vires acceleratrices flagitare oſtenſus ſit: et fieri nullâ ratione poteſt, ut à viribus ſimilibus diſſimiles motus in eâdem materiâ concitentur. Tales autem eſſe vires quibus incitantur corpuſcula Liquoris Elaſtici, à corpore tremulo agitati, Newtonus tacitè aſſumpſit. Et in hoc aſſumpto omnis hujus Propoſitionis poſita eſt demonſtratio: quæ nulla planè erit, ſi hoc aſſumptum negaveris. Imo ſiquis oſtenderit vires acceleratrices non eſſe tales, is vel ex iis ipſis, quæ à Newtono ſunt oſtenſa, contra Newtonum obtinebit motus corpuſculi cujuſque Liquoris Elaſtici motum corporis penduli in Cycloide neutiquam æmulari. Vellem Newtonus ipſe aſſumpti ſui rationes explicâſſet. Mihi ſanè non niſi probabili ratione colligendum videtur, ex eo quod in Nervo tenſo accidere novimus; cujus quidem puncta ſingula vibrantis viribus incitantur, quæ cum diſtantiis punctorum à locis mediis proportione conveniant. Quòd ſi corpus omne tremulum nihil aliud ſit, quàm contextus quidam fibrarum trepidantium, quarum unaquæque pro nervo tenſo habenda ſit, et ſi corporis totius tremor confectus ſit ex fibrarum omnium tremoribus; ſanè veriſimile erit, corpuſcula ſingula corporis tremuli ſimili modo, quo puncta ſingula Nervi tenſi vibrantis, incitari. Denique ſi corpus tremulum in corpuſculis Liquoris Elaſtici non alios motus efficere poſſit, niſi qui ſimiles ſint eorum, quos ipſius corpuſcula proprios habent, corpuſcula utique Liquoris Elaſtici, quem corpus tremulum agitet, motus punctorum Nervi tenſi æmulari veriſimillimum erit.

Cæterùm de Motu Nervi Tenſi conſulendus eſt Taylorus in *Methodo Increment. Part.* II. Unum moneo, pro eo quod apud Taylorum in demonſtratione Lemmatis IX. legimus, eſſe *tr* ad *t*B ut *sb* ad BS, omnino legendum, eſſe *tr* ad *t*B ut *sb* ad 2BS. Cujus emendationis ratio, ex iis quæ ad Lemma tertium hujus libri diſputavimus, ſatis patet.

PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII.

Pulſuum in Fluido Elaſtico propagatorum velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè & ſubduplicatâ ratione denſitatis inverſè; ſi modò Fluidi vis elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. 1. Si Media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his Mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno Medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Veruntamen niſi contractiones & dilatationes ſint valdè intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro phyſicè accuratâ haberi poteſt. Sunt autem vires elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium, ſimul genitæ, ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos, per ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui, tempore itûs & reditûs unius, latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ, ſeu longitudines, ſint majores in uno Medio quàm in altero; ponamus, quòd partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia, ſingulis vicibus eundo & redeundo, deſcribant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi Media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elaſticæ motrices, quibus reciproco motu agitantur. Materia autem, his viribus movenda, eſt ut pulſuum latitudo: & in eâdem ratione eſt ſpatium, per quod ſingulis vicibus, eundo & redeundo, moveri debent. Eſtque tempus itûs & reditûs unius in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ materiæ & ratione ſubduplicatâ ſpatii ([e]), atque ideo ut ſpatium. Pulſus autem, temporibus itûs & reditûs unius eundo, latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

([e]) Per Prop. XLVII. et Prop. XXIV. Cor. 5.

Caſ.

Caſ. 3. In Mediis igitur denſitate & vi elaſticâ paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quòd ſi Medii vel denſitas vel vis elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; tempus, quo motus iidem peragantur ac priùs, augebitur in ſubduplicatâ ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ (f). Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis Medii inverſè & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè. Q. E. D.

Hæc Propoſitio ulteriùs patebit ex conſtructione ſequentis.

PROP. XLIX. PROB. XI.

Datis Medii denſitate & vi elaſticâ, invenire velocitatem pulſuum.

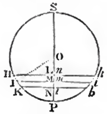
Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aëris noſtri, comprimi; ſitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, ſit A: & quo tempore Pendulum illud oſcillationem integram, ex itu & reditu compoſitam, peragit, eodem Pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli, radio A deſcripti, æquale.

Nam ſtantibus quæ in Propoſitione XLVII. conſtructa ſunt, ſi linea quævis phyſica EF, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium PS, urgeatur in extremis itûs & reditûs cujuſque locis, P & S, à vi elaſticâ quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas, quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo, quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cùm oſcillationum tempora ſint in ſubduplicatâ ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}$PS, ſeu PO, ad longitudinem A. Sed vis elaſtica, quâ lineola phyſica, EG, in locis ſuis extremis, P, S, exiſtens urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis XLVII.)

(f) Prop. XLVII. et Prop. XXIV.



ad ejus vim totam elaſticam ut HL−KN ad V, hoc eſt (cùm punctum K jam incidat in P) ut HK ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur, eſt ad pondus lineolæ, ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem EG; ideoque ex æquo, vis,



quâ lineola EG in locis ſuis P & S urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut HK × A ad V × EG, ſive ut PO × A ad VV, nam HK erat ad EG ut PO ad V. Quare cùm tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elaſticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in ſubduplicatâ ratione VV ad PO × A, atque ideo ad tempus oſcillationis Penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione VV ad PO × A, & ſubduplicatâ ratione PO ad A conjunctim; id eſt, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius, ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium BC, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eâdem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. Q.E.D.

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt Gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſûs hujus, cum velocitate cadendo acquiſitâ, pulſus percurret ſpatium, quod erit æquale toti altitudini A; ideoque tempore oſcillationis unius, ex itu & reditu compoſitæ, percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio

A de-

A deſcripti: eſt enim tempus caſûs ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cùm altitudo illa A ſit ut Fluidi vis elaſtica directè & denſitas ejuſdem inverſè; velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione denſitatis inverſè & ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè.

PROP. L. PROB. XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium, quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa erit pulſûs unius latitudo. Q. E. I.

Scholium.

Spectant Propoſitiones noviſſimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cùm propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſolâ (per Prop. XLI & XLII.) conſiſtere nequit. Soni verò, propterea quòd à corporibus tremulis oriantur, nihil aliud ſunt quàm Aëris pulſus propagati, per Prop. XLIII. Comfirmatur id ex tremoribus, quos excitant in corporibus objectis, ſi modò vehementes ſint & graves, quales ſunt ſoni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficiliùs excitantur. Sed & ſonos quoſvis, in chordas corporibus ſonoris uniſonas impactos, excitare tremores notiſſimum eſt. Confirmatum etiam ex velocitate ſonorum. Nam cum pondera ſpecifica Aquæ Pluvialis & Argenti Vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum Aëris & Aquæ Pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera ſpecifica Aëris & Argenti Vivi ut 1 ad 11890. Proinde cùm altitudo Argenti Vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërum noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa, quam, in conſtructione ſuperioris Problematis, nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti circumferentia eſt pedum 186768. Et cùm Pendulum

digitos

digitos $39\frac{1}{5}$ longum oſcillationem, ex itu & reditu compoſitam, tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, abſolvat; Pendulum pedes 29725, ſeu digitos 356700, longum oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum $190\frac{3}{4}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore Sonus progrediendo conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius ſecundi pedes 979.

Cæterùm in hoc computo nulla habetur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aëris, per quam ſonus utique propagatur in inſtanti. Cùm pondus aëris ſit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & ſales ſint ferè duplo denſiores quàm aqua; ſi particulæ aëris ponantur eſſe ejuſdem circiter denſitatis cum particulis vel aquæ vel ſalium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos Sonus tempore minuti unius ſecundi juxta calculum ſuperiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$, ſeu 109, circiter, ob craſſitudinem particularum aëris: & ſic Sonus tempore minuti unius ſecundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde, quòd vapores in aëris latentes, cùm ſint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri, quo Soni propagantur. His autem quieſcentibus, motus ille celeriùs propagabitur per ſolum aërem verum, idque in ſubduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut ſi Atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, motus ſonorum celerior erit in ſubduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quàm ſi propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus ſonorum, ſuprà inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto Sonus, tempore minuti unius ſecundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore Verno & Autumnali, ubi Aër per calorem temperatum rareſcit, & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At Hyberno tempore, ubi Aër per frigus condenſatur, & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicatâ ratione denſitatis; & viciſſim Æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat

Conſtat autem per experimenta, quòd ſoni, tempore minuti unius ſecundi, eundo conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142, *Pariſienſes* verò 1070.

Cognitâ ſonorum velocitate, innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. Invenit utique *D. Sauveur*, factis à ſe experimentis, quòd fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ tempore minuti unius ſecundi centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi percurrit; ideoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi $10\frac{7}{10}$, id eſt, duplam circiter longitudinem fiſtulæ. Unde veriſimile eſt, quòd latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Porro cur Soni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutiùs audiuntur, ubi longiſſimè diſtamus à corporibus ſonoris, quàm cùm proximè abſumus, patet ex Corollario Propoſitionis XLVII. libri hujus. Sed & cur ſoni in tubis ſtentorophonicis valdè augentur, ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus à cauſâ generante augeri ſolet. Motus autem in tubis, dilatationem ſonorum impedientibus, tardiùs amittitur & fortiùs recurrit, & propterea à motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et hæc ſunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECTIO IX.

De motu Circulari Fluidorum.

HYPOTHESIS.

Reſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, quâ partes Fluidi ſeparantur ab invicem.

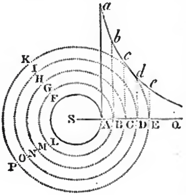
PROP.

De Motu Corporum

PROP. LI. THEOR. XXXIX.

Si Cylindrus ſolidus infinitè longus in Fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum, uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem, perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico, quòd tempora periodica partium Fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe Cylindri.

Sit AFL Cylindrus uniformiter circa axem S in orbem actus, & circulis concentricis BGM, CHN, DIO, EKP, &c. diſtinguatur Fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt Fluidum ([a]), impreſſiones contiguorum orbium, in ſe mutuò factæ, erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem, & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt, vel minor, ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impreſſio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu, vel in contrariam, dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde, cùm impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inverſè ut ſuperficies, hoc eſt, inverſè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. Sunt autem



differentiæ motuum angularium, circa axem, ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inverſè; hoc eſt, conjunctis rationibus, ut quadrata diſtantiarum inverſè. Quare, ſi ad infinitæ rectæ SABCDEQ partes ſingulas erigantur perpendicula, A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c. ipſarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendiculari-

([a]) Vide Prop. LII. Not. [c] & [d].

um duci intelligatur linea curva hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*; id eſt, ſi, ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, &c. Et tempora, motibus angularibus reciprocè proportionalia, erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis D reciprocè ut area D*d*Q; hoc eſt (per notas Curvarum Quadraturas) directè ut diſtantia SD. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum Fluidi ſunt reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe Cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol. 2. Si Fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret Fluidi pars unaquæque in motu ſuo: erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si Cylindro & Fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium Fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti Cylindrorum & Fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis Cylindri exterioris, habebitur motus Fluidi in cylindro quieſcente.

Corol. 5. Igitur ſi Fluido & Cylindro exteriore quieſcentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis Fluido, & paulatim per totum Fluidum propagabitur; nec priùs deſinet augeri, quàm Fluidi partes ſingulæ motum Corollario quarto deſinitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam Fluidum conatur motum ſuum adhuc latiùs propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violentur detentus; & accelerabitur ejus motus, quoad

 uſque

De Motu Corporum

uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quòd ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum Fluidi retardare; &, niſi cylindrus interior, vi aliquâ extrinſecus impreſſâ, motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

Quæ omnia in Aquâ profundâ ſtagnante experiri licet.

PROP. LII. THEOR. XL.

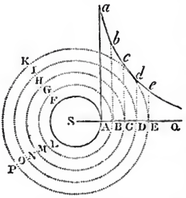
Si Sphæra ſolida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum, uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem; perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico, quòd tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro Sphæræ.

Caſ. 1. Sit AFL Sphæra uniformiter circa axem S in orbem acta, & circulis concentricis BGM, CHN, DIO, EKP, &c. diſtinguatur Fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis ([b]). Finge autem orbes illos eſſe ſolidos ([c]); & quoniam homogeneum eſt Fluidum ([d]), impreſſiones contiguorum orbium, in ſe mutuò factæ, erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies continuæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt, vel minor, ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impreſſio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu, vel in contrariam, dirigitur. Proinde, ut orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utràque ſibi invicem æquari; & fieri in regiones contrarias. Unde, cùm impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem; erunt tranſlationes inverſè ut ſuperficies, hoc eſt, inverſè ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum

([b]) Centro ſcilicet S, in plano aliquo per ſphæræ polos ducto, intelligantur circuli innumeri omnium magnitudinum, qui circa axem ſphæræ converſi, ſphæricas ſuperficies innumeras circum centrum commune S efficiant, quibus tota moles liquida diſtinguatur in orbes innumeros ejuſdem craſſitudinis. Circuli BGM, CHN, DIO, EKP lineationis Newtonianæ ſunt horum orbium Æquatores.

([c]) Congelato utique liquore in orbibus ſingulis ſeparatim; ita tamen ut denſitas materiæ uniformis, quæ antè fuit, maneat. Dico liquorem in *orbibus ſingulis* ſeparatim congelandum eſſe.

Nempe



motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inverſè; hoc eſt, conjunctis rationibus, ut cubi diſtantiarum inverſè. Quare ſi ad rectæ infinitæ SABCDEQ partes ſingulas erigantur perpendicula A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c. ipſarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*: id eſt (ſi ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, &c. Et tempora periodica, motibus angularibus reciprocè proportionalia, erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum orbis cujuſvis DIO reciprocè ut area D*d*Q, hoc eſt, per notas Curvarum Quadraturas, directè ut quadratum diſtantiæ SD. Id quod volui primò demonſtrare.

Caſ. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis ſe mutuò ſuperantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros ([e]) ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem, & duos laterales ([f]). Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſûs primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſûs primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet à globo in infinitum rectâ pergens, movebi-

Nempe ut corpora ſolida disjuncta tot efficiat, quot ſint orbes, nec in unum corpus ſolidum concreſcat.

([d]) Quoniam homogeneum erat Fluidum, & denſitas materiæ quæ Liquoris erat, ea in corporibus ſolidis, ex liquoris concretione factis, manet, idcirco denſitas materiæ in unoquoque orbe uniformis, & in omnibus eadem erit. Quapropter *impreſſiones contiguorum orbium*, &c.

([e]) Cum æquatoris plano parallelos.

([f]) Nempe ſuperiorem alterum, alterum inferiorem in eâdem ſphæricâ ſuperficie.

tur pro lege caſûs primi, niſi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus eſt (g); neque ideo motum, quò minùs hâc lege fiat, impediet. Si annuli, qui à centro æqualiter diſtant, vel citiùs revolverentur vel tardiùs juxta Polos quam juxta Eclipticam (h), tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuò, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſûs primi. Non impedit igitur hic attritus, quo minùs motus fiat ſecundum legem caſûs primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt, annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum à centro globi. Quod volui ſecundò demonſtrare.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motûs circularis, ſed ad conſtitutionem Fluidi ſolummodò conducunt, perſeverabit motus circularis ut priùs. His ſectionibus annuli omnes quàm minimi aſperitatem & vim attritûs mutui aut non mutabunt, aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum. Q. E. D. Cæterùm cum motus circularis, & inde orta vis centrifuga, major ſit ad Eclipticam (h) quàm ad Polos; debebit cauſa aliqua adeſſe, quâ particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur; ne materia, quæ ad Eclipticam eſt (h), recedat ſemper à centro, &, per exteriora Vorticis, migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam (h) circulatione perpetuâ revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium Fluidi circa axem globi, ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi, & velocitates abſolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in Fluido quieſcente, ſimilari & infinito, circa axem poſitione datum, uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus Fluido in morem Vorticis, & motus iſte paulatim propagabitur in infinitum; neque priùs ceſſabit in ſingulis Fluidi partibus accelerari, quàm tempora periodica ſingularum

(g) Propter æquales motus angulares annulorum omnium ejuſdem ſolidi orbis ſphærici.

partium ſint ut quadrata diſtantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores, ob majorem ſuam velocitatem, atterunt & urgent exteriores, motumque ipſis eâ actione perpetuò communicant; & exteriores illi eandem motûs quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eâque actione ſervant quantitatem motûs ſui planè invariatam; patet, quòd motus perpetuò transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eò quòd motum omnem, à materiâ interiore, acceptum transfert ſemper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conſervationem Vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem ſemper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam Vorticis. Sine tali principio neceſſe eſt, ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim, & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici, ad certam ab ipſius centro diſtantiam, innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur Fluidum in vorticem: & primò revolveretur hic Vortex novus & exiguus, unà cum globo, circa centrum alterius, & interea latiùs ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus; ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuò, ob motum illum circularem, fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea, ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3 & 4. aſſignatam) & Vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures, datis in locis, circum axes poſitione datos, certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli eâ-

(b) Intellige Æquatorem.

dem

De Motu Corporum

dem ratione, quâ unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut Fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu, qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde Vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuò paulatim excurrent; globique, per actiones Vorticum in ſe mutuò, perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in Corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis, quæ, in globos conſtanter impreſſæ, conſervant hoſce motus, materia, ob rationem in Corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet, & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si Fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi, in centro conſiſtentis, uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes Fluidi non priùs perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quàm ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro Vorticis. Alia nulla Vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari, circa axem quemvis datum, revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium Fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit, ut attritu ex uno latere non magis tardetur, quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus Fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi, & motu

(*) Hujus Corollarii veritatem ſic oſtendimus. A Vaſe, Globo, et Liquore interpoſito, pro lege Corollarii 7. circumactis, auferatur motus quivis angularis communis Z. Motus angularis qui in Globo reliquus eſt, dicatur G, qui in orbe quovis Liquoris CHN, C; qui in orbe extimo TNF, ſeu vaſis orbe, E. Erit igitur $G+Z$ ad $C+Z$ ut SC^2 ad SA^2. Et $C+Z$ ad $E+Z$ ut SE^2 ad SC^2 (per Cor. 7). Unde etiam $G+Z$ ad $E+Z$ ut SE^2 ad SA^2. Hinc ſi ponatur $E=0$, ut vas ablatâ motûs ejus angularis parte Z, ad quietem redigatur, erit $G+Z$ ad Z ut SE^2 ad SA^2; et $C+Z:Z = SE^2:SC^2$. Plani, motu ejus qui globi eſt contrario circumacti, dicatur motus angularis P. Tempus converſionis ejuſdem plani dicatur π; Globi, γ. Erit igitur $\pi:\gamma = G:P$; et $\pi+\gamma:\gamma = G+P:P$. Sed $\pi+\gamma:\gamma = SE^2:SA^2$. (Id enim Newtonus poſuit.) Quare $G+P:P = SE^2:SA^2$. At vero $SE^2:SA^2 = G+Z:Z$, modò talis ſit Z, qui efficiat ut vas quieſcat. Id enim à nobis oſtenſum

motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium Fluidi, reſpectu plani hujus, erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi (i).

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem, datâ cum velocitate quâcunque moveatur, dabitur motus Fluidi. Nam ſi ſyſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui priùs, per Corol. 8. Et motus iſti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & Fluidum quieſcant, & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per Fluidum totum in vas, & circumagetur vas, niſi violentur detentum; neque priùs deſinent Fluidum & vas accelerari, quàm ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quòd ſi vas vi aliquâ detineatur, vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad ſtatum motûs in Corollariis 8, 9 & 10, definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde verò, ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur ſyſtema totum legibus Mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante Fluido, neque motus ſuos in ſe mutuò per Fluidum propagare priùs ceſſabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & ſyſtema totum, ad inſtar corporis unius ſolidi, ſimul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus ſuppono Fluidum ex materiâ, quoad denſitatem & fluiditatem, uniformi conſtare. Tale eſt, in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in Fluido

tenſum eſt.) Unde $G+Z:Z = G+P:P$. Et dividendo $G:Z = G:P$. Unde $Z = P$. Quare cùm ſit $C+Z:Z = SE^2:SC^2$ (id enim à nobis oſtenſum.) erit $C+P:P = SE^2:SC^2$. Eſt autem P ad $P+C$ ut motus angularis Plani; contrariè circumacti, ad motum angularem, quo partes Liquoris in orbe CHN Plano illi admoventur. Unde P erit ad $P+C$ ut tempus converſionis orbis CHN, ratione ejus Plani, ad tempus quo Planum ipſum convertetur. Quare cùm ſit etiam $P:P+C = SC^2:SE^2$, tempus primum erit ad poſterius ut quadratum ex SC ad quadratum ex SE. Et ſimili modo de alio quovis orbe Liquoris oſtendetur, ejus tempus convertendi, ratione Plani contrariè circumacti, ad tempus, quo Planum ipſum convertitur, rationem habere quam quadratum ex orbis ejus ſemidiametro ad quadratum ex ſemidiametro vaſis. Q. E. D.

conſtitutus,

conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia, per motum ſuum circularem, recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hâc preſſione fit attritus partium fortior, & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes Fluidi ſunt alicubi craſſiores, ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem, vel lubricitate partium, vel lentore, aliâve aliquâ conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia, ubi minùs fluida eſt, magis cohærebit & ſegnior erit; ideoque motum tardiùs recipiet & longiùs propagabit, quàm pro ratione ſuperiùs aſſignatâ. Si figura vaſis non ſit ſphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus, ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum à centro quamproximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus; ubi anguſtiora, velociores; neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minùs curvos, & conatus recedendi à centro non minùs diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo à ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longiùs à centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in Fluido infinito conſtitutio Vorticum innoteſcit, per Propoſitionis hujus Corollarium ſextum.

Proprietates autem Vorticum hâc Propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem, ſiquâ ratione Phænomena Cœleſtia per vortices explicari poſſint. Nam Phænomenon eſt, quòd Planetarum, circa Jovem revolventium, tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Jovis; & eadam regula obtinet in Planetis, qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in Planetis utriſque quàm accuratiſſimè, quatenus Obſervationes Aſtronomicæ hactenus prodidere. Ideoque ſi Planetæ illi à Vorticibus, circa Jovem & Solem revolventibus, deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verùm tempora

periodica

periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicatâ diſtan-
tiarum à centro motûs: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, niſi vel materia Vorticis eo fluidior ſit, quo longiùs diſtat à centro; vel reſiſtentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, ex auctâ velocitate, quâ partes Fluidi ſeparantur ab invicem, augeatur in majori ratione, quàm ea eſt, in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi conſentaneum videtur. Partes craſſiores & minùs fluidæ, niſi graves ſint in centrum, circumferentiam petent; & veriſimile eſt, quòd, etiamſi demonſtrationum gratiâ hypotheſin talem, initio Sectionis hujus, propoſuerim, ut Reſiſtentia velocitati proportionalis eſſet, tamen Reſiſtentia in minori ſit ratione, quàm ea velocitatis eſt. Quo conceſſo, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quàm duplicatâ ratione diſtantiarum ab ipſius centro. Quòd ſi Vortices (uti aliquorum eſt opino) celeriùs moveantur prope centrum, dein tardiùs uſque ad certum limitem, tum denuò celeriùs juxta circumferentiam; certè nec ratio ſeſquiplicatâ, neque alia quævis certa ac determinata, obtinere poteſt. Viderint itaque Philoſophi, quo pacto Phænomenon illud rationis ſeſquiplicatæ per Vortices explicari poſſint.

PROP. LIII. THEOR. LXI.

Corpora, quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum Vortice, & eâdem lege cum ipſius partibus, quoad velocitatem & curſûs determinationem moventur

Nam ſi Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ, ſeu puncta phyſica, datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neque quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: & contrà, ſi Vorticis pars congelata & ſolida ejuſdem ſit denſitatis cum reliquo Vortice, & reſolvatur in Fluidum; movebitur hæc eâdem lege ac priùs, niſi quatenus ipſius particulæ, jam fluidæ factæ, moveantur inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tanquam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac priùs. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium, à centro æqualiter diſtan-

 tium,

De Motu Corporum

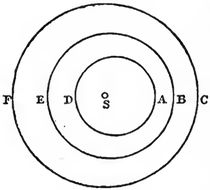
tium, propterea quòd Solidum, in Fluidum reſolutum, fit pars Vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo Solidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materiâ Vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quieſcens. Sin denſius ſit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quàm priùs; ideoque Vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ ſuâ, tanquam in æquilibrio conſtitutum, retinebatur, jam ſuperans, recedet à centro, & revolvendo deſcribet Spiralem, non ampliùs in eundem orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum Fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quòd revolveretur eâdem lege cum partibus Fluidi à centro Vorticis æqualiter diſtantibus. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo Solidum, quod in Vortice revolvitur, & in eundem orbem ſemper redit, relativè quieſcit in Fluido cui innatat.

Corol. 2. Et ſi Vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem, ad quamlibet à centro Vorticis diſtantiam, revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam



Planetæ, ſecundum hypotheſin *Copernicæam*, circa Solem delati revolvuntur in Ellipſibus umbilicum habentibus in Sole, &, radiis ad Solem ductis, areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent AD, BE, CF, orbes tres circa Solem S deſcriptos; quorum extimus, CF, circulus ſit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia ſint A, B, & Perihelia D, E. Ergo corpus, quod revolvitur in orbe CF, radio ad Solem ducto, areas temporibus proportionales deſcribendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem, quod revolvitur in orbe BE, tardiùs movebitur in Aphelio B, & velociùs in Perihelio E, ſecundum leges Aſtronomicas; cùm tamen, ſecundum leges Mechanicas, materia Vorticis,

2 in

in ſpatio anguſtiore inter A & C, velociùs moveri debeat, quàm in ſpatio latiore inter D & F; id eſt, in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio ſigni Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio ſigni Piſcium ut ternarius ad binarium circiter; & propterea materia Vorticis, inter orbes illos, in principio Piſcium debet eſſe velocior, quàm in principio Virginis in ratione ternarii ad binarium. Nam quo anguſtius eſt ſpatium, per quod eadem materiæ quantitas, eodem revolutionis unius tempore, tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra, in hâc materiâ cœleſti relativè quieſcens, ab eâ deferretur, & unâ circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialterâ. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta & octo: cùm tamen (experientiâ teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piſcium. Itaque hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos, quàm ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis, ſine Vorticibus, peraguntur, intelligi poteſt ex Libro Primo, & in Mundi Syſtemate jam pleniùs docebitur.

FINIS TOMI SECUNDI.

CORRIGENDA IN CONTEXTU.

Pag. 98, lin. 32, pro *locum*, lege *loci*.
Pag. 273, lin. 6, pro *velocitatum*, lege *velocitatis*.

CORRIGENDA ET ADDENDA IN NOTIS.

P. 51, *Notæ* [l], *hæc addantur*. Cor. H. Velocitas corporis in Circulo circumacti, ea erit, quam corpus, urgente vi quâdam uniformi, quæ ejus ſit æqualis quæ in circuli circuitu viget, ſpatium dimidii radii cadendo adeptum eſſet. Sumatur enim AE (fig. Not. [l]) radii AD ſemiſſis, arcuſque AF æqualis radio. Erit igitur AC : AF = AF : AE. Arcus igitur AF motu corporis per circulum æquabili, et ſpatium AE caſu recto, hoc eſt motu æquabiliter accelerato, eodem tempore conficientur. At verò eodem tempore quo caſu recto conficitur ſpatium AE, conficiatur, velocitate illà quam corpus in E adeptum erit, duplum ſpatium AE, ſive radius AD. Arcus igitur AF et radius AD æqualibus temporibus conficiantur, velocitate uterque æquabili; ille quidem eà quæ eſt corporis in Circulo circumacti, hic verò eà quam corpus, rectà cadendo, in loco E adeptum eſſet. Sunt autem arcus AF, radiuſque AD inter ſe æquales. Quare et velocitates quibus ſpatia illa æqualia temporibus æqualibus conficerentur, eæ inter ſe æquales erunt. Velocitas igitur corporis in Circulo velocitati corporis rectà cadentis in loco E æqualis. Q. E. D.

Cor. H. 2. Tempus quo corpus, urgente vi quâdam uniformi, quæ æqualis ſit ejus quæ in Circuli circuitu viget, caſu recto dimidium radium conficiat, ad tempus converſionis integræ in Circulo rationem habet, quam radius ad circuli circuitum. Patet ex demonſtratione ſuperioris.

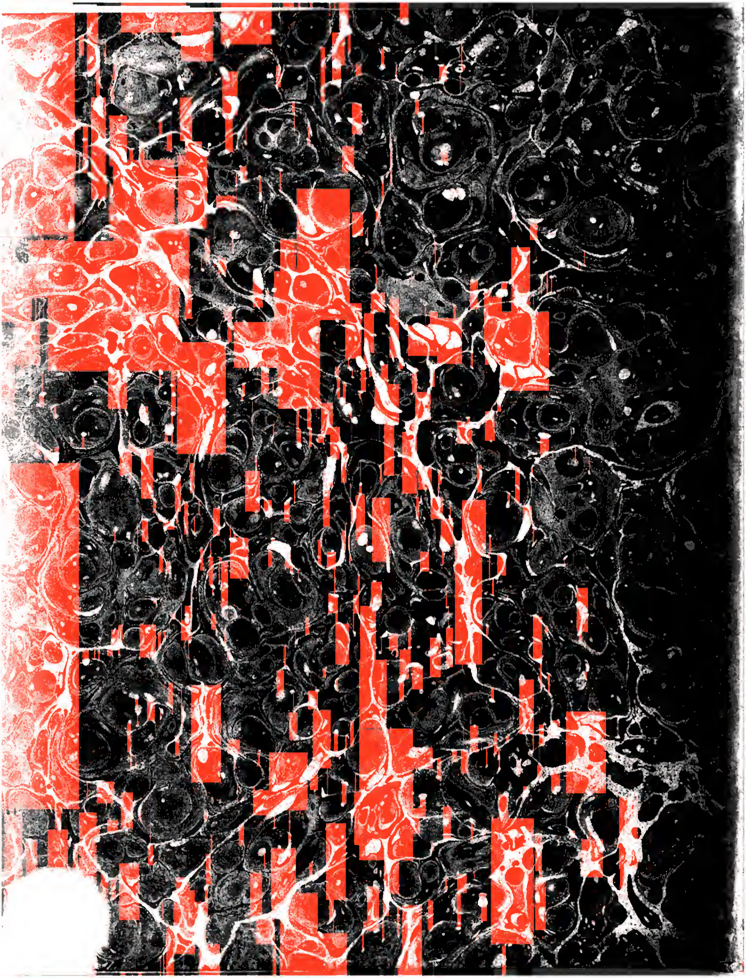
P. 83, *Notæ* [d1], *hæc addantur*. Cor. H. 2. Si corpus aliquod à loco R in locum T rectà cadat, urgente utique vi quâdam uniformi, quæ ejus ſit æqualis, quâ corpus per Ellipſin PAF incedens urgetur verſus umbilicum G in loco P (fig. Not. [d2]); tum ſi ea ſit longitudo ſpatii RT, ut corporis rectâ cadentis eadem ſit, in loco T, quæ alterius, per Ellipſin lati, in loco P velocitas; rectangulum ſub RT et axe tranſverſo Ellipſeos rectangulo ſub rectis PG, PS, à puncto Ellipſeos P ad umbilicos ductis, æquale erit. Capiatur enim RV dimidiæ PG æqualis. Velocitas corporis rectâ cadentis, in loco V, ea erit quâcum Corpus, urgente vi centrali qualis eſt in loco Ellipſeos P, in circulo circum centrum G in diſtantiâ GP circumageretur. (Lib. I. Sect II. Not. [l], Cor. H.) Sed recta TR ad rectam TV rationem habet duplicatum ejus quam velocitas in loco T ad velocitatem in loco V: duplicatam igitur ejus quam velocitas in loco P, corporis per Ellipſin lati, ad velocitatem corporis circum centrum G in diſtantiâ GP circumacti. Harum autem velocitatum duplicata ratio ea eſt quam SP habet ad CA. Erit igitur TR ad TV ut SP ad CA. Quare TR : 2TV vel PG = SP : 2CA. Quare TR × 2CA = PS × PG. Q. E. D. Pulcherrimum hoc Theorema Boſcovicii eſt. Demonſtratio à nobis.



Pag. 145, lin. not. 10, pro *evadit*, lege *evadet*.
Pag. 181, lin. penult. pro *interceptæ*, lege *intercepta*.
Pag. 210, not. [f], lin. 2, dele *necnon SK, ST*.
Pag. 244, not. [d], lin. 6, pro *curvi linearis*, lege *curvilinearis*.
Pag. 275, lin. not. 5, pro *repreſentari*, lege *repræſentari*.
Pag. 281, lin. not. 1, pro **formulis & Ideâ generationis quantitatum**, lege *formulis * & Ideâ generationis quantitatum **.
Pag. 287, lin. not. 2. In membro æquationis ultimo in numeratore lege $\frac{2}{3} So^3$.
Pag. 320, lin. not. 37, pro *conſenda*, lege *cenſenda*.
Pag. 369, lin. not. ult. pro *efficiet*, lege *efficiat*.
Pag. 386, lin. not. 12, pro *iſtius modi*, lege *iſtiuſmodi*.
Pag. 419, lin. not. 9, pro *tate*, lege *unitate*.

1125 201.3737

Digitized by Google



Digitized by Google